

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log(|x|) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

2)(4 punti) Studiare il seguente limite, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n(5n^2 + 3)}{(3|\alpha| + 2)^n}.$$

3)(6 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-(x+x^3)} - \cosh(x+x^4) + \sinh(x+x^3)}{2\sqrt{\cos(x+x^4)} - \log(1-x+x^4) - 2 - \sin(x+\frac{x^3}{2})}.$$

4)(7 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = e^{\left(\frac{1}{\log|2x-4|}\right)}.$$

5)(5 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^3 (3x-4) \log(6x-11) e^{2x} dx.$$

6)(5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge il seguente integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sinh\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) (2x^3 + 4x + 3)}{\sqrt[\alpha]{(2x-4)^3}} dx.$$

7)(facoltativo, 3 punti) Sia A un insieme ed \mathcal{R} una relazione di equivalenza su A . Dato $a \in A$, si chiama classe di equivalenza $[a]$ di a il seguente insieme:

$$[a] = \{x \in A : x\mathcal{R}a\}.$$

L'insieme composto da tutte le classi di equivalenza si chiama quoziente e si indica A/\mathcal{R} .

Si consideri la seguente relazione sui reali:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = \cos(y) \\ \sin(x) = \sin(y) \end{cases}.$$

Dimostrare che \mathcal{R} è una relazione di equivalenza sui reali e descrivere le classi di equivalenza e il quoziente \mathbb{R}/\mathcal{R} .

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x|} > 2 \right\}.$$

2)(4 punti) Studiare il seguente limite, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(4|\alpha| + 3)^n}{(n + 1)5^n}.$$

3)(6 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \log(\sqrt{1 + x^2 + x^4}) - e^{2x - x^4} + 1 + \sinh(2x + 3x^4)}{2 \cos(3x - 2x^4) - 8 + 9e^{x^2 - 2x^4} - 3 \cos(2x^2 + 3x^4)}.$$

4)(7 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = -e^{\left(\frac{1}{\log|3-x|}\right)}.$$

5)(5 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^3 (2x - 3) \log(6x - 11) e^{3x} dx.$$

6)(5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge il seguente integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{(3x^6 + 4x^2 + 2) \sqrt[\alpha]{(2x - 6)^6}} dx.$$

7)(facoltativo, 3 punti) Sia A un insieme ed \mathcal{R} una relazione di equivalenza su A . Dato $a \in A$, si chiama classe di equivalenza $[a]$ di a il seguente insieme:

$$[a] = \{x \in A : x \mathcal{R} a\}.$$

L'insieme composto da tutte le classi di equivalenza si chiama quoziente e si indica A/\mathcal{R} . Si consideri la seguente relazione sui reali:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = \cos(y) \\ \sin(x) = \sin(y) \end{cases}.$$

Dimostrare che \mathcal{R} è una relazione di equivalenza sui reali e descrivere le classi di equivalenza e il quoziente \mathbb{R}/\mathcal{R} .

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = |e^z - 1|, z \in \mathbb{Z}\}.$$

2)(4 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\log n} - 2^n.$$

3)(6 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x - x^2) + \cosh(x^3 - x) - \log(1 + 2x) - e^{\frac{3}{2}x^2}}{\sqrt{4 + x^2} - \sinh(2x + x^3) - 2e^{-x+3x^2}}.$$

4)(7 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{1-x}}{|2-x|}.$$

5)(5 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x}} dx.$$

6)(5 punti) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{3\alpha} + x^2}{e^{|\alpha|x^2} + x^3 - 1} dx.$$

7)(facoltativo, 3 punti) Si consideri l'equazione in $x \in \mathbb{R}$

$$3x^5 + 4x^3 + 2x - \frac{1}{2^n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un'unica soluzione $x_n \in \mathbb{R}$ e calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} - |\arctan(z)|, \quad z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2)(4 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n - n^{\sqrt{n}}.$$

3)(6 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 - 2x^2 + x^3) - \sinh(3x + 2x^2) + \cos(2x + x^2) - e^{-3x+x^2}}{\cosh(2x^2 + x^4) + 3e^{x^2-x^3} - 4\sqrt{1 + \frac{3}{2}x^2}}.$$

4)(7 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{x-1}}{|2+x|}.$$

5)(5 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt[6]{x^5} - 9\sqrt{x}} dx.$$

6)(5 punti) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{4\alpha} + x^2}{e^{|\alpha|x^2} + x^4 - 1} dx.$$

7)(facoltativo, 3 punti) Si consideri l'equazione in $x \in \mathbb{R}$

$$3x^5 + 4x^3 + 2x - \frac{1}{2^n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un'unica soluzione $x_n \in \mathbb{R}$ e calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \leq -2x^2\}.$$

2)(4 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!(2n+3)^2 - 2^{2n} \sin(n^2)}{(3n+4)(n+1)! - e^n \cos(n^3)}.$$

3)(6 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\sin(2x+x^2) - \log(1-x)) - e^{5x^2} + \cosh(2x)}{x(\sqrt{1-2x^2} - 2e^{-x}) + \sinh(x-2x^2)}.$$

4)(7 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{3x^4 + 2x}.$$

5)(5 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 3}{(x-2)(x^2 - 6x + 8)} dx.$$

6)(5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha \geq 0$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^{2\alpha})}{x^2 + \alpha \sqrt[3]{x}} dx.$$

7)(facoltativo, 3 punti) Si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

e sia $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$. Provare che vale la formula di ricorrenza

$$2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + xf_n(x),$$

e scrivere esplicitamente F_3 .

