Tutorato Geometria 1B - A.A. 2022-23
Marco Trozzo

ALGEBRA LINEARE

1. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ è un campo.
2. Dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e più in generale $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$ per ogni p primo.
3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Dimostrare che è un $\mathbb{Q}$-s.v. di dimensione 4. Se chiamiamo $u = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ calcolare il polinomio minimo di u. Possiamo scegliere come base dello s.v. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ ma anche $\{1, u, u^2, u^3\}$. Calcolare la matrice di cambio base.
4. RIPASSO: Se consideriamo

$$\begin{gathered} v_{\sqrt{2}} : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ p(x) \to p(\sqrt{2}) \end{gathered}$$

$I = Ker(v_{\sqrt{2}}) = (p_{\sqrt{2}})$ è un ideale principale, dove $p_{\sqrt{2}}$ è il polinomio minimo di $\sqrt{2}$.
Quindi come ogni polinomio razionale che si annulla in 2 è divisibile per $(x-2)$, così ogni polinomio razionale che si annulla in $\sqrt{2}$ è divisibile per $p_{\sqrt{2}}$.

Per valutare un polinomio di $K[t]$ in un elemento x devo poter calcolare:

- x^n, i.e. moltiplicare un elemento per se stesso (ad esempio un anello, non necessariamente commutativo);
- cx con $c \in K$, i.e. moltiplicare per uno scalare (ad esempio uno spazio vettoriale);
- $cx^m + bx^n$, i.e. sommare due elementi (ad esempio uno spazio vettoriale).

Un insieme che è uno spazio vettoriale ma anche un anello si dice una K-algebra. Ad esempio $M_{n,n}(K)$ e $End(V)$.

Se consideriamo $A \in M_{n,n}(K)$ (o equivalentemente $f \in End(V)$)

$$\begin{gathered} v_A : \mathbb{Q}[x] \to M_{n,n}(K) \\ p(x) \to p(A) \end{gathered}$$

$I = Ker(v_A) = (p_A)$ è un ideale principale, dove p_A è il polinomio minimo di A.
Quindi ogni polinomio razionale che si annulla in A è divisibile per p_A.

5. Consideriamo K=$\mathbb{Q}[x]/(x^4-2)$:
   (a) dimostrare che K è un campo;
   (b) determinare la matrice associata alla moltiplicazione per $[x^2]$ rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

6. Consideriamo $\mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$:
   - trovare l'inverso di $[x+1]$;
   - trovare il rappresentante di $[x^4-1]$ di grado < 2;
   - determinare la matrice associata alla moltiplicazione per x rispetto alla base $\{1, x\}$;
   - verificare che $[x]$ è una radice di x^2+x+1;

7. Verificare C-H per la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

8. Determinare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo delle seguenti matrici

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

9. Se $A \in M_{2,2}(K)$ il polinomio caratteristico è

$$t^2 - tr(A)t + det(A)$$

   quindi per C-H si ha che $A^2 - tr(A)A + det(A) = 0$. Dimostrare che quindi tutte le potenze A^n e A^{-n} (se $\det(A) \neq 0$) si esprimono come combinazione lineare di I e di A.

10. Determinare per ciascuno dei seguenti polinomi una matrice che abbia quello come polinomio minimo
    $(t-2)(t-3)$
    $(t-2)^2(t-3)$
    $(t-2)^2(t-3)^2$

11. Dimostrare che se due matrici sono simili hanno lo stesso polinomio minimo

12. Data
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Calcolare il polinomio minimo ed il polinomio caratteristico e stabilire se è diagonalizzabile. Usando C-H calcolare A^3.

13. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, consideriamo il sottospazio vettoriale
$$C_A = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \ : XA = AX\}$$
Dimostrare che dim (C_A)= dim(C_B) quando A e B sono simili. Dimostrare che $C_A = span(1, A, \dots, A^{n-1})$ quando il polinomio caratteristico di A è prodotto di n fattori lineari distinti.

14. Sia V un K spazio vettoriale di dimensione n, con K algebricamente chiuso, e sia $\phi \in End(V)$. Dimostrare che
    (a) esiste un vettore ciclico per ϕ se e solo se il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico
    (b) in tal caso se $g \in End(V)$ commuta con ϕ allora esiste un polinomio tale che $g = p(\phi)$.

