Tutorato Geometria 1B - A.A. 2018-19
Marco Trozzo

ALGEBRA LINEARE

1. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ è un campo.

2. Dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e più in generale $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ per ogni p primo.

3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Dimostrare che è un $\mathbb{Q}$-s.v. di dimensione 4. Se chiamiamo $u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ calcolare il polinomio minimo di u. Possiamo scegliere come base dello s.v. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ ma anche $\{1, u, u^2, u^3\}$. Calcolare la matrice di cambio base.

Se consideriamo

$$v_{\sqrt{2}} : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$
$$p(x) \to p(\sqrt{2})$$

$I = Ker(v_{\sqrt{2}}) = (p_{\sqrt{2}})$ è un ideale principale, dove $p_{\sqrt{2}}$ è il polinomio minimo di $\sqrt{2}$.
Quindi come ogni polinomio razionale che si annulla in 2 è divisibile per $(x-2)$, così ogni polinomio razionale che si annulla in $\sqrt{2}$ è divisibile per $p_{\sqrt{2}}$.

Per valutare un polinomio di $K[t]$ in un elemento x devo poter calcolare:
x^n, i.e. moltiplicare un elemento per se stesso (ad esempio un anello, non necessariamente commutativo)
cx con $c \in K$, i.e. moltiplicare per uno scalare (ad esempio uno spazio vettoriale)
$cx^m + bx^n$, i.e. sommare due elementi (ad esempio uno spazio vettoriale).
Un insieme che è uno spazio vettoriale ma anche un anello si dice una K-algebra. Ad esempio $M_{n,n}(K)$ e $End(V)$.

Se consideriamo $A \in M_{n,n}(K)$ (o equivalentemente $f \in End(V)$

$$v_A : \mathbb{Q}[x] \to M_{n,n}(K)$$
$$p(x) \to p(A)$$

$I = Ker(v_A) = (p_A)$ è un ideale principale, dove p_A è il polinomio minimo di A.
Quindi ogni polinomio razionale che si annulla in A è divisibile per p_A.

4. Determinare il polinomio minimo e il polinomio caratteristico delle seguenti matrici

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

5. Determinare per ciascuno dei seguenti polinomi una matrice che abbia quello come polinomio minimo
   $(t-2)(t-3)$
   $(t-2)^2(t-3)$
   $(t-2)^2(t-3)^2$

6. (idemopotenti) Dimostare che qualsiasi $f \in End(V)$ idemopotente, i.e. tale che
$$f^2 = f$$
   è diagonalizzabile e se $f \neq 0$ e $f \neq Id$ allora ha polinomio minimo $x(x-1)$ e $Sp(f) = \{0, 1\}$.
   In particolare per gli endomorfismi idempotenti $Tr(f) = rk(f)$.

   (Esempi di idempotenti: proiezioni) Se consideriamo
$$\begin{aligned} pr:\ \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^n \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\to (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$
   $Sp(pr) = \{0, 1\}$ e $V_1 = span(e_1, \ldots, e_k)$, $V_0 = span(e_{k+1}, \ldots, e_n)$.
   Se ho un piano π s.s.v. di $\mathbb{R}^3$ con $\pi = span(v_1, v_2)$ e $\pi^\perp = span(v_3)$ la proiezione ortogonale su π è l'applicazione $pr_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $pr_\pi(v_1) = v_1$, $pr_\pi(v_2) = v_2$, $pr_\pi(v_3) = 0$ quindi $V_1 = \pi$ e $V_0 = \pi^\perp$.

7. (involuzioni) Dimostare che qualsiasi $f \in End(V)$ che sia un'involuzione, i.e. tale che
$$f^2 = I$$
   è diagonalizzabile e se $f \neq \pm Id$ allora ha polinomio minimo $(x+1)(x-1)$ e $Sp(f) = \{1, -1\}$.

   (Esempi di involuzioni: riflessioni) Se consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la riflessione rispetto al piano π, allora $V_1 = \pi$ e $V_{-1} = \pi^\perp$.

