

Foglio di esercizi n.5

Funzioni: SOLUZIONI

1. La funzione $sh :: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

è detta funzione seno iperbolico.

- (a) Determinare se la funzione è pari, dispari o nessuna delle due.
DISPARI
- (b) Stabilire per quali valori di x vale $sh(x) = 0$, per quali valori la funzione è positiva e per quali è negativa.

$$e^x - e^{-x} = 0$$

$$e^x = e^{-x}$$

$$x = -x$$

si annulla solo in 0. Allo stesso modo si studia il segno.

- (c) Determinare per quali valori di x vale $sh(x) = 1$.

$$e^x - e^{-x} = 2$$

$$e^{2x} - 1 = 2e^x$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

Risolvendo si ottiene $e^x = 1 - \sqrt{2}$ che è impossibile e $e^x = 1 + \sqrt{2}$ cioè $x = \ln(1 + \sqrt{2})$.

- (d) Per qualsiasi valore di $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $sh(x) = y$ ha una e una sola soluzione, quindi questa funzione è invertibile: determinare la funzione inversa generalizzando il procedimento usato nel punto precedente.

Stesso procedimento di prima: risolvendo l'equazione

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

si ottiene la funzione inversa

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

ben definita su tutto \mathbb{R} .

2. Disegnare i grafici di determinando eventualmente se sono funzioni pari

$$\begin{array}{cccccc} \log(x) & \log|x| & |\log(x)| & \log(x-2) & \log(x)-2 & \\ |\log(x-2)| & \log|x|-2 & |\log(x)|-2 & |\log|x|| & & \end{array}$$

3. Determinare se le seguenti funzioni sono simmetriche (pari o dispari)

$$\frac{x}{3+x^2} \quad x \sin(2x) \quad \cos(x^3) \quad 2^{x^3}$$

4. Siano $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x - 2$. Scrivere le funzioni

$$f \circ g \quad g \circ f \quad h \circ g \quad g \circ h \quad f \circ h \quad f \circ g \circ h \quad f \circ h \circ g$$

disegnarne il grafico e determinare per ciascuna se è simmetrica (pari o dispari), dominio, codominio e se è iniettiva, suriettiva, invertibile nel suo dominio. Nel caso sia invertibile determinare l'inversa.

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$(h \circ g)(x) = x^2 - 2$$

$$(g \circ h)(x) = (x - 2)^2$$

$$(f \circ h)(x) = \frac{1}{x - 2}$$

$$(f \circ g \circ h)(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$$

$$(f \circ h \circ g)(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$$