Tutorato Geometria 1B - A.A. 2023-24
Marco Trozzo

ALGEBRA BILINEARE E FORME QUADRATICHE

1. Sia $b \in Bils(V)$ una forma bilineare simmetrica su V.
   Sia Rad(b)$= V^{\perp} = \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \ \forall w \in V\}$ il *radicale* di b.
   Sia I(b)$= \{v \in V \mid b(v, v) = 0\}$ il *cono isotropo* di b. Dimostrare che:
   (a) Rad(b) è un sottospazio vettoriale di V;
   (b) I(b) non è un sottospazio vettoriale di V ma contiene lo 0 ed è chiuso per moltiplicazione per scalari;
   (c) $Rad(b) \subset I(b)$.

2. Sia $b \in Bils(\mathbb{R}^3)$

   $$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_2y_2$$

   Determinare se possibile
   (a) un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ isotropo tale che $dim(v^{\perp}) = 3$;
   (b) un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ non isotropo tale che $dim(v^{\perp}) = 2$.
   (c) un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ non isotropo tale che $dim(v^{\perp}) = 3$.

   Verificare che $w = (1, 1, 0)$ è isotropo e $dim(w^{\perp}) = 2$, calcolare $Rad(b)$ ed $I(b)$.

3. Costruire tutte le matrici $H \in GL_2(\mathbb{R})$ tali che $HH^T = I$.

4. Stabilire se è vero che il prodotto di due matrici reali simmetriche è una matrice simmetrica.

5. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $f, g \in V$ e

   $$b(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

   Verificare che $b \in Bils(V)$ e, scelta una base per V, scrivere la matrice associata a b rispetto a tale base.

6. Sia $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid tr(X) = 0\}$ e sia $b(A,B) = tr(A^T B)$ una forma bilineare simmetrica su V. Determinare una base ortonormale di V rispetto a b e completarla ad una base ortonormale di $M_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che rispetto a questa forma bilineare, data $P \in O(n)$, la funzione $f_P \in End(M_2(\mathbb{R}))$ definita da $f_P(A) = PAP^{-1}$ è un'isometria, cioè per ogni $A, B \in M_2(\mathbb{R})$
$$b(A,B) = b(f_P(A), f_P(B))$$

7. Determinare una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard del piano di $\mathbb{R}^3$ $\pi: \ x + y - z = 0$. Completare tale base ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

8. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ con $n = 2$; dimostrare che $< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$ è una forma bilineare simmetrica definita positiva, determinare la matrice associata secondo una base a scelta e calcolare $(x^2)^{\perp}$ e $x^{\perp}$.
Se $n > 2$ come diventa la matrice associata? La forma è ancora definita positiva?

9. Sia V un K-spazio vettoriale e $b \in Bils(V)$. Un sottospazio vettoriale $U \subset I(b)$ è detto *sottospazio isotropo*. Dimostrare che U è un sottospazio isotropo se e solo se $U \subset U^{\perp}$ e che nel caso di b non degenere se U è un sottospazio isotropo
$$dim(U) \leq \frac{1}{2} dim(V)$$

10. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione $n+1$ e $b \in Bils(V)$ non degenere con segnatura $(n, 1)$. Dimostrare che la massima dimensione di un sottospazio isotropo di V è 1.

11. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ dimostrare che $q(f) = f(0)^2$ è una forma quadratica, calcolare la forma bilineare simmetrica associata e trovare una base ortogonale rispetto a tale forma bilineare. Qual è la massima dimensione di un sottospazio isotropo?

12. Dimostrate che se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare standard, allora la matrice $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} =< u_i, v_j >$ è una matrice ortogonale.

13. Sia b un prodotto scalare su V. Fissato un sottospazio W, dimostrare che ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = w + w'$ con $w \in W$ e $w' \in W^{\perp}$ e che vale il *teorema di Pitagora*
$$b(v,v) = b(w,w) + b(w',w')$$

14. Verificare che il determinante è una forma quadratica su $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne rango e segnatura.

