Tutorato Geometria e Algebra 2 - A.A. 2024-25
Marco Trozzo

ALGEBRA LINEARE

1. Delle seguenti matrici dire quali sono triangolabili su $\mathbb{Q}$, quali su $\mathbb{R}$ e quali su $\mathbb{C}$:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 3 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

   Basta calcolare il polinomio caratteristico delle matrici e verificare se tutti gli autovalori sono in $\mathbb{Q}$, rispettivamente in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$.

2. Siano A una matrice quadrata triangolabile e k un intero positivo. Provare che il polinomio caratteristico di A^k dipende solo da k e dal polinomio caratteristico di A.

   Se A è triangolabile vuol dire che A è simile ad una matrice triangolare T, cioè $A = PTP^{-1}$ quindi il polinomio caratteristico di A è uguale al polinomio caratteristico di T, che poichè T è triangolare è semplicemente

$$p(t) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - t_{ii})$$

   Si ha che per ogni k $A^k = PT^kP^{-1}$ infatti

$$A^k = (PTP^{-1})(PTP^{-1}) \ldots PTP^{-1} = PT^kP^{-1}$$

   quindi il polinomio caratteristico di A^k è uguale al polinomio caratteristico di T^k che è

$$s(t) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - t_{ii}^k)$$

3. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice triangolabile con tutti gli autovalori negativi. Provare che se n è dispari, allora non esiste alcuna matrice $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che $B^2 = A$.

   Se A è triangolabile vuol dire che A è simile ad una matrice triangolare T, cioè $A = PTP^{-1}$ quindi il determinante di A è uguale al determinante di T, che poichè T è triangolare è semplicemente

$$det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$$

dove $t_{ii} < 0$ per ogni i. Quindi essendo n dispari $det(T) < 0$.
Allora se fosse $B^2 = A$ avremmo per assurdo

$$det(B)^2 = det(A) = det(T) < 0$$

4. Sia $f \in End(V)$ un endomorfismo tale che $f^2 = f^3$. Mostrare che per ogni sottospazio f-invariante non nullo $U \subseteq V$ gli endomorfismi $f \in End(U)$ e $f - I \in End(U)$ non possono essere entrambi invertibili e dedurre che f è triangolabile.

   Per ogni sottospazio U f-invariante posso considerare le restrizioni f e $f - I$ ad U. Dall'uguaglianza abbiamo che

   $$f^2(f - I) = 0$$

   che tradotto in termini matriciali diventa $A(A - I) = 0$, dove A è la matrice associata ad f rispetto ad una base qualsiasi. Quindi

   $$det(A) \cdot det(A - I) = 0$$

   quindi almeno una tra A e A-I non è invertibile.
   Ma allora esiste almeno un vettore $u \in U$ che sta in $Ker(A) = V_0$ (autospazio dell'autovalore 0), oppure in $Ker(A - I) = V_1$ (autospazio dell'autovalore 1).
   Quindi ogni sottospazio f-invariante ha almeno un autovettore, quindi A è triangolabile.

5. Sia V un K-spazio vettoriale e $W \subset V$ un suo sottospazio vettoriale e sia $\pi : V \to V/W$ la proiezione sul quoziente. Determinare $Ker(\pi)$, $Im(\pi)$ e per quali $[v] \in V/W$ $\pi^{-1}([v])$ è un sottospazio vettoriale. Mostrare che per ogni U sottospazio di V si ha che:

   (a) U/W è un sottospazio vettoriale di V/W
   (b) $U/W = \pi(U)$ e se $W \subseteq U$ $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$
   (c) c'è una corrispondenza biunivoca tra i sottospazi vettoriali di V/W e i sottospazi di V che contengono W

6. RIPASSO: Se consideriamo

   $$\begin{aligned} v_{\sqrt{2}} : \mathbb{Q}[x] &\to \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ p(x) &\to p(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

$I = Ker(v_{\sqrt{2}}) = (p_{\sqrt{2}})$ è un ideale principale, dove $p_{\sqrt{2}}$ è il polinomio minimo di $\sqrt{2}$.
Quindi come ogni polinomio razionale che si annulla in 2 è divisibile per $(x-2)$, così ogni polinomio razionale che si annulla in $\sqrt{2}$ è divisibile per $p_{\sqrt{2}}$.

