Tutorato Geometria 1B - A.A. 2023-24

Marco Trozzo

ALGEBRA LINEARE

1. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ è un campo.

2. Dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e più in generale $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ per ogni p primo.

3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Dimostrare che è un $\mathbb{Q}$-s.v. di dimensione 4. Se chiamiamo $u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ calcolare il polinomio minimo di u. Possiamo scegliere come base dello s.v. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ ma anche $\{1, u, u^2, u^3\}$. Calcolare la matrice di cambio base.

   Poichè $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ anche $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ quindi è immediato che $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Dobbiamo dimostrare l'inclusione opposta cioè

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

   basta dimostrare che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ perchè in tal caso visto che $\sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{2}$ abbiamo che anche $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

$$\begin{aligned} u - \sqrt{2} &= \sqrt{3} \\ u^2 + 2 - 2u\sqrt{2} &= 3 \\ \sqrt{2} &= \frac{u^2 - 1}{2u} \end{aligned}$$

   Ricordiamo che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ è un campo quindi se $u \in K$ anche $u^2 - 1 \in K$ quindi abbiamo dimostrato che $\sqrt{2} \in K$.
   Ogni elemento di $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ si può scrivere come $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in Q$. Una base su $\mathbb{Q}$ è $\{1, \sqrt{2}\}$. Analogamente $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ e ogni elemento si può scrivere $c + d\sqrt{3}$ con $c, d \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ quindi si vede facilmente che ogni elemento in K si può scrivere come $a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6}$ con $a_i \in \mathbb{Q}$.
   Per calcolare il polinomio minimo di u

$$\begin{aligned} u - \sqrt{2} &= \sqrt{3} \\ u^2 + 2 - 2u\sqrt{2} &= 3 \\ u^2 - 1 &= 2\sqrt{2}u \\ u^4 + 1 - 2u^2 &= 8u^2 \\ u^4 - 10u^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

si ha $p_u(x) = x^4 - 10x^2 + 1$.
Dunque
$$\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 10x^2 + 1$$
Abbiamo la relazione $x^4 = 10x^2 - 1$ e ogni elemento avrà un rappresentante di grado minore di 4 e possiamo scegliere come base le potenze di u di grado minore di 4.
Poichè
$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ u^2 &= 5 + 2\sqrt{6} \\ u^3 &= 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

la matrice di cambio di base è
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. RIPASSO: Se consideriamo
$$\begin{aligned} v_{\sqrt{2}} : \mathbb{Q}[x] &\to \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ p(x) &\to p(\sqrt{2}) \end{aligned}$$
$I = Ker(v_{\sqrt{2}}) = (p_{\sqrt{2}})$ è un ideale principale, dove $p_{\sqrt{2}}$ è il polinomio minimo di $\sqrt{2}$.
Quindi come ogni polinomio razionale che si annulla in 2 è divisibile per $(x-2)$, così ogni polinomio razionale che si annulla in $\sqrt{2}$ è divisibile per $p_{\sqrt{2}}$.

Per valutare un polinomio di $K[t]$ in un elemento x devo poter calcolare:

- x^n, i.e. moltiplicare un elemento per se stesso (ad esempio un anello, non necessariamente commutativo);
- cx con $c \in K$, i.e. moltiplicare per uno scalare (ad esempio uno spazio vettoriale);
- $cx^m + bx^n$, i.e. sommare due elementi (ad esempio uno spazio vettoriale).

Un insieme che è uno spazio vettoriale ma anche un anello si dice una K-algebra. Ad esempio $M_{n,n}(K)$ e $End(V)$.

Se consideriamo $A \in M_{n,n}(K)$ (o equivalentemente $f \in End(V)$

$$\begin{aligned} v_A : \mathbb{Q}[x] &\rightarrow M_{n,n}(K) \\ p(x) &\rightarrow p(A) \end{aligned}$$

$I = Ker(v_A) = (p_A)$ è un ideale principale, dove p_A è il polinomio minimo di A.
Quindi ogni polinomio razionale che si annulla in A è divisibile per p_A.