15. Risolvere l'equazione complessa $z^4 = \overline{z}$

16. Dimostrare che il coniugio è $\mathbb{R}$-lineare ma non $\mathbb{C}$-lineare.

17. $\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$ con $p_i = x^2 + 1$.

    Equivalentemente se V è uno s.v. reale di dim 2, allora un $J \in End(V)$ tale che $J^2 + I = 0$ si dice struttura complessa su V.
    Il polinomio minimo di J è $x^2 + 1$, J non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
    Per ogni vettore non nullo $v \in V$ si ha che $\{v, Jv\}$ è una base per V e rispetto a questa base
$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
    Si può diagonalizzare su $\mathbb{C}$: trovare autovalori ed autospazi. Verificare che un endomorfismo reale $f : \ V \to V$ dello spazio reale di dimensione

2 è un endomorfismo complesso dello spazio V munito della struttura J se e solo se commuta con J, i. e. $AJ = JA$.

Curiosità: l'Upside Down. Se V è uno spazio vettoriale complesso si può definire lo spazio vettoriale coniugato $\overline{V}$: come gruppo additivo coincide con V ma la moltiplicazione per scalari è "la coniugata", cioè

$$cv = \overline{c} \cdot v \ , \ c \in \mathbb{C}$$

(dove a sinistra si intende la moltiplicazione in $\overline{V}$ e a destra la moltiplicazione in V). Se V e W sono spazi vettoriali complessi una funzione $f : V \to W$ si dice antilineare se

$$f(v + v') = f(v) + f(v') \qquad f(cv) = \overline{c}v \ , \ c \in \mathbb{C}$$

cioè se è una mappa lineare $f : \overline{V} \to W$.
Lo spazio $\overline{V}$ si può costruire partendo dallo stesso spazio reale V di dimensione 2 ma scegliendo come struttura complessa $J \in End(V)$ la struttura coniugata.

18. (es.532 delle dispense) In un palazzo ci sono 10 appartamenti. In ognuno c'è almeno una persona. In otto diquesti appartamenti ci sono almeno 2 persone, in sei appartamenti ci sono almeno 4 persone ed in un appartamento ci sono 5 persone. Quante persone, come minimo, ospita il palazzo? E soprattutto: cosa diamine c'entra questo esercizio con la forma di Jordan!?

19. (idemopotenti) Dimostare che qualsiasi $f \in End(V)$ idemopotente, i.e. tale che
$$f^2 = f$$
è diagonalizzabile e se $f \neq 0$ e $f \neq Id$ allora ha polinomio minimo $x(x-1)$ e $Sp(f) = \{0, 1\}$.
In particolare per gli endomorfismi idempotenti $Tr(f) = rk(f)$.

(Esempi di idempotenti: proiezioni) Se consideriamo

$$pr : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

$Sp(pr) = \{0, 1\}$ e $V_1 = span(e_1, \ldots, e_k)$, $V_0 = span(e_{k+1}, \ldots, e_n)$.
Se ho un piano π s.s.v. di $\mathbb{R}^3$ con $\pi = span(v_1, v_2)$ e $\pi^\perp = span(v_3)$ la proiezione ortogonale su π è l'applicazione $pr_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $pr_\pi(v_1) = v_1$, $pr_\pi(v_2) = v_2$, $pr_\pi(v_3) = 0$ quindi $V_1 = \pi$ e $V_0 = \pi^\perp$.

20. (involuzioni) Dimostare che qualsiasi $f \in End(V)$ che sia un'involuzione, i.e. tale che
$$f^2 = I$$
è diagonalizzabile e se $f \neq \pm Id$ allora ha polinomio minimo $(x+1)(x-1)$ e $Sp(f) = \{1, -1\}$.

(Esempi di involuzioni: riflessioni) Se consideriamo in $\mathbb{R}^3$ la riflessione rispetto al piano π, allora $V_1 = \pi$ e $V_{-1} = \pi^{\perp}$.

(Esempi di involuzioni: trasposizione di una matrice) Se consideriamo
$$M_{n,n}(K) \to M_{n,n}(K)$$
$$A \to A^T$$
In questo caso $V_1 = Sym_n(K) = span(e_{11}, e_{22}, \ldots, e_{nn}, e_{12} + e_{21} \ldots)$ che ha dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.

Invece $V_{-1} = Skew_n(K) = span(e_{12} - e_{21} \ldots)$ che ha dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$.