Per valutare un polinomio di $K[t]$ in un elemento x devo poter calcolare:

- x^n, i.e. moltiplicare un elemento per se stesso (ad esempio un anello, non necessariamente commutativo);
- cx con $c \in K$, i.e. moltiplicare per uno scalare (ad esempio uno spazio vettoriale);
- $cx^m + bx^n$, i.e. sommare due elementi (ad esempio uno spazio vettoriale).

Un insieme che è uno spazio vettoriale ma anche un anello si dice una K-algebra. Ad esempio $M_{n,n}(K)$ e $End(V)$.

Se consideriamo $A \in M_{n,n}(K)$ (o equivalentemente $f \in End(V)$

$$\begin{aligned} v_A : \mathbb{Q}[x] &\to M_{n,n}(K) \\ p(x) &\to p(A) \end{aligned}$$

$I = Ker(v_A) = (p_A)$ è un ideale principale, dove p_A è il polinomio minimo di A.
Quindi ogni polinomio razionale che si annulla in A è divisibile per p_A.

7. Verificare C-H per la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   Il polinomio caratteristico di A è $t^2 - 4t + 5$. Per C-H abbiamo che $A^2 - 4A + 5I = 0$, cioè $A^2 = 4A - 5I$, uguaglianza che è facile verificare.

8. Determinare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo delle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

   Le tre matrici hanno come polinomio caratteristico $(\alpha - \lambda)^3$. Poichè il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico e contiene tutti

i suoi fattori irriducibili il polinomio minimo deve essere della forma $(\lambda - \alpha)^k$ dove $1 \leq k \leq 3$. A è diagonalizzabile quindi $q_A = \lambda - \alpha$ poichè è libero da quadrati.
Nel caso della matrice B si vede che $(B - \lambda I) \neq 0$ ma $(B - \lambda I)^2 = 0$ dunque $q_B = (\lambda - \alpha)^2$ mentre nel terzo caso analogamente si vede che $q_C = (\lambda - \alpha)^3$.

9. Se $A \in M_{2,2}(K)$ il polinomio caratteristico è

$$x^2 - tr(A)x + det(A)$$

quindi per C-H si ha che $A^2 - tr(A)A + det(A) = 0$. Dimostrare che quindi tutte le potenze A^n e A^{-n} (se $\det(A) \neq 0$) si esprimono come combinazione lineare di I e di A.

Chiamiamo $t = tr(A)$ e $d = det(A)$. Poichè $A^2 - tA + dI = 0$ si ha che $A^2 = tA - dI$. Quindi

$$A^3 = A \cdot (tA - dI) = tA^2 - dA = t(tA - dI) - dA = (t^2 - d)A - dtI$$

e analogamente per tutte le potenze di A.
D'altra parte poichè $A^2 - tA + dI = 0$ abbiamo $A^2 - tA = -dI$ cioè

$$A(A - tI) = -dI$$

Quindi $A^{-1} = -\frac{1}{d}(A - tI)$ ed analogamente tutte le sue potenze.

10. Determinare per ciascuno dei seguenti polinomi una matrice che abbia quello come polinomio minimo
$(t - 2)(t - 3)$
$(t - 2)^2(t - 3)$
$(t - 2)^2(t - 3)^2$

11. Dimostrare che se due matrici sono simili hanno lo stesso polinomio minimo.

Sia $A = C^{-1}BC$. Si ha che per ogni n $A^n = C^{-1}B^nC$ infatti

$$A^n = (C^{-1}BC)(C^{-1}BC)\dots C^{-1}BC = C^{-1}B^nC$$

quindi per ogni ogni polinomio $p(A) = C^{-1}p(B)C$. Chiamiamo p_A e p_B i polinomi minimi. Poichè $p_B(A) = C^{-1}p_B(B)C = 0$ il polinomio p_B annulla A e quindi $p_A|p_B$. Ma analogamente anche $p_A|p_B$ ed essendo polinomi monici $p_A = p_B$.

12. Data

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcolare il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico e stabilire se è diagonalizzabile. Usando C-H calcolare A^3.

Il polinomio caratteristico è $p(t) = -t^3 + 3t - 2 = -(t-1)^2(t+2)$. Quindi ci sono due possibilità per il polinomio minimo $q(t)$:
- $q(t) = p(t)$ (il polinomio minimo non è libero da quadrati) se e solo se la matrice non è diagonalizzabile.
- $q(t) = (t-1)(t+2)$ (il polinomio minimo è libero da quadrati) se e solo se la matrice è diagonalizzabile.