5. Consideriamo K=$\mathbb{Q}[x]/(x^4 - 2)$:
   (a) dimostrare che K è un campo;
   (b) determinare la matrice associata alla moltiplicazione per $[x^2]$ rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

   (a) Dobbiamo dimostrare che $x^4 - 2$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$. Poichè non ha radici razionali basta dimostrare che non si può scomporre in due fattori di grado 2. Se per assurdo

$$x^4 - 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

   allora avremmo

$$\begin{cases} c + a = 0 \\ b + ac + d = 0 \\ bc + ad = 0 \\ bd = -2 \end{cases}$$

   che non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.
   (b) In K vale la relazione $x^4 - 2 = 0$, quindi $x^4 = 2$. K è uno spazio vettoriale di dimensione 4 su $\mathbb{Q}$ e come base possiamo scegliere $\{1, x, x^2, x^3\}$ (ogni elemento ha un rappresentante della forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
   La moltiplicazione per x^2 è un endomorfismo f di questo spazio vettoriale tale che $f(1) = x^2 \cdot 1 = x^2$, $f(x) = x^2 \cdot x = x^3$, $f(x^2) = x^2 \cdot x^2 = x^4 = 2$ e $f(x^3) = x^2 \cdot x^3 = x^5 = x \cdot x^4 = 2x$ quindi la matrice associata è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Scegliendo come base $\mathcal{B} = \{x^2 \pm \sqrt{2}, x^3 \pm \sqrt{2}x\}$ si trovano gli autovalori (reali) della matrice (che però non stanno in $\mathbb{Q}$) e la sua forma diagonale. Risulta

$$p_A(x) = (t - \sqrt{2})^2 \cdot (t + \sqrt{2})^2 = (t^2 - 2)^2 \in \mathbb{Q}[t]$$

$$q_A(x) = (t - \sqrt{2}) \cdot (t + \sqrt{2}) = (t^2 - 2) \in \mathbb{Q}[t]$$

6. Consideriamo K=$\mathbb{Q}[x]/(x^2 + x + 1)$:

   (a) trovare l'inverso di $[x + 1]$;

   (b) trovare il rappresentante di $[x^4 - 1]$ di grado < 2;

   (c) determinare la matrice associata alla moltiplicazione per x rispetto alla base $\{1, x\}$;

   (d) verificare che $[x]$ è una radice di $x^2 + x + 1$;

(a) In K vale la relazione $x^2 + x + 1 = 0$, quindi $x^2 = -x - 1$. Ogni elemento di K ha un rappresentante di grado minore di 2. Dobbiamo trovare un elmento $ax + b$ tale che $(ax + b)(x + 1) = 1$ in K.

$(ax+b)(x+1) = ax^2+ax+bx+b = a(-x-1)+ax+bx+b = bx+b-a$

Deve essere quindi $bx + a - b = 1$. Questa è un'identità tra polinomi quindi dobbiamo imporre che tutti i coefficienti di tutti i gradi coincidano. Otteniamo quindi $b = 0$ e $b-a = 1$, cioè $b = 0$ e $a = -1$. Dunque l'inverso in K di $x + 1$ è $-x$.
Un altro modo di ragionare è utilizzare Bezout e l'algoritmo di divsione euclidea: se $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ è tale che $[p(x)]$ è l'inverso di $[x + 1]$ in K

$$p(x)(x + 1) = 1 \qquad mod\ x^2 + x + 1$$

cioè

$$p(x)(x + 1) + s(x)(x^2 + x + 1) = 1$$

Per trovare $p(x)$ ed $s(x)$ possiamo usare la divisione euclidea:

$$x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$$

quindi $p(x) = -x$ ed $s(x) = 1$

(b) utilizzando la relazione $x^2 = -x - 1$ abbiamo che

$$x^4 = (-x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1 = (-x - 1) + 2x + 1 = x$$

Quindi un rapprensentante di $[x^4 - 1]$ è $x - 1$.

