Tutorato Geometria e Algebra 2 - A.A. 2024-25
Marco Trozzo

FORME BILINEARI E FORME QUADRATICHE

1. Sia $b \in Bils(V)$ una forma bilineare simmetrica su V.
   Sia Rad(b)= $V^{\perp} = \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \ \forall w \in V\}$ il *radicale* di b.
   Sia I(b)= $\{v \in V \mid b(v, v) = 0\}$ il *cono isotropo* di b. Dimostrare che:
   (a) Rad(b) è un sottospazio vettoriale di V;
   (b) I(b) non è un sottospazio vettoriale di V ma contiene lo 0 ed è chiuso per moltiplicazione per scalari;
   (c) $Rad(b) \subset I(b)$.

2. Sia $b \in Bils(\mathbb{R}^3)$

$$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2$$

   Determinare se possibile
   (a) un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ isotropo tale che $dim(v^{\perp}) = 3$;
   (b) un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ non isotropo tale che $dim(v^{\perp}) = 2$;
   (c) un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ non isotropo tale che $dim(v^{\perp}) = 3$.

   Verificare che $w = (1, 1, 0)$ è isotropo e $dim(w^{\perp}) = 2$, calcolare $Rad(b)$ ed $I(b)$.

   La matrice associata a b rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) se $dim(v^{\perp}) = 3$ allora $v \in Rad(b)$ quindi necessariamente v è isotropo. Come vettore del radicale possiamo scegliere e_3.
   (b) Dalla matrice si vede subito che e_1 non è isotropo e $e_1^{\perp} = span(e_2, e_3)$;
   (c) se $dim(v^{\perp}) = 3$ allora $v \in Rad(b)$ quindi necessariamente v è isotropo, dunque un tale vettore non esiste.

Se $w = (1,1,0)$ si vede che

$$b(w,w) = w^T A w = 0$$

dunque w è isotropo. Inoltre $w^\perp$ è l'insieme dei vettori $v = (x,y,z)$ tali che $w^T A v = 0$ cioè

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

è il piano di equazione $\pi : \; x - y = 0$.
Inoltre $Rad(b) = Ker(A) = span(e_3)$ e $I(b)$ è l'insieme dei vettori $v = (x,y,z)$ tali che $v^T A v = 0$ cioè

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

dunque ha equazione $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0$ è una coppia di piani incidenti (che si intersecano esattamente nella retta $Rad(b)$).

3. Costruire tutte le matrici $H \in GL_2(\mathbb{R})$ tali che $HH^T = I$.

   Se prendiamo una generica matrice

$$H = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}$$

e chiamiamo $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ la condizione $HH^T = I$ equivale a

$$\begin{cases} v \cdot v = 1 \\ v \cdot w = 0 \\ w \cdot w = 1 \end{cases}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto scalare standard. Dunque $v \in \mathbb{R}^2$ è un generico vettore unitario e sarà della forma $(cos(t), sin(t))$ mentre w sarà un vettore unitario ortogonale (rispetto alla forma bilineare standard) a v quindi sarà $(-sin(t), cos(t))$ (o il suo opposto). Quindi

$$H = \begin{bmatrix} cos(t) & sin(t) \\ \mp sin(t) & \pm cos(t) \end{bmatrix}$$

4. Stabilire se è vero che il prodotto di due matrici reali simmetriche è una matrice simmetrica.

   Se A e B sono due matrici simmetriche oichè $(AB)^T = B^T A^T = BA$ quindi il prodotto è una matrice simmetrica se e solo se le due matrici commutano.

5. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $f, g \in V$ e

$$b(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

   Verificare che $b \in Bils(V)$ e, scelta una base per V, scrivere la matrice associata a b rispetto a tale base.

   La bilinerità deriva dalla linearità dell'integrale.
   Scegliendo come base $\{x^i\}_{i=0,\ldots,n}$ si ha che la matrice A sarà

$$a_{ij} = b(x^i, x^j) = \int_0^1 x^{i+j}dx = \left[\frac{x^{i+j+1}}{i+j+1}\right]_0^1 = \frac{1}{i+j+1}$$

   dunque

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{3} & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

6. Sia $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid tr(X) = 0\ \}$ e sia $b(X, Y) = tr(A^T B)$ una forma bilineare simmetrica su V. Determinare una base ortonormale di V rispetto a b e completarla ad una base ortonormale di $M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che rispetto a questa forma bilineare, data $P \in O(n)$, la funzione $f_P \in End(M_2(\mathbb{R}))$ definita da $f_P(A) = PAP^{-1}$ è un'isometria, cioè per ogni $A, B \in M_2(\mathbb{R})$

$$b(A, B) = b(f_P(A), f_P(B))$$

   Il sottospazio $V \subset M_2(\mathbb{R})$ ha dimensione 3 e possiamo scegliere come base le matrici