Poichè la matrice non è diagonalizzabile siamo nel secondo caso.

Per calcolare A^3 possiamo utilizzare C-H infatti, essendo $p(t) = -t^3 + 3t - 2$ abbiamo che $-A^3 + 3A - 2I = 0$ cioè $A^3 = 3A - 2I$

13. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, consideriamo il sottospazio vettoriale

$$C_A = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \ : XA = AX\}$$

Dimostrare che dim (C_A)= dim(C_B) quando A e B sono simili.
Dimostrare che $C_A = span(1, A, \ldots, A^{n-1})$ quando il polinomio caratteristico di A è prodotto di n fattori lineari distinti.

Se $A = C^{-1}BC$ allora se $X \in C_A$

$$XC^{-1}BC = C^{-1}BCX$$
$$CXC^{-1}B = BCXC^{-1}$$

Abbiamo che $X' = CXC^{-1} \in C_B$ quindi il coniugio per C manda A in B e manda C_B in C_A.
Se A è diagonalizzabile con autovalori distinti allora A è simile ad una matrice diagonale D con elementi diagonali distinti. Si vede facilmente (eheh, dicono tutti così) che C_D è costituito dalle matrici diagonali ed ha dunque dimensione n. Quindi $dim(C_A) = dim(C_D) = n$. Poichè $1, A, \ldots, A^{n-1} \in C_A$ e sono linearmente indipendenti (perchè? in questo caso il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico...) esse costituiscono una base.

14. (idemopotenti) Dimostare che qualsiasi $f \in End(V)$ idemopotente, i.e. tale che
$$f^2 = f$$
è diagonalizzabile e se $f \neq 0$ e $f \neq Id$ allora ha polinomio minimo $x(x-1)$ e $Sp(f) = \{0, 1\}$.
In particolare per gli endomorfismi idempotenti $Tr(f) = rk(f)$.

Il polinomio $p(x) = x^2 - x$ è tale che $p(f) = 0$, quindi se p_m è il polinomio minimo di f si ha che $p_m | p$. Dunque ci sono tre possibilità: $p_m = x, x-1, x(x-1)$. In tutti i casi il polinomio minimo si decompone in fattori lineari distinti dunque f è diagonalizzabile.
Se $p_m = x$ allora $f = 0$.
Se $p_m = x - 1$ allora $f = Id$.
Se $p_m = x(x-1)$ allora $V = V_0 \oplus V_1$.

(Esempi di idempotenti: proiezioni) Se consideriamo
$$pr : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$
$Sp(pr) = \{0, 1\}$ e $V_1 = span(e_1, \dots, e_k)$, $V_0 = span(e_{k+1}, \dots, e_n)$.
Se ho un piano π s.s.v. di $\mathbb{R}^3$ con $\pi = span(v_1, v_2)$ e $\pi^\perp = span(v_3)$ la proiezione ortogonale su π è l'applicazione $pr_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $pr_\pi(v_1) = v_1$, $pr_\pi(v_2) = v_2$, $pr_\pi(v_3) = 0$ quindi $V_1 = \pi$ e $V_0 = \pi^\perp$.

15. (involuzioni) Dimostare che qualsiasi $f \in End(V)$ che sia un'involuzione, i.e. tale che
$$f^2 = I$$
è diagonalizzabile e se $f \neq \pm Id$ allora ha polinomio minimo $(x+1)(x-1)$ e $Sp(f) = \{1, -1\}$.

Il polinomio $p(x) = x^2 - 1$ è tale che $p(f) = 0$, quindi se p_m è il polinomio minimo di f si ha che $p_m | p$. Dunque ci sono tre possibilità: $p_m = x+1, x-1, (x+1)(x-1)$. In tutti i casi il polinomio minimo si decompone in fattori lineari distinti dunque f è diagonalizzabile.
Se $p_m = x + 1$ allora $f = -Id$.
Se $p_m = x - 1$ allora $f = Id$.
Se $p_m = x(x-1)$ allora $V = V_{-1} \oplus V_1$.

(Esempi di involuzioni: riflessioni) Se consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la riflessione rispetto al piano π, allora $V_1 = \pi$ e $V_{-1} = \pi^\perp$.