(c) K è uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{Q}$ e come base possiamo scegliere $\{1, x\}$ (infatti abbiamo detto che ogni elemento ha un rappresentante della forma $ax + b$ con $a, b \in \mathbb{Q}$.
La moltiplicazione per x è un endomorfismo f di questo spazio vettoriale tale che $f(1) = x * 1 = x$ e $f(x) = x * x = x^2 = -x - 1$ quindi la matrice associata è

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) Ovviamente $[x]^2 + [x] + [1] = [x^2 + x + 1] = 0$ in K. Quindi il polinomio x^2+x+1 è riducibile in K ed una radice è $[x]$. Chi è l'altra radice?

$$x^2 + x + 1 = (x - [x])(x - a) = x^2 - ([x] + a)x + [x]a$$

da cui $[x] + a = 1$ e $[x]a = 1$ cioè a deve essere l'inverso di $[x]$ in K, che è $[-x - 1]$. Quindi l'altra radice è $[-x - 1]$, infatti

$$[-x-1]^2+[-x-1]+1 = [x^2+2x+1-x-1+1] = [-x-1+2x+1-x] = 0$$

Quindi il polinomio $x^2 + x + 1$ in K risulta scomponibile:

$$x^2 + x + 1 = (x - [x])(x - [-x - 1])$$

7. Verificare C-H per la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   Il polinomio caratteristico di A è $t^2 - 4t + 5$. Per C-H abbiamo che $A^2 - 4A + 5I = 0$, cioè $A^2 = 4A - 5I$, uguaglianza che è facile verificare.

8. Determinare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo delle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

   Le tre matrici hanno come polinomio caratteristico $(\alpha - \lambda)^3$. Poichè il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico e contiene tutti i suoi fattori irriducibili il polinomio minimo deve essere della forma

$(\lambda-\alpha)^k$ dove $1 \leq k \leq 3$. A è diagonalizzabile quindi $q_A = \lambda - \alpha$ poichè è libero da quadrati.
Nel caso della matrice B si vede che $(B - \lambda I) \neq 0$ ma $(B - \lambda I)^2 = 0$ dunque $q_B = (\lambda - \alpha)^2$ mentre nel terzo caso analogamente si vede che $q_C = (\lambda - \alpha)^3$.

9. Se $A \in M_{2,2}(K)$ il polinomio caratteristico è

$$x^2 - tr(A)x + det(A)$$

quindi per C-H si ha che $A^2 - tr(A)A + det(A) = 0$. Dimostrare che quindi tutte le potenze A^n e A^{-n} (se $\det(A) \neq 0$) si esprimono come combinazione lineare di I e di A.

Chiamiamo $t = tr(A)$ e $d = det(A)$. Poichè $A^2 - tA + dI = 0$ si ha che $A^2 = tA - dI$. Quindi

$$A^3 = A \cdot (tA - dI) = tA^2 - dA = t(tA - dI) - dA = (t^2 - d)A - dtI$$

e analogamente per tutte le potenze di A.
D'altra parte poichè $A^2 - tA + dI = 0$ abbiamo $A^2 - tA = -dI$ cioè

$$A(A - tI) = -dI$$

Quindi $A^{-1} = -\frac{1}{d}(A - tI)$ ed analogamente tutte le sue potenze.

10. Determinare per ciascuno dei seguenti polinomi una matrice che abbia quello come polinomio minimo
$(t-2)(t-3)$
$(t-2)^2(t-3)$
$(t-2)^2(t-3)^2$

11. Dimostrare che se due matrici sono simili hanno lo stesso polinomio minimo.

Sia $A = C^{-1}BC$. Si ha che per ogni n $A^n = C^{-1}B^nC$ infatti

$$A^n = (C^{-1}BC)(C^{-1}BC)\ldots C^{-1}BC = C^{-1}B^nC$$

quindi per ogni ogni polinomio $p(A) = C^{-1}p(B)C$. Chiamiamo p_A e p_B i polinomi minimi. Poichè $p_B(A) = C^{-1}p_B(B)C = 0$ il polinomio p_B annulla A e quindi $p_A | p_B$. Ma analogamente anche $p_A | p_B$ ed essendo polinomi monici $p_A = p_B$.

12. Data
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Calcolare il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico e stabilire se è diagonalizzabile. Usando C-H calcolare A^3.

