Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Energetica, 22/12/2014

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme A, stabilire se è aperto o chiuso. Inoltre studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, l'esistenza di massimi e minimi, la compattezza.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x^2 - \frac{1}{n} = 0, \ n \in \mathbb{N}, \ n > 0 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset, \ Der(A) = \{0\}, \ Fr(A) = A \cup \{0\}, \ \bar{A} = A \cup \{0\},$$

$$\inf A = \min A = -1, \ \sup A = \max A = 1$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \cos(\pi n) \frac{n! + \sqrt[n]{3n^2 + 5}}{e^n + (n+1)!} \qquad = 0$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x + x^2) - 1 + \log(1 - x - x^2 + x^4) + \sqrt{1 + x^2}}{x + \cosh(x - x^2) - e^{\frac{x^2}{2}} - \sinh(x - x^3)} \qquad = 9$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{|x|}}(2|x| - 3), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^e \frac{4 - 12\log(x)}{x\big(\log^2(x) + 1\big)\big(\log(x) + 3\big)} \, dx \qquad = \log\left(\frac{64}{81}\right)$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^3 \log(2 + x^4)} \, dx. \qquad \alpha > 2$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + e^x} \, dx.$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Energetica, 22/12/2014

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME:** . . . .

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme A, stabilire se è aperto o chiuso. Inoltre studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, l'esistenza di massimi e minimi, la compattezza.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad \log(x) - \frac{1}{n} = 0, \ n \in \mathbb{N}, \ n > 0 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset, \ Der(A) = \{1\}, \ Fr(A) = A \cup \{1\}, \ \bar{A} = A \cup \{1\},$$

$$\inf A = 1, \ \min A = \nexists, \ \sup A = \max A = e$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n! + 2^n + n!(3n+2)}{3^n + (n+1)! + n!} \qquad = 3$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} + \log(\cos x) - e^{-\frac{1}{6}x^2}}{\cos(x+x^3) + e^{-x^2} + \frac{3}{2}\sinh^2(x) - 2} \qquad = -5$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{|x|}}(4 - |x|), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\big(\cos^2(x) + \cos(x) - 2\big)}{\big(\cos^2(x) + 1\big)\big(\cos(x) - 3\big)}\, dx \qquad = \frac{\pi}{4} + \log\left(\frac{2}{3}\right)$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{\sqrt[5]{x}\arctan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x^3}\right)}\, dx. \qquad \alpha > \frac{4}{5}$$

7) *(facoltativo,3 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + e^x}\, dx.$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Energetica, 23/01/2015

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: ....

Preferirei sostenere la prova orale il: ☐ 29/01 ☐ 30/01
Eventualmente gli orali continueranno nei giorni 02/02 e 03/02

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme A, stabilire se è aperto o chiuso. Inoltre studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, l'esistenza di massimi e minimi, la compattezza.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \quad |2 - e^x| \leq 2\} \qquad = (-\infty, \log 4]$$

$$Int(A) = (-\infty, \log 4),\ Der(A) = A,\ Fr(A) = \{\log 4\},\ \bar{A} = A,$$

$$\inf A = -\infty,\ \min A = \nexists,\ \sup A = \max A = \log 4$$

A non è aperto, è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)! - n!}{(n+1)!(3n+2)} \qquad = \frac{1}{3}$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos(2x + x^2) - 2\sinh^3(x)}{\sqrt{1-2x^2} - 1 + \cos(x)\arctan^2(x)} \qquad = -\frac{11}{10}$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = |e^{-x^4} - e^{-1}|$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{e-1} 4x \log(x+1)\, dx \qquad = e^2 - 3$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{7x^\alpha}{5 + 6x^{1+3\alpha}}\, dx. \qquad \alpha < -1,\ \alpha > 0$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_2^{x^3} \left(2 + e^{-t^2}\right) dt}{2x^3 + 5x^2 - 1}.$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Energetica, 23/01/2015

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: ....