15. Verificare che il discriminante $\Delta(x, y, z) = y^2 - 4xz$ è una forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ e calcolarne rango e segnatura. [La risposta è (2,1)]. Chi è il cono isotropo?

16. Sia $c \in \mathbb{R}$ una costante positiva, consideriamo la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ $q(t, x, y, z) = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ e siano A la matrice canonicamente associata e b la corrispondente forma bilineare simmetrica. Determinare rango, segnatura, una base ortonormale $\mathcal{B}$ e determinare la scrittura di un vettore $s \in \mathbb{R}^4$ in tale base e la matrice G associata a q rispetto a tale base.
    In questo caso q è detta *forma di Minkowski* e il cono isotropo è anche detto dai fisici in modo molto suggestivo *cono di luce*.

17. Sia $v \in \mathbb{R}$ con $v \in (-c, c)$. Definiamo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ detto a volte *fattore di Lorentz*. Dimostrare che $A \in End(\mathbb{R}^4)$

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    è un'isometria per la forma di Minkowski, cioè $A^T GA = G$ (o equivalentemente $A^{-1} = GA^T G$).
    Verificare che le matrici che soddisfano tale equazione costituiscono un gruppo (detto $O(1, 3)$).

18. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione 2 e $b \in Bils(V)$ una forma bilineare simmetrica non degenere su V che ammette un vettore isotropo non nullo. La coppia (V, b) è detta *piano iperbolico*.
    - Calcolare la segnatura di b.
    - Dimostrare che esiste una base di V $\{v_1, v_2\}$ di vettori isotropi tali che $b(v_1, v_2) = 1$. Tale base è detta *base iperbolica*.
    - Dimostrare che

$$\beta(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 \qquad \gamma(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$$

    sono forme iperboliche su K^2 e trovare per ciascuna di esse una base iperbolica ed una diagonalizzante.

19. Sia (V, b) un piano iperbolico su k e q la forma quadratica associata a b. Dimostrare che per ogni $c \in K$ esiste un vettore $v \in V$ tale che $q(v) = c$.

20. Sia V un K-spazio vettoriale e $b \in Bils(V)$ una forma bilineare simmetrica non degenere su V che ammette un vettore isotropo non nullo. Dimostrare che V contiene un piano iperbolico.

21. Sia V un K-spazio vettoriale e q una forma quadratica non degenere su V. Dimostrare che se esiste un vettore non nullo $u \in V$ tale che $q(u) = 0$ allora per ogni $c \in K$ esiste un vettore $v \in V$ tale che $q(v) = c$.

22. Sia $\gamma(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ una forma iperbolica su $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che $A \in End(\mathbb{R}^2)$
$$A = \begin{bmatrix} cosh\ \theta & sinh\ \theta \\ sinh\ \theta & cosh\ \theta \end{bmatrix}$$
è un'isometria per il piano iperbolico, detta *rotazione iperbolica* o dai fisici anche *Lorentz boost*.

23. Si consideri la forma quadratica reale $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, in funzione del parametro reale k $q(x, y, z) = x^2 - 2kxy + y^2 + kz^2$.
Determinare per quali valori di k la forma q è definita positiva.
Posto $k = 1$ scrivere un'equazione canonica per q e scrivere la trasformazione ortogonale che riduce q alla forma canonica trovata.

24. Sia A una matrice reale simmetrica di ordine 2 con autovalori 2 e 3 e tale che $A \cdot (1, 1)^T = (2, 2)^T$. Determinare la matrice A.

25. Determinare tutte le matrici quadrate simmetriche reali di ordine 2 con $detA = 2$, $tr(A) = 3$ e che hanno un autospazio di equazione $x + y = 0$.

26. Dimostrare che una matrice reale simmetrica Q di ordine n è definita positiva se e solo se esiste una matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $Q = P^TP$.

27. Dimostrare che se $B = A^TA$ (A non necessariamente quadrata) allora B è una matrice simmetrica semidefinita positiva. In quali casi è definita positiva? Dimostrare il viceversa: se B è una matrice simmetrica semidefinita positiva è possibile trovare una (sola?) matrice A tale che $B = A^TA$.