    Il polinomio caratteristico è $p(t) = -t^3 + 3t - 2 = -(t-1)^2(t+2)$. Quindi ci sono due possibilità per il polinomio minimo $q(t)$:
    - $q(t) = p(t)$ (il polinomio minimo non è libero da quadrati) se e solo se la matrice non è diagonalizzabile.
    - $q(t) = (t-1)(t+2)$ (il polinomio minimo è libero da quadrati) se e solo se la matrice è diagonalizzabile.

    Poichè la matrice non è diagonalizzabile siamo nel secondo caso.

    Per calcolare A^3 possiamo utilizzare C-H infatti, essendo $p(t) = -t^3 + 3t - 2$ abbiamo che $-A^3 + 3A - 2I = 0$ cioè $A^3 = 3A - 2I$

13. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, consideriamo il sottospazio vettoriale
$$C_A = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \ : XA = AX\}$$
Dimostrare che dim (C_A)= dim(C_B) quando A e B sono simili.
    Dimostrare che $C_A = span(1, A, \ldots, A^{n-1})$ quando il polinomio caratteristico di A è prodotto di n fattori lineari distinti.

14. Sia V un K spazio vettoriale di dimensione n, con K algebricamente chiuso, e sia $\phi \in End(V)$. Dimostrare che
    (a) esiste un vettore ciclico per ϕ se e solo se il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico
    (b) in tal caso se $g \in End(V)$ commuta con ϕ allora esiste un polinomio tale che $g = p(\phi)$.

15. Risolvere l'equazione complessa $z^4 = \overline{z}$.

16. Dimostrare che il coniugio è $\mathbb{R}$-lineare ma non $\mathbb{C}$-lineare.

17. $\mathbb{R}(i) \cong \mathbb{C}$ con $p_i = x^2 + 1$.

Equivalentemente se V è uno s.v. reale di dim 2, allora un $J \in End(V)$ tale che $J^2 + I = 0$ si dice struttura complessa su V.
Il polinomio minimo di J è $x^2 + 1$, J non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
Per ogni vettore non nullo $v \in V$ si ha che $\{v, Jv\}$ è una base per V e rispetto a questa base

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può diagonalizzare su $\mathbb{C}$: trovare autovalori ed autospazi. Verificare che un endomorfismo reale $f : V \to V$ dello spazio reale di dimensione 2 è un endomorfismo complesso dello spazio V munito della struttura J se e solo se commuta con J, i. e. $AJ = JA$.

Curiosità: l'Upside Down. Se V è uno spazio vettoriale complesso si può definire lo spazio vettoriale coniugato $\overline{V}$: come gruppo additivo coincide con V ma la moltiplicazione per scalari è "la coniugata", cioè

$$cv = \overline{c} \cdot v \ , \ c \in \mathbb{C}$$

(dove a sinistra si intende la moltiplicazione in $\overline{V}$ e a destra la moltiplicazione in V). Se V e W sono spazi vettoriali complessi una funzione $f : V \to W$ si dice antilineare se

$$f(v + v') = f(v) + f(v') \qquad f(cv) = \overline{c}v \ , \ c \in \mathbb{C}$$

cioè se è una mappa lineare $f : \overline{V} \to W$.
Lo spazio $\overline{V}$ si può costruire partendo dallo stesso spazio reale V di dimensione 2 ma scegliendo come struttura complessa $J \in End(V)$ la struttura coniugata.

18. (es.532 delle dispense) In un palazzo ci sono 10 appartamenti. In ognuno c'è almeno una persona. In otto diquesti appartamenti ci sono almeno 2 persone, in sei appartamenti ci sono almeno 4 persone ed in un appartamento ci sono 5 persone. Quante persone, come minimo, ospita il palazzo? E soprattutto: cosa diamine c'entra questo esercizio con la forma di Jordan!?

19. (idemopotenti) Dimostare che qualsiasi $f \in End(V)$ idemopotente, i.e. tale che
$$f^2 = f$$
è diagonalizzabile e se $f \neq 0$ e $f \neq Id$ allora ha polinomio minimo $x(x-1)$ e $Sp(f) = \{0, 1\}$.
In particolare per gli endomorfismi idempotenti $Tr(f) = rk(f)$.