(Esempi di involuzioni: trasposizione di una matrice) Se consideriamo

$$\begin{gathered} M_{n,n}(K) \to M_{n,n}(K) \\ A \to A^T \end{gathered}$$

In questo caso $V_1 = Sym_n(K) = span(e_{11}, e_{22}, \ldots, e_{nn}, e_{12} + e_{21} \ldots)$ che ha dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.

Invece $V_{-1} = Skew_n(K) = span(e_{12} - e_{21} \ldots)$ che ha dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$.

16. Più in genereale qualsiasi $f \in End(V)$ tale che

$$f^3 = f$$

è diagonalizzabile e se f non è un'involuzione né idempotente allora ha polinomio minimo $x(x+1)(x-1)$ e $Sp(f) = \{0, 1, -1\}$.

Intanto osserviamo che idempotenti e involuzioni sono casi particolari di questo ultimo; il polinomio $p(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ è tale che $p(f) = 0$, quindi se p_m è il polinomio minimo di f si ha che $p_m | p$. Dunque ci sono le seguenti possibilità: $p_m = x, x-1, x+1, x(x-1), x(x+1), (x-1)(x+1), x(x-1)(x+1)$. In tutti i casi il polinomio minimo si decompone in fattori lineari distinti dunque f è diagonalizzabile.
Se $p_m = x$ allora $f = 0$.
Se $p_m = x - 1$ allora $f = Id$.
Se $p_m = x + 1$ allora $f = -Id$.
Se $p_m = x(x-1)$ allora f è idempotente e $V = V_0 \oplus V_1$.
Se $p_m = x(x+1)$ allora analogamente $V = V_0 \oplus V_{-1}$.
Se $p_m = (x-1)(x+1)$ allora f è un'involuzione e $V = V_1 \oplus V_{-1}$.
Se $p_m = x(x-1)(x+1)$ allora $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_{-1}$.

17. (nilpotenti) Un endomorfismo $f \in End(V)$ tale che

$$f^k = 0 \quad (e\ f^{k-1} \neq 0)$$

si dice nilpotente di ordine k. Dimostrare che ha polinomio minimo x^k e $Sp(f) = \{0\}$. Se $k \neq 1$ non è diagonalizzabile.

Dimostrare che un endomorfismo f è nilpotente se e solo se il suo polinomio caratteristico è $\pm x^n$.
La condizione $Sp(f) = \{0\}$ è necessaria e se K è algebricamente chiuso è anche sufficiente.
Osservare che nel caso in cui K non è algebricamente chiuso la condizione non è sufficiente: potrebbe essere che $Sp(f) = \{0\}$ con f non nilpotente, ad es. una rotazione di un angolo $\theta \neq k\pi$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \theta & -sin\ \theta \\ 0 & sin\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix}$$

In ogni endomorfismo $f \in End(V)$, chiamando $V_i = Ker(N^i)$, si ha una filtrazione

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_m \subseteq V$$

tale che $N(V_i) \subset V_{i-1}$.
In generale si definisce radicale $Rad(f) = \bigcup V_i = V_m$.
Nel caso di un endomorfismo nilpotente di indice k si ha che $m = k$ e $V_k = V$, cioè $V = Rad(f)$.
Dimostrare che è quindi possibile trovare una base di V secondo la quale un endomorfismo nilpotente è rappresentato da una matrice triangolare superiore con la diagonale nulla.

Poichè $f^k = 0$ sicuramente il polinomio minimo divide x^k ma poichè $f^{k-1} \neq 0$ allora $q_f = x^k$.
Se esiste un autovalore $\lambda \neq 0$ allora $f(v) = \lambda v$ per qualche $v \in V$ non nullo, dunque $f^k(v) = \lambda^k v = 0$ se e solo se $\lambda^k = 0$ quindi $\lambda = 0$.
Se $k \neq 1$ il polinomio minimo non contiene solo fattori lineari dunque l'endomorfismo non è diagonalizzabile.
Se il polinomio caratteristico di una matrice è $\pm x^n$ allora per C-H deve essere $f^n = 0$ dunque f è nilpotente; viceversa se f è nilpotente il polinomio minimo è x^k per qualche k e poichè il polinomio minimo divide il polinomio caratteristico e contiene tutti i suoi fattori irriducibili necessariamente il polinomio caratteristico è $\pm x^n$. Se K è algebricamente chiuso il polinomio caratteristico ha sempre n radici, che devono essere tutte nulle, dunque il polinomio caratteristico deve essere $\pm x^n$.