(Esempi di involuzioni: trasposizione di una matrice) Se consideriamo

$$M_{n,n}(K) \to M_{n,n}(K)$$
$$A \to A^T$$

In questo caso $V_1 = Sym_n(K) = span(e_{11}, e_{22}, \dots, e_{nn}, e_{12} + e_{21} \dots)$ che ha dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.

Invece $V_{-1} = Skew_n(K) = span(e_{12} - e_{21} \dots)$ che ha dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.

8. Più in genereale qualsiasi $f \in End(V)$ tale che

$$f^3 = f$$

è diagonalizzabile e se f non è un'involuzione né idempotente allora ha polinomio minimo $x(x+1)(x-1)$ e $Sp(f) = \{0, 1, -1\}$.

9. (nilpotenti) Un endomorfismo $f \in End(V)$ tale che

$$f^k = 0 \quad (e\ f^{k-1} \neq 0)$$

si dice nilpotente di ordine k. Dimostrare che ha polinomio minimo x^k e $Sp(f) = \{0\}$. Se $k \neq 1$ non è diagonalizzabile.
Dimostrare che un endomorfismo f è nilpotente se e solo se il suo polinomio caratteristico è $\pm x^n$.
La condizione $Sp(f) = \{0\}$ è necessaria e se K è algebricamente chiuso è anche sufficiente.
Osservare che nel caso in cui K non è algebricamente chiuso la condizione non è sufficiente: potrebbe essere che $Sp(f) = \{0\}$ con f non nilpotente, ad es. una rotazione di un angolo $\theta \neq k\pi$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \theta & -sin\ \theta \\ 0 & sin\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix}$$

In ogni endomorfismo $f \in End(V)$, chiamando $V_i = Ker(N^i)$, si ha una filtrazione

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_m \subseteq V$$

tale che $N(V_i) \subset V_{i-1}$.
In generale si definisce radicale $Rad(f) = \bigcup V_i = V_m$.

Nel caso di un endomorfismo nilpotente di indice k si ha che $m = k$ e $V_k = V$, cioè $V = Rad(f)$.
Dimostrare che è quindi possibile trovare una base di V secondo la quale un endomorfismo nilpotente è rappresentato da una matrice triangolare superiore con la diagonale nulla.

(Esempi di nilpotenti: la derivazione) Ad esempio la derivazione

$$\frac{d}{dx} : K[x]_{\leq 3} \to K[x]_{\leq 3}$$

ha polinomio minimo x^4 e rispetto alla base $\{6, 6x, 3x^2, x^3\}$ la sua matrice è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Trovare due matrici 4x4 nilpotenti dello stesso indice che non sono simili.

11. Verificare C-H per la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

12. Se $A \in M_{2,2}(K)$ il polinomio caratteristico è

$$t^2 - tr(A)t + det(A)$$

quindi per C-H si ha che $A^2 - tr(A)A + det(A) = 0$. Dimostrare che quindi tutte le potenze A^n e A^{-n} (se $\det(A) \neq 0$) si esprimono come combinazione lineare di I e di A.

13. Data

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico e stabilire se è diagonalizzabile. Usando C-H calcolare A^3.

14. Data $F \in M_{n,n}(K)$ sia

$$\begin{gathered} f : M_{n,n}(K) \to M_{n,n}(K) \\ A \to FA \end{gathered}$$

Dimostrare che il polinomio minimo di f coincide con il polinomio minimo di F.

15. Dimostrare che se due matrici sono simili hanno lo stesso polinomio minimo

16. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, consideriamo il sottospazio vettoriale

$$C_A = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \ : XA = AX\}$$

Dimostrare che dim (C_A)= $\dim(C_B)$ quando A e B sono simili.
Dimostrare che $C_A = span(1, A, \dots, A^{n-1})$ quando il polinomio caratteristico di A è prodotto di n fattori lineari distinti.

17. Considerare la matrice

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare se è diagonalizzabile, calcolare il polinomio caratteristico, il polinomio minimo, autovalori e relativi autospazi.