21. Più in genereale qualsiasi $f \in End(V)$ tale che
$$f^3 = f$$
è diagonalizzabile e se f non è un'involuzione né idempotente allora ha polinomio minimo $x(x+1)(x-1)$ e $Sp(f) = \{0, 1, -1\}$.

22. (nilpotenti) Un endomorfismo $f \in End(V)$ tale che
$$f^k = 0 \quad (e\ f^{k-1} \neq 0)$$
si dice nilpotente di ordine k. Dimostrare che ha polinomio minimo x^k e $Sp(f) = \{0\}$. Se $k \neq 1$ non è diagonalizzabile.
Dimostrare che un endomorfismo f è nilpotente se e solo se il suo polinomio caratteristico è $\pm x^n$.
La condizione $Sp(f) = \{0\}$ è necessaria e se K è algebricamente chiuso è anche sufficiente.
Osservare che nel caso in cui K non è algebricamente chiuso la condizione non è sufficiente: potrebbe essere che $Sp(f) = \{0\}$ con f non nilpotente, ad es. una rotazione di un angolo $\theta \neq k\pi$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\ \theta & -sin\ \theta \\ 0 & sin\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix}$$

In ogni endomorfismo $f \in End(V)$, chiamando $V_i = Ker(N^i)$, si ha una filtrazione

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_m \subseteq V$$

tale che $N(V_i) \subset V_{i-1}$.
In generale si definisce radicale $Rad(f) = \bigcup V_i = V_m$.
Nel caso di un endomorfismo nilpotente di indice k si ha che $m = k$ e $V_k = V$, cioè $V = Rad(f)$.
Dimostrare che è quindi possibile trovare una base di V secondo la quale un endomorfismo nilpotente è rappresentato da una matrice triangolare superiore con la diagonale nulla.

(Esempi di nilpotenti: la derivazione) Ad esempio la derivazione

$$\frac{d}{dx} : K[x]_{\leq 3} \to K[x]_{\leq 3}$$

ha polinomio minimo x^4 e rispetto alla base $\{6, 6x, 3x^2, x^3\}$ la sua matrice è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23. Trovare due matrici 4x4 nilpotenti dello stesso indice che non sono simili.

24. Data $F \in M_{n,n}(K)$ sia

$$\begin{gathered} f : M_{n,n}(K) \to M_{n,n}(K) \\ A \to FA \end{gathered}$$

Dimostrare che il polinomio minimo di f coincide con il polinomio minimo di F.

25. Considerare la matrice

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare se è diagonalizzabile, calcolare il polinomio caratteristico, il polinomio minimo, autovalori e relativi autospazi.

26. Sia A una matrice quadrata complessa tale che $A^3 = A^2$. Dimostrare che A^2 è sempre diagonalizzabile e mostrare con un esempio che A può non essere diagonalizzabile.

27. Sia A una matrice 6×6 con polinomio caratteristico $p(t) = t(t-1)^5$. Se il rango della matrice $A - I$ è 3, quali sono le possibili forme di Jordan di A? É possibile determinare univocamente la forma di Jordan di A conoscendo il polinomio minimo?

28. Sia A una matrice con pol. caratteristico $p(t) = (t-1)^2(t-2)^3$. Se l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 1 e l'autovalore 2 ha molteplicità geometrica 2, qual è la forma di Jordan di A?

29. Determinare, se possibile, due matrici a coefficienti complessi che abbiano stesso polinomio minimo e stesso polinomio caratteristico ma che non siano simili.

30. Determinare, se possibile, due matrici a coefficienti complessi che abbiano stesso polinomio minimo, stesso polinomio caratteristico e stesse molteplcità geometiche degli autovalori ma che non siano simili.

31. Sia V uno s.v. di dimensione finita e siano $F, G \in End(V)$ due endomorfismi che commutano tra loro. Dimostrare che se F è diagonalizzabile e G è nilpotente esiste una base di autovettori di F rispetto alla quale la matrice di G è triangolare.

32. Determinare la forma canonica di Jordan associata alle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e determinare le matrici di cambio di base.

33. La matrice B è una matrice 5x5 con 3 come unico autovalore. I ranghi delle potenze sono i seguenti: $B - 3I$ ha rango 3, $(B - 3I)^2$ ha rango 2, $(B - 3I)^3$ ha rango 1 e $(B - 3I)^4 = 0$. Qual è la forma di Jordan associata a B?