(Esempi di nilpotenti: la derivazione) Ad esempio la derivazione

$$\frac{d}{dx} : K[x]_{\leq 3} \to K[x]_{\leq 3}$$

ha polinomio minimo x^4 e rispetto alla base $\{6, 6x, 3x^2, x^3\}$ la sua matrice è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

18. Trovare due matrici 4x4 nilpotenti dello stesso indice che non sono simili.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha che $A^2 = B^2 = 0$ dunque entrambe sono nilpotenti di indice 2 ma si vede facilmente che A e B non sono simili (non hanno nemmeno lo stesso rango).

19. Data $F \in M_{n,n}(K)$ sia

$$\begin{gathered} f : M_{n,n}(K) \to M_{n,n}(K) \\ A \to FA \end{gathered}$$

Dimostrare che il polinomio minimo di f coincide con il polinomio minimo di F.

Basta osservare che $p(f) = 0$ se e solo se $p(f)(A) = 0$ per ogni $A \in M_{n,n}(K)$ e

$$p(f)(A) = (\sum_{i=0}^{n} a_i f^i)(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^i(A) = \sum_{i=0}^{n} a_i F^i \cdot A = (\sum_{i=0}^{n} a_i F^i) \cdot A = p(F) \cdot A$$

Osserviamo che $p(F) \cdot A = 0$ per ogni $A \in M_{n,n}(K)$ se e solo se $p(F)$ è la matrice nulla.

20. Considerare la matrice

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare se è diagonalizzabile, calcolare il polinomio caratteristico, il polinomio minimo, autovalori e relativi autospazi.

L'endomorfismo canonicamente associato ad A è l'endomorfismo tale che

$$e_i \to \sum e_k$$

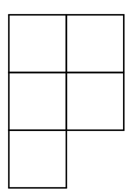
per ogni i. Si vede allora che $rk(f) = 1$, $ker(f) = n - 1$.
In particolare

$$\sum e_i \to n \sum e_i$$

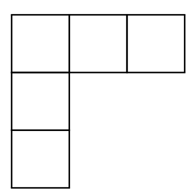
dunque $v = \sum e_k$ è autovettore di autovalore n mentre tutti i vettori del tipo $e_i - e_j$ vanno in zero dunque posso scegliere come base del nucleo i vettori $e_j - e_1$ per $j = 2, \ldots, n$.
Il polinomio caratteristico sarà $p = \lambda^{n-1}(n - \lambda)$ e poichè è diagonalizzabile il polinomio minimo deve essere libero da quadrati dunque $q = \lambda(n - \lambda)$

21. Sia A una matrice 6×6 con polinomio caratteristico $p(t) = t(t-1)^5$. Se il rango della matrice $A - I$ è 3, quali sono le possibili forme di Jordan di A? É possibile determinare univocamente la forma di Jordan di A conoscendo il polinomio minimo?

La matrice ha autovalori 0 con molteplicità algebrica 1 e 1 con molteplicità algebrica 5. Poichè il rango della matrice $A - I$ è 3 l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica $6 - 3 = 3$ quindi la matrice non è diagonalizzabile poichè $m_a(1) = 5 > m_g(1) = 3$. Ci sono tre blocchi di Jordan relativi all'autovalore 1 ed in tutto l'autospazio generalizzato ha dimensione 5. I possibili diagrammi di Young relativi all'autovalore 1 sono



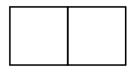
oppure



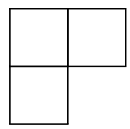
che corrispondono alle corrispondenti forme di Jordan. Nel primo caso il polinomio minimo è $x(x-1)^2$ e nel secondo $x(x-1)^3$ quindi in questo caso conoscendo il polinomiio minimo possiamo identificare univocamente la forma di Jordan.

22. Sia A una matrice con pol. caratteristico $p(t) = (t-1)^2(t-2)^3$. Se l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 1 e l'autovalore 2 ha molteplicità geometrica 2, qual è la forma di Jordan di A?