18. Risolvere l'equazione complessa $z^4 = \overline{z}$

19. Dimostrare che il coniugio è $\mathbb{R}$-lineare ma non $\mathbb{C}$-lineare.

20. $\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$ con $p_i = x^2 + 1$.

Equivalentemente se V è uno s.v. reale di dim 2, allora un $J \in End(V)$ tale che $J^2 + I = 0$ si dice struttura complessa su V.
Il polinomio minimo di J è $x^2 + 1$, J non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
Per ogni vettore non nullo $v \in V$ si ha che $\{v, Jv\}$ è una base per V e rispetto a questa base

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può diagonalizzare su $\mathbb{C}$: trovare autovalori ed autospazi. Verificare che un endomorfismo reale $f : \ V \to V$ dello spazio reale di dimensione 2 è un endomorfismo complesso dello spazio V munito della struttura J se e solo se commuta con J, i. e. $AJ = JA$.

Curiosità: l'Upside Down. Se V è uno spazio vettoriale complesso si può definire lo spazio vettoriale coniugato $\overline{V}$: come gruppo additivo coincide con V ma la moltiplicazione per scalari è "la coniugata", cioè

$$cv = \overline{c} \cdot v \ , \ c \in \mathbb{C}$$

(dove a sinistra si intende la moltiplicazione in $\overline{V}$ e a destra la moltiplicazione in V). Se V e W sono spazi vettoriali complessi una funzione $f : V \to W$ si dice antilineare se

$$f(v + v') = f(v) + f(v') \qquad f(cv) = \overline{c}v \ , \ c \in \mathbb{C}$$

cioè se è una mappa lineare $f : \overline{V} \to W$.
Lo spazio $\overline{V}$ si può costruire partendo dallo stesso spazio reale V di dimensione 2 ma scegliendo come struttura complessa $J \in End(V)$ la struttura coniugata.

21. Sia A una matrice quadrata complessa tale che $A^3 = A^2$. Dimostrare che A^2 è sempre diagonalizzabile e mostrare con un esempio che A può non essere diagonalizzabile.

22. Sia A una matrice 6×6 con polinomio caratteristico $p(t) = t(t-1)^5$. Se il rango della matrice $A - I$ è 3, quali sono le possibili forme di Jordan di A? É possibile determinare univocamente la forma di Jordan di A conoscendo il polinomio minimo?

23. Sia A una matrice con pol. caratteristico $p(t) = (t-1)^2(t-2)^3$. Se l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 1 e l'autovalore 2 ha molteplicità geometrica 2, qual è la forma di Jordan di A?

24. Determinare, se possibile, due matrici a coefficienti complessi che abbiano stesso polinomio minimo e stesso polinomio caratteristico ma che non siano simili.

25. Determinare, se possibile, due matrici a coefficienti complessi che abbiano stesso polinomio minimo, stesso polinomio caratteristico e stesse molteplcità geometiche degli autovalori ma che non siano simili.

26. Sia V uno s.v. di dimensione finita e siano $F, G \in End(V)$ due endomorfismi che commutano tra loro. Dimostrare che se F è diagonalizzabile e G è nilpotente esiste una base di autovettori di F rispetto alla quale la matrice di G è triangolare.

27. Determinare la forma canonica di Jordan associata alle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e determinare le matrici di cambio di base.

28. (es.532 delle dispense) In un palazzo ci sono 10 appartamenti. In ognuno c'è almeno una persona. In otto diquesti appartamenti ci sono almeno 2 persone, in sei appartamenti ci sono almeno 4 persone ed in un appartamento ci sono 5 persone. Quante persone, come minimo, ospita il palazzo? E soprattutto: cosa diamine c'entra questo esercizio con la forma di Jordan!?

29. La matrice B è una matrice 5x5 con 3 come unico autovalore. I ranghi delle potenze sono i seguenti: $B - 3I$ ha rango 3, $(B - 3I)^2$ ha rango 2, $(B - 3I)^3$ ha rango 1 e $(B - 3I)^4 = 0$. Qual è la forma di Jordan associata a B?