Il polinomio $p(x) = x^2 - x$ è tale che $p(f) = 0$, quindi se p_m è il polinomio minimo di f si ha che $p_m | p$. Dunque ci sono tre possibilità: $p_m = x, x-1, x(x-1)$. In tutti i casi il polinomio minimo si decompone in fattori lineari distinti dunque f è diagonalizzabile.
Se $p_m = x$ allora $f = 0$.
Se $p_m = x - 1$ allora $f = Id$.
Se $p_m = x(x-1)$ allora $V = V_0 \oplus V_1$.

(Esempi di idempotenti: proiezioni) Se consideriamo

$$pr : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

$Sp(pr) = \{0, 1\}$ e $V_1 = span(e_1, \ldots, e_k)$, $V_0 = span(e_{k+1}, \ldots, e_n)$.
Se ho un piano π s.s.v. di $\mathbb{R}^3$ con $\pi = span(v_1, v_2)$ e $\pi^\perp = span(v_3)$ la proiezione ortogonale su π è l'applicazione $pr_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $pr_\pi(v_1) = v_1$, $pr_\pi(v_2) = v_2$, $pr_\pi(v_3) = 0$ quindi $V_1 = \pi$ e $V_0 = \pi^\perp$.

20. (involuzioni) Dimostare che qualsiasi $f \in End(V)$ che sia un'involuzione, i.e. tale che

$$f^2 = I$$

è diagonalizzabile e se $f \neq \pm Id$ allora ha polinomio minimo $(x+1)(x-1)$ e $Sp(f) = \{1, -1\}$.

Il polinomio $p(x) = x^2 - 1$ è tale che $p(f) = 0$, quindi se p_m è il polinomio minimo di f si ha che $p_m | p$. Dunque ci sono tre possibilità: $p_m = x+1, x-1, (x+1)(x-1)$. In tutti i casi il polinomio minimo si decompone in fattori lineari distinti dunque f è diagonalizzabile.
Se $p_m = x + 1$ allora $f = -Id$.
Se $p_m = x - 1$ allora $f = Id$.
Se $p_m = x(x-1)$ allora $V = V_{-1} \oplus V_1$.

(Esempi di involuzioni: riflessioni) Se consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la riflessione rispetto al piano π, allora $V_1 = \pi$ e $V_{-1} = \pi^\perp$.

(Esempi di involuzioni: trasposizione di una matrice) Se consideriamo

$$M_{n,n}(K) \to M_{n,n}(K)$$
$$A \to A^T$$

In questo caso $V_1 = Sym_n(K) = span(e_{11}, e_{22}, \ldots, e_{nn}, e_{12} + e_{21} \ldots)$ che ha dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.

Invece $V_{-1} = Skew_n(K) = span(e_{12} - e_{21} \ldots)$ che ha dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$.

21. Più in genereale qualsiasi $f \in End(V)$ tale che

$$f^3 = f$$

è diagonalizzabile e se f non è un'involuzione né idempotente allora ha polinomio minimo $x(x+1)(x-1)$ e $Sp(f) = \{0, 1, -1\}$.

Intanto osserviamo che idempotenti e involuzioni sono casi particolari di questo ultimo; il polinomio $p(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ è tale che $p(f) = 0$, quindi se p_m è il polinomio minimo di f si ha che $p_m | p$. Dunque ci sono le seguenti possibilità: $p_m = x, x-1, x+1, x(x-1), x(x+1), (x-1)(x+1), x(x-1)(x+1)$. In tutti i casi il polinomio minimo si decompone in fattori lineari distinti dunque f è diagonalizzabile.
Se $p_m = x$ allora $f = 0$.
Se $p_m = x - 1$ allora $f = Id$.
Se $p_m = x + 1$ allora $f = -Id$.
Se $p_m = x(x-1)$ allora f è idempotente e $V = V_0 \oplus V_1$.
Se $p_m = x(x+1)$ allora analogamente $V = V_0 \oplus V_{-1}$.
Se $p_m = (x-1)(x+1)$ allora f è un'involuzione e $V = V_1 \oplus V_{-1}$.
Se $p_m = x(x-1)(x+1)$ allora $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_{-1}$.

