CdL in Scienze geologiche e Scienze naturali - Università di Bologna
A.A. 2018-19

Foglio di esercizi n.4

Funzioni: SOLUZIONI

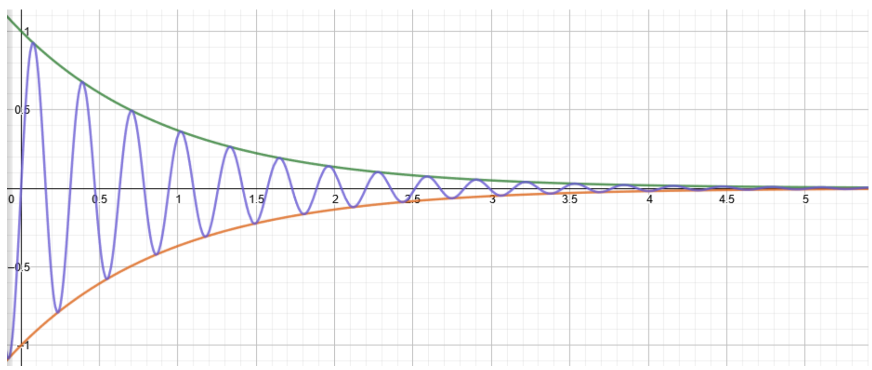
1. La funzione $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$y(t) = e^{-\alpha t} sin(\omega t)$$

   modellizza una vibrazione smorzata, dove $\alpha > 0$. Poniamo $\alpha = 1$.

   (a) Disegnare il grafico delle funzioni e^{-t} e $-e^{-t}$.

   (b) Disegnare il grafico della funzione $y(t)$.



   (c) Stabilire per quali valori di t vale $y(t) = 0$, per quali valori la funzione è positiva e per quali è negativa.

$$sin(\omega t) = 0 \; per \; t = k\frac{\pi}{\omega}$$

   con $k \in \mathbb{Z}$. Risulta positiva per

$$2n\frac{\pi}{\omega} < t < (2n+1)\frac{\pi}{\omega}$$

   con $n \in \mathbb{N}$.

   (d) La funzione è periodica? No

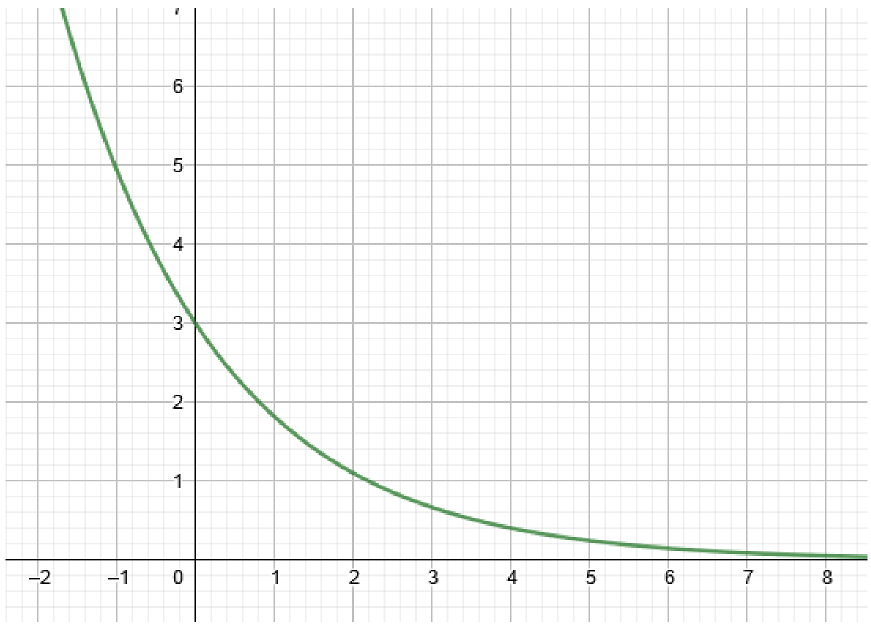
   (e) La funzione è invertibile? In caso positivo determinare l'inversa. Nel suo dominio naturale non è invertibile.

2. La funzione $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$q(t) = Q_0 \; e^{-\frac{t}{\tau}}$$

modellizza la carica di un condensatore in un circuito con capacità e resistenza, dove $\tau = RC$ e Q_0 è la carica iniziale.

(a) Disegnare il grafico della funzione $q(t)$.
Nel caso $Q_0 = 3$ e $\tau = 2$ il grafico risulta



(b) Stabilire per quali valori di t vale $q(t) = 0$, per quali valori la funzione è positiva e per quali è negativa. (sempre positiva)

(c) Stabilire dopo quanto tempo la carica è dimezzata e dopo quanto tempo la carica è il 12% della carica iniziale.

$$Q_0 \; e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2} Q_0$$

$$-\frac{t}{\tau} = -ln(2)$$

$$t = \tau ln(2)$$

Questo è il tempo di dimezzamento: il suo antireciproco è il λ dell'esercizio successivo.
Allo stesso modo sostituendo $\frac{1}{2}$ con $\frac{12}{100}$ si ottiene la risposta alla seconda domanda.

(d) Se voglio scrive la funzione nella forma

$$q(t) = Q_0 \; 2^{\lambda t}$$

quanto deve valere λ?

(e) La funzione è invertibile? In caso positivo determinare l'inversa.

$$y = Q_0 \; e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{y}{Q_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$ln(\frac{y}{Q_0}) = -\frac{t}{\tau}$$

$$t = -\tau ln(\frac{y}{Q_0})$$

ben definita per $y > 0$.