

Foglio di esercizi n.7

Limiti

1. La funzione

$$y(t) = e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

modellizza una vibrazione smorzata, dove $\alpha > 0$.

Determinare il dominio della funzione ed eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui.

La funzione è definita su $\mathbb{R}$ ed ha un asintoto orizzontale $y = 0$ a $+\infty$.

2. La funzione

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

modellizza la carica di un condensatore in un circuito con capacità e resistenza, dove $\tau = RC$ e Q_0 è la carica iniziale.

Determinare il dominio della funzione ed eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui.

La funzione è definita su $\mathbb{R}$ ed ha un asintoto orizzontale $y = 0$ a $+\infty$.

3. La funzione

$$N(t) = N_0 R^t$$

modellizza l'evoluzione della numerosità di una popolazione malthusiana con tassi costanti di natalità n e m , dove $R = 1 + n - m$ ed N_0 è la numerosità iniziale.

In che modo la relazione tra n ed m incide sul comportamento asintotico di questa funzione?

Se il tasso di natalità è maggiore di quello di mortalità la popolazione tende ad aumentare esponenzialmente:

se $n > m$ allora $R > 1$ quindi $N(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$

Se il tasso di natalità è minore di quello di mortalità la popolazione tende ad diminuire esponenzialmente e dunque ad estinguersi:

$$se\ n < m\ allora\ R < 1\ quindi\ N(t) \rightarrow 0\ per\ t \rightarrow +\infty$$

Se il tasso di natalità è uguale a quello di mortalità la popolazione è costante:

$$se\ n = m\ allora\ R = 1\ quindi\ N(t) = N_0 \rightarrow N_0\ per\ t \rightarrow +\infty$$

4. La funzione

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\alpha t}}$$

è detta funzione logistica e modella l'evoluzione della numerosità di alcune popolazioni, dove $\alpha > 0$, $K > 0$ ed N_0 è la numerosità iniziale. Determinare il comportamento asintotico di questa funzione.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$$