    La matrice ha autovalori 1 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 3. Abbiamo $m_a(1) = 2 > m_g(1) = 1$ quindi per l'autovalore 1 l'unico possibile diagramma di Young è

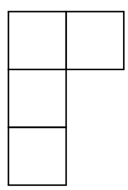
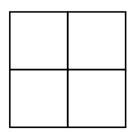
    

    Inoltre $m_a(2) = 3 > m_g(2) = 2$ quindi per l'autovalore 2 l'unico possibile diagramma di Young è

23. Determinare, se possibile, due matrici a coefficienti complessi che abbiano stesso polinomio minimo e stesso polinomio caratteristico ma che non siano simili.

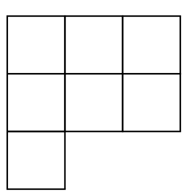
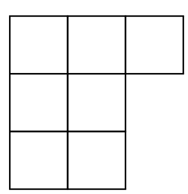
    Possiamo considerare due matrici nilpotenti associate ai seguenti diagrammi di Young

    In entrambi i casi il polinomio minimo è $q(x) = x^2$ ma nel primo caso $m_g(0) = 3$ e nel secondo $m_g(0) = 2$.

24. Determinare, se possibile, due matrici a coefficienti complessi che abbiano stesso polinomio minimo, stesso polinomio caratteristico e stesse molteplcità geometiche degli autovalori ma che non siano simili.

    Possiamo considerare due matrici nilpotenti associate ai seguenti diagrammi di Young

25. Determinare la forma canonica di Jordan associata alle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e determinare le matrici di cambio di base.

A) Nel caso della matrice A abbiamo $p_A = (1-t)^2$ dunque $m.a.(1) = 2$. In questo caso $m.g.(1) = 1$ e calcolando una base per l'autospazio si vede che

$$V_1 = ker(A - I) = span(e_1)$$

Calcoliamo dunque

$$V_1^2 = ker(A - I)^2 = span(e_1, e_2)$$

ottenendo la bandiera $V_1 \subset V_1^2$

Se vogliamo una base di Jordan (v_1, v_2) scegliamo

$$v_2 \in V_1^2 \setminus V_1$$

e prendiamo

$$v_1 = (A - I)v_2 \in V_1$$

Ad esempio scegliendo $v_2 = e_2$ dobbiamo prendere $v_1 = (2, 0)$.

B) Nel caso della matrice B abbiamo $p_B = (1 - t)^2(2 - t)$ dunque $m.a.(1) = 2$, $m.a.(2) = 1$. Dunque certamente $m.g.(2) = 1$ e possiamo calcolare una base di $V_2 = span(e_3)$. In questo caso $m.g.(1) = 1$ e calcolando una base per l'autospazio si vede che

$$V_1 = ker(A - I) = span(e_1 - e_2)$$

Calcoliamo dunque

$$V_1^2 = ker(A - I)^2 = span(e_1, e_2)$$

ottenendo la bandiera $V_1 \subset V_1^2$
Se vogliamo una base di Jordan (v_1, v_2) per l'autospazio generalizzato V_1^{gen} scegliamo

$$v_2 \in V_1^2 \setminus V_1$$

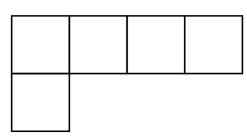
e prendiamo

$$v_1 = (A - I)v_2 \in V_1$$

Ad esempio scegliendo $v_2 = e_2$ dobbiamo prendere $v_1 = e_1 - e_2$.

26. La matrice B è una matrice 5x5 con 3 come unico autovalore. I ranghi delle potenze sono i seguenti: $B - 3I$ ha rango 3, $(B - 3I)^2$ ha rango 2, $(B - 3I)^3$ ha rango 1 e $(B - 3I)^4 = 0$. Qual è la forma di Jordan associata a B?

    Poichè $B - 3I$ ha rango 3, $ker(B - 3I) = V_3$ ha dimensione 5-3=2 (che è la molteplicità geometrica dell'autovalore 3.
    Poichè $(B - 3I)^2$ ha rango 2, $ker(B - 3I)^2 = V_3^2$ ha dimensione 5-2=3, quindi la dimensione aumenta di 1 rispetto al precedente.
    Poichè $(B - 3I)^3$ ha rango 1, $ker(B - 3I)^2 = V_3^2$ ha dimensione 5-1=4, quindi la dimensione aumenta di 1 rispetto al precedente.
    Poichè $(B - 3I)^4$ ha rango 0, $ker(B - 3I)^2 = V_3^2$ ha dimensione 5, quindi la dimensione aumenta di 1 rispetto al precedente.
    Il diagramma di Young associato sarà



27. (es.532 delle dispense) In un palazzo ci sono 10 appartamenti. In ognuno c'è almeno una persona. In otto diquesti appartamenti ci sono almeno 2 persone, in sei appartamenti ci sono almeno 4 persone ed in un appartamento ci sono 5 persone. Quante persone, come minimo, ospita il palazzo? E soprattutto: cosa diamine c'entra questo esercizio con la forma di Jordan!?