Preferirei sostenere la prova orale il: □ 29/01 □ 30/01
Eventualmente gli orali continueranno nei giorni 02/02 e 03/02

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme A, stabilire se è aperto o chiuso. Inoltre studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, l'esistenza di massimi e minimi, la compattezza.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \quad |e^{-x} - 1| \le 1\} \qquad = [-\log 2, +\infty)$$

$$Int(A) = (-\log 2, +\infty), \ Der(A) = A, \ Fr(A) = \{-\log 2\}, \ \bar{A} = A,$$

$$\inf A = \min A = -\log 2, \ \sup A = +\infty, \ \max A = \nexists$$

A non è aperto, è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n\log n} \qquad = 1$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}\sinh(x+x^3) - \log(1+x+\frac{x^2}{2})}{\frac{1}{x}\log(1+x)\sin(x) - x\sqrt{1-x}} \qquad = \frac{20}{7}$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = |(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2 - 4|$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-1}^{0} 6(x+1)\arctan(x+1)\,dx \qquad = \frac{3}{2}\pi - 3$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{3x^\alpha}{5+7x^{2\alpha+1}}\,dx. \qquad \alpha < -1, \ \alpha > 0$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_2^{x^3} \left(2+e^{-t^2}\right)dt}{2x^3+5x^2-1}.$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Energetica, 13/02/2015

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: ....

Preferirei sostenere la prova orale il: ☐ 19/02 ☐ 20/02

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme A, stabilire se è aperto o chiuso. Inoltre studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, l'esistenza di massimi e minimi, la compattezza.

$$A = [-1,1] \setminus B, \qquad \text{dove} \qquad B = \left\{ x \in [-1,1] \;:\; x = \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n > 0 \right\}.$$

$$Int(A) = [-1,1] \setminus (B \cup \{0,1\}),\ Der(A) = [-1,1],\ Fr(A) = B \cup \{0,1\},\ \bar{A} = [-1,1],$$
$$\inf A = -1,\ \min A = \nexists,\ \sup A = \max A = 1$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+4}{8n+3}\left[1 - \left(1 - \frac{5}{6n}\right)^7\right] \qquad = \frac{35}{16}$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\big(\sinh(x-x^3)\big) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{4-8x^2} + \log(1+2x^2-2x^3) - 2e^{-x^3}} \qquad = -\frac{1}{4}$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4-x^2}, & |x| \le 2 \\ \sqrt{|x-2|}, & |x| > 2. \end{cases}$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin(4x) e^{5x}\, dx \qquad = \frac{1}{41}\left(5e^{\frac{5}{8}\pi} + 4\right)$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{5\alpha}(x^2+9)^{3\alpha}(16-x^2)^{2-6\alpha}}\, dx. \qquad \frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{5}$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice omogenea di grado $p \in \mathbb{R}$ se vale

$$f(tx) = t^p f(x), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ t > 0$$

Sia $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ una funzione omogenea di grado p, dimostrare che f' è omogenea di grado $p-1$, e che inoltre vale la seguente relazione:

$$pf(x) = xf'(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Energetica, 13/02/2015

MATRICOLA:...........................**NOME e COGNOME**: ....

Preferirei sostenere la prova orale il: ☐ 19/02 ☐ 20/02

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme A, stabilire se è aperto o chiuso. Inoltre studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, l'esistenza di massimi e minimi, la compattezza.

$$A = [0,1] \setminus B, \qquad \text{dove} \quad B = \left\{ x \in [0,1] \ : \quad x = 1 - \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N},\ n > 0 \right\}.$$

$$Int(A) = [0,1] \setminus (B \cup \{1\}),\ Der(A) = [0,1],\ Fr(A) = B \cup \{1\},\ \bar{A} = [0,1],$$
$$\inf A = 0,\ \min A = \nexists,\ \sup A = \max A = 1$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{7n^3 - 3}{4n + 9} \left[1 - \cos\left(\frac{4}{5n}\right) \right] \qquad = \frac{14}{25}$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\log\left(\cos(x + x^3)\right) + \sinh(x^2 - x^4)}{\sqrt[3]{8 + 24x^3} - 2e^{x^3 - x^4}} \qquad = -\frac{19}{12}$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2}, & |x| \le 3 \\ \sqrt{|x - 3|}, & |x| > 3. \end{cases}$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{10}} \cos(5x) e^{6x}\, dx \qquad = \frac{1}{61}\left(5e^{\frac{3}{5}\pi} - 6\right)$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{4\alpha}(x^2+4)^{2\alpha}(9-x^2)^{2-5\alpha}}\, dx. \qquad \frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{4}$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice omogenea di grado $p \in \mathbb{R}$ se vale

$$f(tx) = t^p f(x), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ t > 0$$

Sia $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ una funzione omogenea di grado p, dimostrare che f' è omogenea di grado $p-1$, e che inoltre vale la seguente relazione:

$$pf(x) = xf'(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Energetica, 15/06/2015

MATRICOLA:..........................**NOME e COGNOME**: . . . .