28. Sia $F \in End(\mathbb{R}^4)$ tale che $F(e_1) = e_2$, $F(e_2) = e_1$, $F(e_3) = e_4$,$F(e_4) = e_3$. Determinare una base ortogonale che diagonalizzi F.

29. Considerare la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ $q(x, y, z, t) = 2xy + 2zt$. Mediante completamento dei quadrati ricondurre q alla sua forma canonica e confrontare il risultato con quello dell'esercizio precedente.

30. Sia b un prodotto scalare su V. Dimostrare che per ogni $u, v \in V$

$$b(u, v)^2 \leq b(u, u)b(v, v)$$

e l'uguaglianza vale se e solo se i vettori u e v sono linearmente dipendenti.

31. Verificare che una matrice simmetrica reale di ordine due o è un multiplo dell'identità o è regolare, cioè è diagonalizzabile con autovalori distinti. Verificare che una matrice antisimmetrica reale di ordine due non nulla non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. E su $\mathbb{C}$?

32. Trovare una base ortonormale di autovettori per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

quindi scrivere $A = PDP^T$ con $P \in O(n)$ e D diagonale.

33. Dimostrare che $f \in End(\mathbb{R}^3)$

$$f(x, y, z) = (x + y - z, x + y - z, -x - y + z)$$

è simmetrico e trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

34. Considerare le applicazioni $f_1, g_1, f_2, g_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ le applicazioni

$$f_1(z, w) = Re(zw) \qquad g_1(z, w) = Im(zw)$$

$$f_2(z, w) = Re(z\overline{w}) \qquad g_2(z, w) = Im(z\overline{w})$$

Verificare se sono forme bilineari simmetriche non degeneri su $\mathbb{C}$ considerato come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. In caso positivo diagonalizzarle e calcolarne la segnatura.

35. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard e sia $u \in \mathbb{R}^3$, considerare $L \in End(\mathbb{R}^3)$ definito da $L(x) = x \wedge u$. Determinare se è un operatore autoaggiunto e scrivere la matrice associata ad L rispetto ad una base a scelta.

36. Considerare la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Verificare che il vettore $v = (1,1,1,1)^T$ è un autovettore per A;
- calcolare $W = v^{\perp}$ e verificare che è un autospazio per A;
- determinare una base ortogonale di W e completarla ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ di autovettori per A;
- trovare una matrice ortogonale che diagonalizzi A.

CONICHE E QUADRICHE: CLASSIFICAZIONE AFFINE

37. Classificare la conica di equazione $x^2 - y^2 + 2x = 0$ e determinare i cambi di coordinate che portano la quadrica nella sua forma canonica affine.

38. Classificare la conica di equazione $xy + x + y + 1 = 0$ e determinare i cambi di coordinate che portano la quadrica nella sua forma canonica affine.

39. Classificare la quadrica di equazione $x^2 - 2xy - 2xz + 2x - 4y + 4 = 0$ e determinare i cambi di coordinate che portano la quadrica nella sua forma canonica affine.

40. Classificare la quadrica di equazione $x^2 + y^2 + 2xy + 2y - 2z + 10 = 0$ e determinare i cambi di coordinate che portano la quadrica nella sua forma canonica affine.

41. Classificare le coniche del fascio

$$x^2 + (1-k)y^2 + 2kx - 2(1-k)y + 2 - k = 0$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

42. Classificare le quadriche dei seguenti fasci

(a) $x^2 - ky^2 + kz^2 - 1 = 0$

(b) $x^2 - ky^2 + kz^2 + 1 = 0$

(c) $x^2 + 2y^2 + kz^2 = k^2$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

43. Data la quadrica di equazione $x^2 - y^2 - z = 0$ considerare z come parametro e classificare le coniche al variare di $z \in \mathbb{R}$ (dette *sezioni piane* o *sezioni iperpiane*).