22. (nilpotenti) Un endomorfismo $f \in End(V)$ tale che

$$f^k = 0 \quad (e\ f^{k-1} \neq 0)$$

si dice nilpotente di ordine k. Dimostrare che ha polinomio minimo x^k e $Sp(f) = \{0\}$. Se $k \neq 1$ non è diagonalizzabile.
Dimostrare che un endomorfismo f è nilpotente se e solo se il suo polinomio caratteristico è $\pm x^n$.
La condizione $Sp(f) = \{0\}$ è necessaria e se K è algebricamente chiuso è anche sufficiente.
Osservare che nel caso in cui K non è algebricamente chiuso la condizione non è sufficiente: potrebbe essere che $Sp(f) = \{0\}$ con f non nilpotente, ad es. una rotazione di un angolo $\theta \neq k\pi$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \theta & -sin\ \theta \\ 0 & sin\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix}$$

In ogni endomorfismo $f \in End(V)$, chiamando $V_i = Ker(N^i)$, si ha una filtrazione

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_m \subseteq V$$

tale che $N(V_i) \subset V_{i-1}$.
In generale si definisce radicale $Rad(f) = \bigcup V_i = V_m$.
Nel caso di un endomorfismo nilpotente di indice k si ha che $m = k$ e $V_k = V$, cioè $V = Rad(f)$.
Dimostrare che è quindi possibile trovare una base di V secondo la quale un endomorfismo nilpotente è rappresentato da una matrice triangolare superiore con la diagonale nulla.

Poichè $f^k = 0$ sicuramente il polinomio minimo divide x^k ma poichè $f^{k-1} \neq 0$ allora $q_f = x^k$.
Se esiste un autovalore $\lambda \neq 0$ allora $f(v) = \lambda v$ per qualche $v \in V$ non nullo, dunque $f^k(v) = \lambda^k v = 0$ se e solo se $\lambda^k = 0$ quindi $\lambda = 0$.
Se $k \neq 1$ il polinomio minimo non contiene solo fattori lineari dunque l'endomorfismo non è diagonalizzabile.
Se il polinomio caratteristico di una matrice è $\pm x^n$ allora per C-H deve essere $f^n = 0$ dunque f è nilpotente; viceversa se f è nilpotente il polinomio minimo è x^k per qualche k e poichè il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico e contiene tutti i suoi fattori irriducibili necessariamente il polinomio caratteristico è $\pm x^n$. Se K è algebricamente chiuso il polinomio caratteristico ha sempre n radici, che devono essere tutte nulle, dunque il polinomio caratteristico deve essere $\pm x^n$.

(Esempi di nilpotenti: la derivazione) Ad esempio la derivazione

$$\frac{d}{dx} : K[x]_{\leq 3} \to K[x]_{\leq 3}$$

ha polinomio minimo x^4 e rispetto alla base $\{6, 6x, 3x^2, x^3\}$ la sua matrice è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23. Trovare due matrici 4x4 nilpotenti dello stesso indice che non sono simili.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha che $A^2 = B^2 = 0$ dunque entrambe sono nilpotenti di indice 2 ma si vede facilmente che A e B non sono simili (non hanno nemmeno lo stesso rango).

24. Data $F \in M_{n,n}(K)$ sia

$$\begin{gathered} f : M_{n,n}(K) \to M_{n,n}(K) \\ A \to FA \end{gathered}$$

Dimostrare che il polinomio minimo di f coincide con il polinomio minimo di F.

Basta osservare che $p(f) = 0$ se e solo se $p(f)(A) = 0$ per ogni $A \in M_{n,n}(K)$ e

$$p(f)(A) = (\sum_{i=0}^{n} a_i f^i)(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i F^i \cdot A = (\sum_{i=0}^{n} a_i F^i) \cdot A = p(F) \cdot A$$

25. Considerare la matrice

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare se è diagonalizzabile, calcolare il polinomio caratteristico, il polinomio minimo, autovalori e relativi autospazi.