ALGEBRA BILINEARE E FORME QUADRATICHE

30. Sia $b \in Bils(V)$ una forma bilineare simmetrica su V.
Sia Rad(b)= $V^\perp = \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \; \forall w \in V\}$ il *radicale* di b.
Sia I(b)= $\{v \in V \mid b(v, v) = 0\}$ il *cono isotropo* di b. Dimostrare che:
    (a) Rad(b) è un sottospazio vettoriale di V;
    (b) I(b) non è un sottospazio vettoriale di V ma contiene lo 0 ed è chiuso per moltiplicazione per scalari;
    (c) $Rad(b) \subset I(b)$.

31. Sia $b \in Bils(\mathbb{R}^3)$

$$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2$$

Determinare se possibile

(a) un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ isotropo tale che $dim(v^\perp) = 3$;

(b) un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ non isotropo tale che $dim(v^\perp) = 2$.

(c) un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ non isotropo tale che $dim(v^\perp) = 3$.

Verificare che $w = (1, 1, 0)$ è isotropo e $dim(w^\perp) = 2$, calcolare $Rad(b)$ ed $I(b)$.

32. Costruire tutte le matrici $H \in GL_2(\mathbb{R})$ tali che $HH^T = I$.

33. Stabilire se è vero che il prodotto di due matrici reali simmetriche è una matrice simmetrica.

34. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $f, g \in V$ e

$$b(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Verificare che $b \in Bils(V)$ e, scelta una base per V, scrivere la matrice associata a b rispetto a tale base.

35. Sia $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid tr(X) = 0 \}$ e sia $b(X, Y) = tr(A^T B)$ una forma bilineare simmetrica su V. Determinare una base ortonormale di V rispetto a b e completarla ad una base ortonormale di $M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che rispetto a questa forma bilineare, data $P \in O(n)$, la funzione $f_P \in End(M_2(\mathbb{R}))$ definita da $f_P(A) = PAP^{-1}$ è un'isometria, cioè per ogni $A, B \in M_2(\mathbb{R})$

$$b(A, B) = b(f_P(A), f_P(B))$$

36. Determinare una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard del piano di $\mathbb{R}^3$ $\pi :\ x + y - z = 0$. Completare tale base ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

37. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ dimostrare che $< f, g >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ è una forma bilineare simmetrica definita positiva, determinare la matrice associata secondo una base a scelta e calcolare $(x^2)^\perp$ e $x^\perp$.

38. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ dimostrare che $q(f) = f(0)^2$ è una forma quadratica, calcolare la forma bilineare simmetrica associata e trovare una base ortogonale rispetto a tale forma bilineare. Qual è la massima dimensione di un sottospazio isotropo?

39. Dimostrate che se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare standard, allora la matrice $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} =< u_i, v_j >$ è una matrice ortogonale.

40. Siano $R_V, R_W \in End(\mathbb{R}^3)$ le riflessioni rispetto ai piani $V: \ x + y = 0$ e $W: \ y + z = 0$. Determinare la matrice canonicamente associata ad $f = R_V \circ R_W$

41. Sia b un prodotto scalare su V. Fissato un sottospazio W, dimostrare che ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = w + w'$ con $w \in W$ e $w' \in W^\perp$ e che vale il *teorema di Pitagora*

$$b(v, v) = b(w, w) + b(w', w')$$

42. Verificare che il determinante è una forma quadratica su $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne rango e segnatura.

43. Verificare che il discriminante $\Delta(a, b, c) = b^2 - 4ac$ è una forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ e calcolarne rango e segnatura. [La risposta è (2,1)]. Chi è il cono isotropo?

44. Si consideri la forma quadratica reale $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, in funzione del parametro reale k $q(x, y, z) = x^2 - 2kxy + y^2 + kz^2$.
Determinare per quali valori di k la forma q è definita positiva.
Posto $k = 1$ scrivere un'equazione canonica per q e scrivere la trasformazione ortogonale che riduce q alla forma canonica trovata.

