

Foglio di esercizi n.6

Numeri complessi: SOLUZIONI

1. Consideriamo il polinomio $x^2 - 2x + 10$, che non è scomponibile in $\mathbb{R}$.

(a) Determinare le due soluzioni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$x^2 - 2x + 10 = 0$$

rappresentandole sul piano cartesiano e determinando le loro coordinate polari.

$$\alpha = 1 + 3i \quad \beta = 1 - 3i$$

nel piano corrispondono ai punti $(1, 3)$ e $(1, -3)$ e la loro rappresentazione polare è

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

dove $r = \sqrt{10}$ e $\theta = \arctg(3)$.

(b) Verificare che il polinomio si scompone

$$x^2 - 2x + 10 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

2. Consideriamo il polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

(a) Trovare una scomposizione

$$p(x) = r(x) \cdot s(x)$$

dove $r(x)$ è un polinomio di primo grado e $s(x)$ è un polinomio di secondo grado non scomponibile in $\mathbb{R}$.

Una soluzione reale è $x = 2$; dividendo per $(x - 2)$ si trova

$$p(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$$

(b) Determinare le due soluzioni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dell'equazione $s(x) = 0$ e la soluzione $x_0 \in \mathbb{R}$ di $r(x) = 0$ rappresentandole sul piano cartesiano

e determinando le loro coordinate polari.

Le soluzioni di $x^2 + 4 = 0$ sono $2i$ e $-2i$. In coordinate polari

$$x = 2 \quad (\rho, \theta) = (2, 0)$$

$$x = 2i \quad (\rho, \theta) = (2, \frac{\pi}{2})$$

$$x = -2i \quad (\rho, \theta) = (2, -\frac{\pi}{2})$$

(c) Verificare che il polinomio si scompone

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x - x_0)(x - \alpha)(x - \beta)$$

3. Calcolare

$$z = \frac{5+i}{1-i} \quad w = z \cdot (2-i)$$

$$z = \frac{5+i}{1-i} = \frac{(5+i)(1+i)}{2} = 2 + 3i$$

$$w = z \cdot (2-i) = (2+3i) \cdot (2-i) = 7 + 4i$$

4. Dato $z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

(a) determinare le coordinate polari di z ; $(\rho, \theta) = (1, \frac{\pi}{3})$

(b) determinare le coordinate polari di $w = z^2$; $(\rho, \theta) = (1, \frac{2\pi}{3})$

(c) determinare le coordinate polari di $v = \sqrt{z}$. $(\rho, \theta) = (1, \frac{\pi}{6})$