L'endomorfismo canonicamente associato ad A è l'endomorfismo tale che

$$e_i \to \sum e_k$$

per ogni i. Si vede allora che $rk(f) = 1$, $ker(f) = n - 1$.
In particolare

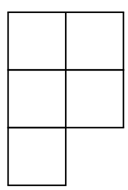
$$\sum e_i \to n \sum e_i$$

dunque $v = \sum e_k$ è autovettore di autovalore n mentre tutti i vettori del tipo $e_i - e_j$ vanno in zero dunque posso scegliere come base del nucleo i vettori $e_j - e_1$ per $j = 2, \ldots, n$.
Il polinomio caratteristico sarà $p = \lambda^{n-1}(n-\lambda)$ e poichè è diagonalizzabile il polinomio minimo deve essere libero da quadrati dunque $q = \lambda(n-\lambda)$

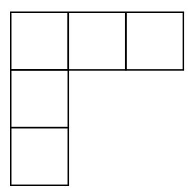
26. Sia A una matrice quadrata complessa tale che $A^3 = A^2$. Dimostrare che A^2 è sempre diagonalizzabile e mostrare con un esempio che A può non essere diagonalizzabile.

27. Sia A una matrice 6×6 con polinomio caratteristico $p(t) = t(t-1)^5$. Se il rango della matrice $A - I$ è 3, quali sono le possibili forme di Jordan di A? É possibile determinare univocamente la forma di Jordan di A conoscendo il polinomio minimo?

    La matrice ha autovalori 0 con molteplicità algebrica 1 e 1 con molteplicità algebrica 5. Poichè il rango della matrice $A-I$ è 3 l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica $6-3=3$ quindi la matrice non è diagonalizzabile poichè $m_a(1) = 5 > m_g(1) = 3$. Ci sono tre blocchi di Jordan relativi all'autovalore 1 ed in tutto l'autospazio generalizzato ha dimensione 5. I possibili diagrammi di Young relativi all'autovalore 1 sono

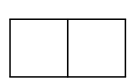
    oppure

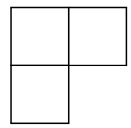
    che corrispondono alle corrispondenti forme di Jordan. Nel primo caso il polinomio minimo è $x(x-1)^2$ e nel secondo $x(x-1)^3$ quindi in questo caso conoscendo il polinomiio minimo possiamo identificare univocamente la forma di Jordan.

28. Sia A una matrice con pol. caratteristico $p(t) = (t-1)^2(t-2)^3$. Se l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 1 e l'autovalore 2 ha molteplicità geometrica 2, qual è la forma di Jordan di A?

    La matrice ha autovalori 1 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 3. Abbiamo $m_a(1) = 2 > m_g(1) = 1$ quindi per l'autovalore 1 l'unico possibile diagramma di Young è

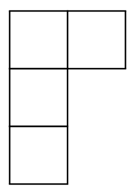
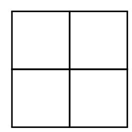
    

Inoltre $m_a(2) = 3 > m_g(2) = 2$ quindi per l'autovalore 2 l'unico possibile diagramma di Young è



29. Determinare, se possibile, due matrici a coefficienti complessi che abbiano stesso polinomio minimo e stesso polinomio caratteristico ma che non siano simili.

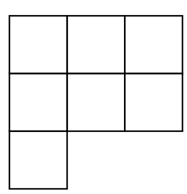
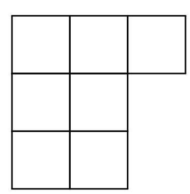
    Possiamo considerare due matrici nilpotenti associate ai seguenti diagrammi di Young

    In entrambi i casi il polinomio minimo è $q(x) = x^2$ ma nel primo caso $m_g(0) = 3$ e nel secondo $m_g(0) = 2$.

30. Determinare, se possibile, due matrici a coefficienti complessi che abbiano stesso polinomio minimo, stesso polinomio caratteristico e stesse molteplcità geometiche degli autovalori ma che non siano simili.

    Possiamo considerare due matrici nilpotenti associate ai seguenti diagrammi di Young

31. Sia V uno s.v. di dimensione finita e siano $F, G \in End(V)$ due endomorfismi che commutano tra loro. Dimostrare che se F è diagonalizzabile e G è nilpotente esiste una base di autovettori di F rispetto alla quale la matrice di G è triangolare.