45. Sia A una matrice reale simmetrica di ordine 2 con autovalori 2 e 3 e tale che $A \cdot (1, 1)^T = (2, 2)^T$. Determinare la matrice A.

46. Determinare tutte le matrici quadrate simmetriche reali di ordine 2 con $detA = 2$, $tr(A) = 3$ e che hanno un autospazio di equazione $x + y = 0$.

47. Dimostrare che una matrice reale simmetrica Q di ordine n è definita positiva se e solo se esiste una matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $Q = P^T P$.

48. Dimostrare che se $B = A^T A$ (A non necessariamente quadrata) allora B è una matrice simmetrica semidefinita positiva. In quali casi è definita positiva? Dimostrare il viceversa: se B è una matrice simmetrica semidefinita positiva è possibile trovare una (sola?) matrice A tale che $B = A^T A$.

49. Sia $c \in \mathbb{R}$ una costante positiva, consideriamo la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ $q(x,y,z,t) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ e siano A la matrice canonicamente associata e b la corrispondente forma bilineare simmetrica. Determinare rango, segnatura, una base ortonormale $\mathcal{B}$ e determinare la scrittura di un vettore $s \in \mathbb{R}^4$ in tale base e la matrice G associata a q rispetto a tale base.
In questo caso q è detta *forma di Minkowski* e il cono isotropo è anche detto dai fisici in modo molto suggestivo *cono di luce*.

50. Sia $v \in \mathbb{R}$ con $v \in (-c, c)$. Definiamo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ detto a volte *fattore di Lorentz*. Dimostrare che $A \in End(\mathbb{R}^4)$

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è un'isometria per la forma di Minkowski, cioè $A^TGA = G$ (o equivalentemente $A^{-1} = GA^TG$).
Verificare che le matrici che soddisfano tale equazione costituiscono un gruppo (detto $O(1,3)$).

51. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione 2 e $b \in Bils(V)$ una forma bilineare simmetrica non degenere su V che ammette un vettore isotropo non nullo. La coppia (V, b) è detta *piano iperbolico*.
- Calcolare la segnatura di b.
- Dimostrare che esiste una base di V $\{v_1, v_2\}$ di vettori isotropi tali che $b(v_1, v_2) = 1$. Tale base è detta *base iperbolica*.
- Dimostrare che

$$\beta(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 \qquad \gamma(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$$

sono forme iperboliche su K^2 e trovare per ciascuna di esse una base iperbolica ed una diagonalizzante.

52. Sia (V, b) un piano iperbolico su k e q la forma quadratica associata a b. Dimostrare che per ogni $c \in K$ esiste un vettore $v \in V$ tale che $q(v) = c$.

53. Sia V un K-spazio vettoriale e $b \in Bils(V)$ una forma bilineare simmetrica non degenere su V che ammette un vettore isotropo non nullo. Dimostrare che V contiene un piano iperbolico.

54. Sia V un K-spazio vettoriale e q una forma quadratica su V. Dimostrare che se esiste un vettore non nullo $u \in V$ tale che $q(u) = 0$ allora per ogni $c \in K$ esiste un vettore $v \in V$ tale che $q(v) = c$.

55. Sia V un K-spazio vettoriale e $b \in Bils(V)$. Un sottospazio vettoriale $U \subset I(b)$ è detto *sottospazio isotropo*. Dimostrare che U è un sottospazio isotropo se e solo se $U \subset U^{\perp}$ e che nel caso di b non degenere se U è un sottospazio isotropo

$$dim(U) \leq \frac{1}{2} dim(V)$$

56. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione $n+1$ e $b \in Bils(V)$ non degenere con segnatura $(n,1)$. Dimostrare che la massima dimensione di un sottospazio isotropo di V è 1.