28. Sia V un K spazio vettoriale di dimensione n, con K algebricamente chiuso, e sia $\phi \in End(V)$. Dimostrare che

    (a) esiste un vettore ciclico per ϕ se e solo se il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico

    (b) in tal caso se $g \in End(V)$ commuta con ϕ allora esiste un polinomio tale che $g = p(\phi)$.

(a) In generale $deg(q_\phi) \leq deg(p_\phi)$ ma se $deg(q_\phi) < deg(p_\phi)$ allora $\phi^{n-1} \in span\{1, \phi, \ldots, \phi^{n-2}\}$ quindi non ci saranno vettori ciclici. Dunque se c'è un vettore ciclico, allora $deg(q_\phi) = deg(p_\phi)$ quindi essendo monici $q_\phi = p_\phi$ (ok, a meno del segno).

Viceversa se $q_\phi = p_\phi$ allora per ogni polinomio $r(x) = \sum a_i x^i$ di grado n-1 si ha che se $r(\phi) = 0$ allora il polinomio $r = 0$ cioè $a_i = 0$ per ogni i. Quindi se $\sum a_i \phi^i = 0$ allora $a_i = 0$ per ogni i, cioè $\{\phi^i\}_{i=0,\ldots,n-1}$ sono linearmente indipendenti e quindi esiste un vettore ciclico.

(b) Osserviamo che poichè $\{\phi^i\}_{i=0,\ldots,n-1}$ è una base avremo che

$$\begin{aligned} g(v) = c_0 v + c_1\phi(v) + \ldots + c_{n-1}\phi^{n-1}(v) = p(\phi)(v) \\ g(\phi(v)) = \phi(g(v)) = \phi(p(\phi)(v)) = p(\phi)(\phi(v)) \\ g(\phi^k(v)) = \phi^k(g(v)) = \phi^k(p(\phi)(v)) = p(\phi)(\phi^k(v)) \end{aligned}$$

cioè $g = p(\phi)$ dove $p(x) = \sum c_i x^i$

29. Sia A una matrice quadrata complessa tale che $A^3 = A^2$. Dimostrare che A^2 è sempre diagonalizzabile e mostrare con un esempio che A può non essere diagonalizzabile.

    Moltiplicando l'uguaglianza per A si ottiene $A^4 = A^2$ dunque la matrice A^2 è una matrice idempotente. A potrebbe non essere diagonalizzabile, ad esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

30. Sia V uno s.v. di dimensione finita e siano $F, G \in End(V)$ due endomorfismi che commutano tra loro. Dimostrare che se F è diagonalizzabile e G è nilpotente esiste una base di autovettori di F rispetto alla quale la matrice di G è triangolare.

    Poichè le matrici commutano abbiamo che G preserva gli autospazi di F cioè se V_λ è un autospazio di F relativo all'autovalore λ allora se $v \in V_\lambda$

$$F(G(v)) = G(F(v)) = G(\lambda v) = \lambda G(v)$$

cioè $G(v) \in V_\lambda$. Dunque possiamo restringere G a V_λ e la sua restrizione è ancora triangolabile. Così per ogni autospazio di F. Ma poichè F è diagonalizzabile V è somma diretta degli autospazi di F, dunque G è triangolabile su V.

31. Dimostrare che se $F \subset K$ è un sottocampo di un campo K e $v_1, \ldots, v_k \in F^n$ sono vettori linearmente indipendenti di F^n su F allora sono linearmente indipendenti anche come vettori in K^n su K.
Però non è vero che se V è uno spazio vettoriale su F e su K e $w_1, \ldots, w_k$ sono linearmente indipendenti su F allora sono anche linearmente indipendenti su K.

32. Dimostrare che se $F \subset K$ è un sottocampo di un campo K e $f, g \in F[x]$ allora $MCD_{F[x]}(f, g) = MCD_{K[x]}(f, g)$.