Preferirei sostenere la prova orale il: ☐ 18/06 ☐ 19/06

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme A, stabilire se è aperto o chiuso. Inoltre studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, l'esistenza di massimi e minimi, la compattezza.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = 2 - \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 0 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset,\ Der(A) = \{2\},\ Fr(A) = A \cup \{2\},\ \bar{A} = A \cup \{2\},$$

$$\inf A = \min A = 1,\ \sup A = 2,\ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^4 (n+3)^n + n^{n+4}}{(n+5)^{n+4}} \qquad = \frac{e^3+1}{e^5}$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{2e^{-3x} - 2 - \sin^2(3x - \frac{3}{2}x^2) + 6x}{2\cosh(x - x^2) + \log(1 - x^2 + 2x^3) - 2} \qquad = 54$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3|x|}.$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{18}} \frac{1}{\cos^2(3x)(\tan^2(3x) - 1)}\, dx \qquad = -\frac{1}{6} \log\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{\left(3\sin^2(x)\right)^{\alpha - 1}}{(1 - x^2)^{\alpha}}\, dx. \qquad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Studiare il seguente limite, motivando la risposta

$$\lim_{n \to +\infty} \int_n^{n+1} e^{-x^2}\, dx.$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Energetica, 15/07/2015

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

Preferirei sostenere la prova orale il: ☐ 20/07 ☐ 21/07

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme A, stabilire se è aperto o chiuso. Inoltre studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, l'esistenza di massimi e minimi, la compattezza.

$$A = \left\{ y \in \mathbb{R} \ : \quad y = e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R} \right\} \qquad = (0, 1]$$

$$Int(A) = (0, 1),\ Der(A) = [0, 1],\ Fr(A) = \{0, 1\},\ \bar{A} = [0, 1],$$

$$\inf A = 0,\ \min A = \nexists,\ \sup A = \max A = 1$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \quad \sin\left(\frac{2^n n^4 + (n+2)! \arctan(2n^3)}{3\ n!\ n^2 + 5e^{1+n^3}} \right) \qquad = 0$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sinh(x-1) + \log(x) - \sin(x^2-1)}{\cos(x^2-1) - 2\sqrt{x} + x} \qquad = \frac{6}{7}$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione (disegnare un grafico qualitativo, senza lo studio della derivata seconda)

$$f(x) = 4 - 2\cosh(x\,|x-3|).$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}\ \sqrt{4-x}}\, dx \qquad = \frac{\pi}{6}$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 + x^{7-\alpha}}{x^5 + \arctan(x^2)}\, dx. \qquad 3 < \alpha < 6$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Si definisca

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x (t-1)\big(\sinh(t)\big)^5\, dt$$

e sia $m = f(1)$. Dimostrare che $m < 0$, inoltre determinare quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \lambda$, nei seguenti casi:

a) $\lambda > 0$, *b)* $\lambda = 0$, *c)* $m < \lambda < 0$, *d)* $\lambda = m$, *e)* $\lambda < m$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Energetica, 14/09/2015

MATRICOLA:...........................**NOME e COGNOME:** . . . .

Preferirei sostenere la prova orale il: ☐ 17/09 ☐ 18/09

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme A, stabilire se è aperto o chiuso. Inoltre studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, l'esistenza di massimi e minimi, la compattezza.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \quad x(x^2-1) \geq 0\ \} \qquad = [-1,0] \cup [1,+\infty)$$

$$Int(A) = (-1,0) \cup (1,+\infty),\ Der(A) = A,\ Fr(A) = \{-1,0,1\},\ \bar{A} = A,$$

$$\inf A = \min A = -1,\ \sup A = +\infty,\ \max A = \nexists$$

A non è aperto, è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\pi+\cos(\pi n)}}{e^{\pi+\sin(\pi n)}} \qquad = \nexists$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\cos(x-x^2)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\cosh(x)-x-2}{\log\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+x^3\right)-\sinh\left(x+\frac{7}{6}x^3\right)} \qquad = 1$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = 5 - 4e^{3|x|-2}.$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, \frac{e^{\cos(x)}}{4+e^{2\cos(x)}}\, dx \qquad = \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{e}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_{-2}^{5} \frac{1}{|x^2-9|^{\alpha}\, |x+1|^{2-3\alpha}}\, dx. \qquad \frac{1}{3} < \alpha < 1$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Provare per induzione la seguente formula

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$