57. Sia $q(x,y)$ una forma iperbolica su R^2. Dimostrare che $A \in End(\mathbb{R}^2)$

$$A = \begin{bmatrix} cosh\ \theta & sinh\ \theta \\ sinh\ \theta & cosh\ \theta \end{bmatrix}$$

è un'isometria per il piano iperbolico, detta *rotazione iperbolica* o dai fisici anche *Lorentz boost*.

58. Sia $F \in End(\mathbb{R}^4)$ tale che $F(e_1) = e_2$, $F(e_2) = e_1$, $F(e_3) = e_4$,$F(e_4) = e_3$. Determinare una base ortogonale che diagonalizzi F.

59. Considerare la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ $q(x,y,z,t) = 2xy + 2zt$. Mediante completamento dei quadrati ricondurre q alla sua forma canonica e confrontare il risultato con quello dell'esercizio precedente.

60. Sia b un prodotto scalare su V. Dimostrare che per ogni $u, v \in V$

$$b(u,v)^2 \leq b(u,u)b(v,v)$$

e l'uguaglianza vale se e solo se i vettori u e v sono linearmente dipendenti.

61. Verificare che una matrice simmetrica reale di ordine due o è un multiplo dell'identità o è regolare, cioè è diagonalizzabile con autovalori distinti. Verificare che una matrice antisimmetrica reale di ordine due non nulla non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. E su $\mathbb{C}$?

62. Trovare una base ortonormale di autovettori per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi scrivere $A = PDP^T$ con $P \in O(n)$ e D diagonale.

63. Dimostrare che $f \in End(\mathbb{R}^3)$

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x + y - z, -x - y + z)$$

è simmetrico e trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

64. Considerare le applicazioni $f_1, g_1, f_2, g_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ le applicazioni

$$f_1(z, w) = Re(zw) \qquad g_1(z, w) = Im(zw)$$

$$f_2(z, w) = Re(z\overline{w}) \qquad g_2(z, w) = Im(z\overline{w})$$

Verificare se sono forme bilineari simmetriche non degeneri su $\mathbb{C}$ considerato come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. In caso positivo diagonalizzarle e calcolarne la segnatura.

65. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard e sia $u \in \mathbb{R}^3$, considerare $L \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da $L(x) = x \wedge u$. Determinare se è un operatore autoaggiunto e scrivere la matrice associata ad L rispetto ad una base a scelta.

66. Considerare la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Verificare che il vettore $v = (1, 1, 1, 1)^T$ è un autovettore per A;
- calcolare $W = v^\perp$ e verificare che è un autospazio per A;
- determinare una base ortogonale di W e completarla ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ di autovettori per A;
- trovare una matrice ortogonale che diagonalizzi A.

CONICHE E QUADRICHE: CLASSIFICAZIONE AFFINE

67. Classificare la conica di equazione $x^2 - y^2 + 2x = 0$ e determinare i cambi di coordinate che portano la quadrica nella sua forma canonica affine.

68. Classificare la conica di equazione $xy + x + y + 1 = 0$ e determinare i cambi di coordinate che portano la quadrica nella sua forma canonica affine.

69. Classificare la quadrica di equazione $x^2 - 2xy - 2xz + 2x - 4y + 4 = 0$ e determinare i cambi di coordinate che portano la quadrica nella sua forma canonica affine.

70. Classificare la quadrica di equazione $x^2 + y^2 + 2xy + 2y - 2z + 10 = 0$ e determinare i cambi di coordinate che portano la quadrica nella sua forma canonica affine.

71. Classificare le coniche del fascio

$$x^2 + (1 - k)y^2 + 2kx - 2(1 - k)y + 2 - k = 0$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

72. Classificare le quadriche dei seguenti fasci

    (a) $x^2 - ky^2 + kz^2 - 1 = 0$
    (b) $x^2 - ky^2 + kz^2 + 1 = 0$
    (c) $x^2 + 2y^2 + kz^2 = k^2$

    al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

73. Data la quadrica di equazione $x^2 - y^2 - z = 0$ considerare z come parametro e classificare le coniche al variare di $z \in \mathbb{R}$ (dette *sezioni piane* o *sezioni iperpiane*).