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 < x^3\}.$$

2)(4 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n \cos(n) - n!(2n-1)^3}{(2n+1)^2 (n+1)! + 3^{3n} \sin(n^2)}.$$

3)(6 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(2 \log(1-2x) + \sinh(x-2x^2)) + e^{x^2} - \cos(2x)}{x(\cosh(x-x^2) - \sqrt{1-2x}) - \sin(x^2-x^3)}.$$

4)(7 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{2x^4 - 4x}.$$

5)(5 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2 - 2}{(x-3)(x^2 - 8x + 15)} dx.$$

6)(5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha \geq 0$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^{3\alpha})}{x^3 + \alpha \sqrt[4]{x}} dx.$$

7)(facoltativo, 3 punti) Si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

e sia $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$. Provare che vale la formula di ricorrenza

$$2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + x f_n(x),$$

e scrivere esplicitamente F_3 .

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)^2 < 1\}.$$

2)(4 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! \cos\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right) n^2 + \sqrt[3]{3^{2n+1}}}{e^{5n + \arctan(n^2)} + (n+3)! \sin\left(1 + \frac{\sin n}{n}\right)}.$$

3)(6 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x - x^3) + 2 \cos(x^2) - \sqrt{4 - 8x^2} - \tan(x + 2x^2)}{\cosh(x + x^2) - e^{x+x^2} - x^3 + \sinh(x + x^2)}.$$

4)(7 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \left(\frac{1}{(1 - |x|)^2} - 1 \right)^2.$$

5)(5 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^e \frac{(x^2 - 3x + 1) \log x}{x} dx.$$

6)(5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha} \sin\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right)}{e^{4\alpha x} - 1} dx.$$

7)(facoltativo, 3 punti) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni $x_1, x_2 \in I$ vale

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Dimostrare che se I è aperto allora f è continua. Inoltre, scrivere esplicitamente una funzione convessa ma non continua.

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)^2 \geq 1\}.$$

2)(4 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{4n + \arctan(3n)} + (n + 2)! \cos\left(1 + \frac{\sin n}{n}\right)}{n! \sin\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right) n^2 + \sqrt[n]{4^{3n+1}}}.$$

3)(6 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x + x^3) - 3 \cos(x^2) + \sqrt{9 + 18x^2} - \tan(x + 3x^2)}{\sinh(x - x^2) - e^{x-x^2} + x^3 + \cosh(x - x^2)}.$$

4)(7 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{(|x| - 1)^2}\right)^2.$$

5)(5 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^e \frac{(x^2 + 2x - 1) \log x}{x} dx.$$

6)(5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha} \sin\left(\frac{1}{x^{4\alpha}}\right)}{e^{3\alpha x} - 1} dx.$$

7)(facoltativo, 3 punti) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni $x_1, x_2 \in I$ vale

$$f((1 - t)x_1 + tx_2) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Dimostrare che se I è aperto allora f è continua. Inoltre, scrivere esplicitamente una funzione convessa ma non continua.

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{x-1}{|2-x|} < 2 \right\}.$$

2)(4 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{(n^2+1)} \arctan(e^{n^2+1})}{(n+2)! \arctan((n+2)!)}.$$

3)(6 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{\sin(3x - x^2) - \sinh(3x - x^2)}{\cos(2x^2 + x^3) - \cosh(2x^2 + x^3)}.$$

4)(7 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\log 4 - \log(x^2)}.$$

5)(5 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)(x^2+4x+3)} dx.$$

6)(5 punti) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{(\sin(x))^\alpha}{(\cos(\frac{\pi}{2}x))^{2\alpha}} dx.$$

7)(facoltativo, 3 punti) Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Dimostrare che f è differenziabile ma $f \notin C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Inoltre provare che il punto $x_0 = 0$ è un punto di minimo per il quale non esiste nessun intorno in cui la funzione sia crescente a destra di x_0 e decrescente a sinistra di x_0 .

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x - 2|} \geq 1 \right\}.$$

2)(4 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n + 2)^3 (n!)^3 + (5n + 2)^2 (e^n)^3}{(\arctan(e^n))^3 + ((n + 1)!)^3}.$$

3)(6 punti) Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin(3x + 3x^3) - \arctan(6x)}{\cos(2x - 12x^2) - e^{-2x^2 + x^3}}.$$

4)(7 punti) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = |\log(|x - 1|)| - 1.$$

5)(5 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2 - \cos^2(x)} dx.$$

6)(5 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right)}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx.$$

7)(facoltativo, 3 punti) Scrivere esplicitamente una funzione $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ che non ammetta primitiva, giustificando la risposta.