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E = E_{11} - E_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se A è la matrice associata alla forma b rispetto a tale base avremo

$$\begin{aligned}
a_{11} &= b(E_{12}, E_{12}) = tr(E_{12}^T E_{12}) = tr(E_{21}E_{12}) = 1 \\
a_{12} &= b(E_{12}, E_{21}) = tr(E_{12}^T E_{21}) = tr(E_{21}^2) = 0 \\
a_{13} &= b(E_{12}, E) = tr(E_{12}^T E) = tr(E_{21}E) = 0 \\
a_{22} &= b(E_{21}, E_{21}) = tr(E_{21}^T E_{21}) = tr(E_{12}E_{21}) = 1 \\
a_{23} &= b(E_{21}, E) = tr(E_{21}^T E) = tr(E_{12}E) = 0 \\
a_{33} &= b(E, E) = tr(E^T E) = tr(E^2) = tr(Id) = 2
\end{aligned}$$

quindi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La base è già ortogonale ma non è ortonormale perchè $b(E, E) = 2 \neq 1$ dunque basta sostituire l'elemento E con $\frac{1}{\sqrt{2}}E$.
Per completare ad una base di $M_2(\mathbb{R})$ possiamo aggiungere la matrice identità: verifichiamo se è ortogonale agli altri elementi della base:

$$\begin{aligned}
b(I, E_{12}) &= tr(E_{12}) = 0 \\
b(I, E_{21}) &= tr(E_{21}) = 0 \\
b(I, E) &= tr(E) = 0
\end{aligned}$$

Quindi aggiungendo la matrice identità otteniamo una base ortonormale. Per un motivo analogo al precedente per ottenere una base ortonormale dobbiamo sostituire I con $\frac{1}{\sqrt{2}}I$.

Poichè $P \in O(n)$ si ha che $P^T P = Id$ cioè $P^{-1} = P^T$ quindi

$$b(f_P(A), f_P(B)) = b(PAP^{-1}, PBP^{-1}) = tr((PAP^{-1})^T PBP^{-1})$$

$$= tr(PA^T P^T PBP^{-1}) = tr(PA^T BP^{-1}) = tr(A^T B) = b(A, B)$$

7. Determinare una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard del piano di $\mathbb{R}^3$ $\pi : \ x + y - z = 0$. Completare tale base ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

   Prendiamo una base di π $v_1 = (1, 0, -1)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$ e possiamo completarla ad una base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo $v_3 = e_3$. Questa non è una base ortogonale infatti rispetto a questa base la matrice del prodotto scalare standard è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo ottenere una base ortogonale w_1, w_2, w_3 prendendo $w_1 = v_1$ e

$$w_2 = v_2 - \frac{b(v_2, w_1)}{b(w_1, w_1)} w_1 = (0, 1, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$$

In questo modo w_1, w_2 costituisce una base ortogonale per il piano π (per renderla ortonormale basta normalizzare i vettori dividendoli per la loro norma).
Per completare ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ prendiamo

$$w_3 = v_3 - \frac{b(v_3, w_2)}{b(w_2, w_2)} w_2 - \frac{b(v_3, w_1)}{b(w_1, w_1)} w_1 =$$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

Notiamo che dall'equazione del piano vediamo che il vettore normale al piano è $n = (1, 1, -1)$ che infatti è un multiplo del nostro w_3.

8. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ con $n = 2$; dimostrare che $< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ è una forma bilineare simmetrica definita positiva, determinare la matrice associata secondo una base a scelta e calcolare $(x^2)^\perp$ e $x^\perp$.
Se $n > 2$ come diventa la matrice associata? La forma è ancora definita positiva?

Scegliendo come base $1, x, x^2$ la matrice associata è

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

che ha come polinomio caratteristico $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda + 4$.
Per il criterio dei minori principali è definita positiva; inoltre $x^2 = (0, 0, 1)$ quindi $(x^2)^\perp$ è dato da

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

quindi ha equazione cartesiana $x + z = 0$ dunque

$$(x^2)^\perp = span((1, 0, -1), (0, 1, 0)) = span(1 - x^2, x)$$

Analogamente $x^\perp = span((1, 0, 0), (0, 0, 1)) = span(1, x^2)$.
Inoltre $q(v) = b(v, v) = p^2(0) + p^2(-1) + p^2(1) \geq 0$ e $q(v) = 0$ se e solo se $p(0) = p(-1) = p(1) = 0$ che per $n = 2$ è equivalente a $p = 0$ ma non nel caso $n > 2$. In tal caso la forma è solamente semidefinita positiva e la matrice associata A è tale che $a_{ij} = 2$ se i+j è pari e 0 altrimenti.

9. Sia V un K-spazio vettoriale e $b \in Bils(V)$. Un sottospazio vettoriale $U \subset I(b)$ è detto *sottospazio isotropo*. Dimostrare che U è un sottospazio isotropo se e solo se $U \subset U^\perp$ e che nel caso di b non degenere se U è un sottospazio isotropo

$$dim(U) \leq \frac{1}{2} dim(V)$$

10. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ e $b \in Bils(V)$ non degenere con segnatura $(n, 1)$. Dimostrare che la massima dimensione di un sottospazio isotropo di V è 1.

11. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ dimostrare che $q(f) = f(0)^2$ è una forma quadratica, calcolare la forma bilineare simmetrica associata e trovare una base ortogonale rispetto a tale forma bilineare. Qual è la massima dimensione di un sottospazio isotropo?

    La forma bilineare simmetrica associata è $b(p, q) = p(0)q(0)$ e la matrice associata rispetto alla base $\{x^i\}$ è E_{00}.
    Il sottospazio $V = span(x^j \ j > 0)$ di dimensione n è un sottospazio isotropo. Non può esistere un sottospazio isotropo di dimensione maggiore perchè b non è la forma nulla.

12. Dimostrate che se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare standard, allora la matrice $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} =< u_i, v_j >$ è una matrice ortogonale.

13. Sia b un prodotto scalare su V. Fissato un sottospazio W, dimostrare che ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = w + w'$ con $w \in W$ e $w' \in W^\perp$ e che vale il *teorema di Pitagora*

$$b(v, v) = b(w, w) + b(w', w')$$

14. Verificare che il determinante è una forma quadratica su $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne rango e segnatura.

    In coordinate $det(a, b, c, d) = ad - bc$ quindi la matrice associata è

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    che ha due autovalori positivi e due negativi quindi il rango è 4 e la segnatura è (2,2).

15. Verificare che il discriminante $\Delta(x, y, z) = y^2 - 4xz$ è una forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ e calcolarne rango e segnatura. [La risposta è (2,1)]. Chi è il cono isotropo?

    La matrice associata è

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    che ha due autovalori positivi e uno negativo quindi il rango è 3 e la segnatura è (2,1).
    Identificando $\mathbb{R}^3$ con lo spazio dei polinomi reali di grado al massimo 2 il cono di equazione $x^2 - 4xz = 0$ corrisponde ai polinomi con una radice reale.

16. Sia $c \in \mathbb{R}$ una costante positiva, consideriamo la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ $q(t, x, y, z) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ e siano A la matrice canonicamente associata e b la corrispondente forma bilineare simmetrica. Determinare rango, segnatura, una base ortonormale $\mathcal{B}$ e determinare la scrittura di un vettore $s \in \mathbb{R}^4$ in tale base e la matrice G associata a q rispetto a tale base.
    In questo caso q è detta *forma di Minkowski* e il cono isotropo è anche detto dai fisici in modo molto suggestivo *cono di luce*.

    In questo caso

$$A = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dunque q ha rango 4 e segnatura (1,3). Per ottenere una base ortonormale bisogna rinormalizzare e_1 sostituendolo con $e'_1 = \frac{e_1}{c}$ e otteniamo così $\mathcal{B} = \{e'_1, e_2, e_3, e_4\}$.
Dunque $s = (t, x, y, z)_{\mathcal{C}} = (ct, x, y, z)_{\mathcal{B}}$ e $G = Diag(1, -1, -1, -1)$.

17. Sia $v \in \mathbb{R}$ con $v \in (-c, c)$. Definiamo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ detto a volte *fattore di Lorentz*. Dimostrare che $A \in End(\mathbb{R}^4)$

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è un'isometria per la forma di Minkowski, cioè $A^T G A = G$ (o equivalentemente $A^{-1} = GA^T G$).
Verificare che le matrici che soddisfano tale equazione costituiscono un gruppo (detto $O(1, 3)$).

18. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione 2 e $b \in Bils(V)$ una forma bilineare simmetrica non degenere su V che ammette un vettore isotropo non nullo. La coppia (V, b) è detta *piano iperbolico*.
- Calcolare la segnatura di b.
- Dimostrare che esiste una base di V $\{v_1, v_2\}$ di vettori isotropi tali che $b(v_1, v_2) = 1$. Tale base è detta *base iperbolica*.
- Dimostrare che

$$\beta(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1 \qquad \gamma(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

sono forme iperboliche su K^2 e trovare per ciascuna di esse una base iperbolica ed una diagonalizzante.

La segnatura di b deve essere (1,1) perchè altrimenti sarebbe definita e non ammetterebbe vettori isotropi. Prendo come v_1 il vettore isotropo di cui è assicurata l'esistenza. Poichè b è non degenere esiste w tale che $b(v_1, w) \neq 0$ e non è restrittivo supporre $b(v_1, w) = 1$. Se w è isotrpo ho finito altrimenti se $b(w, w) \neq 0$ pongo $v_2 = w + tv_1$ allora

$$b(v_2, v_2) = b(w, w) - 2t$$

quindi scegliendo $t = -\frac{b(w,w)}{2}$ risulta v_2 isotropo e $b(v_1, v_2) = 1$.