

Foglio di esercizi n.14

Equazioni differenziali: SOLUZIONI

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy, determinando l'intervallo massimale di definizione della soluzione trovata.

1.

$$\begin{cases} y' + x \tan y = 0 \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y(x) = \arcsin(e^{-\frac{x^2}{2}})$$

2.

$$\begin{cases} y' + 2y = 3e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = e^{-2x}(3x + 1) \quad a(x) = 2, \quad b(x) = 3e^{-2x} \quad \text{quindi } A(x) = 2x \quad \text{dunque}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} b(x) dx \right) \\ &= e^{-2x} \left(\int e^{2x} 3e^{-2x} dx \right) = e^{-2x} \left(\int 3 dx \right) = e^{-2x}(3x + c) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{cases} y' = \ln(x) y \\ y(1) = -e \end{cases}$$

$$y(x) = -e^{2-x} \cdot x^x$$

4.

$$\begin{cases} y' = \frac{xy}{(x-1)^2} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = (x-1)e^{\frac{x-2}{x-1}}$$

Per risolvere l'integrale della funzione razionale si consiglia il cambio di variabile $t = x - 1$.

5.

$$\begin{cases} y' = e^y \ln(x) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = -\ln(x - x\ln(x)).$$