    Poichè le matrici commutano abbiamo che G preserva gli autospazi di F cioè se V_λ è un autospazio di F relativo all'autovalore λ allora se $v \in V_\lambda$

$$F(G(v)) = G(F(v)) = G(\lambda v) = \lambda G(v)$$

cioè $G(v) \in V_\lambda$. Dunque possiamo restringere G a V_λ e la sua restrizione è ancora triangolabile. Così per ogni autospazio di F. Ma poichè F è diagonalizzabile V è somma diretta degli autospazi di F, dunque G è triangolabile su V.

32. Determinare la forma canonica di Jordan associata alle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e determinare le matrici di cambio di base.

A) Nel caso della matrice A abbiamo $p_A = (1-t)^2$ dunque $m.a.(1) = 2$. In questo caso $m.g.(1) = 1$ e calcolando una base per l'autospazio si vede che

$$V_1 = ker(A - I) = span(e_1)$$

Calcoliamo dunque

$$V_1^2 = ker(A - I)^2 = span(e_1, e_2)$$

ottenendo la bandiera $V_1 \subset V_1^2$

Se vogliamo una base di Jordan (v_1, v_2) scegliamo

$$v_2 \in V_1^2 \setminus V_1$$

e prendiamo

$$v_1 = (A - I)v_2 \in V_1$$

Ad esempio scegliendo $v_2 = e_2$ dobbiamo prendere $v_1 = (2, 0)$.

B) Nel caso della matrice B abbiamo $p_B = (1-t)^2(2-t)$ dunque $m.a.(1) = 2$, $m.a.(2) = 1$. Dunque certamente $m.g.(2) = 1$ e possiamo calcolare una base di $V_2 = span(e_3)$. In questo caso $m.g.(1) = 1$ e calcolando una base per l'autospazio si vede che

$$V_1 = ker(A - I) = span(e_1 - e_2)$$

Calcoliamo dunque

$$V_1^2 = ker(A-I)^2 = span(e_1, e_2)$$

ottenendo la bandiera $V_1 \subset V_1^2$

Se vogliamo una base di Jordan (v_1, v_2) per l'autospazio generalizzato V_1^{gen} scegliamo

$$v_2 \in V_1^2 \setminus V_1$$

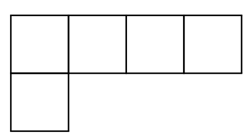
e prendiamo

$$v_1 = (A-I)v_2 \in V_1$$

Ad esempio scegliendo $v_2 = e_2$ dobbiamo prendere $v_1 = e_1 - e_2$.

33. La matrice B è una matrice 5x5 con 3 come unico autovalore. I ranghi delle potenze sono i seguenti: $B-3I$ ha rango 3, $(B-3I)^2$ ha rango 2, $(B-3I)^3$ ha rango 1 e $(B-3I)^4 = 0$. Qual è la forma di Jordan associata a B?

    Poichè $B-3I$ ha rango 3, $ker(B-3I) = V_3$ ha dimensione 5-3=2 (che è la molteplicità geometrica dell'autovalore 3.
    Poichè $(B-3I)^2$ ha rango 2, $ker(B-3I)^2 = V_3^2$ ha dimensione 5-2=3, quindi la dimensione aumenta di 1 rispetto al precedente.
    Poichè $(B-3I)^3$ ha rango 1, $ker(B-3I)^2 = V_3^2$ ha dimensione 5-1=4, quindi la dimensione aumenta di 1 rispetto al precedente.
    Poichè $(B-3I)^4$ ha rango 0, $ker(B-3I)^2 = V_3^2$ ha dimensione 5, quindi la dimensione aumenta di 1 rispetto al precedente.
    Il diagramma di Young associato sarà

34. Dimostrare che se $F \subset K$ è un sottocampo di un campo K e $v_1, \ldots, v_k \in F^n$ sono vettori linearmente indipendenti di F^n su F allora sono linearmente indipendenti anche come vettori in K^n su K.
    Però non è vero che se V è uno spazio vettoriale su F e su K e $w_1, \ldots, w_k$ sono linearmente indipendenti su F allora sono anche linearmente indipendenti su K.

35. Dimostrare che se $F \subset K$ è un sottocampo di un campo K e $f, g \in F[x]$ allora $MCD_{F[x]}(f, g) = MCD_{K[x]}(f, g)$.