Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Gestionale, 20/12/2016

MATRICOLA:...........................**NOME e COGNOME**: . . . .

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;:\; \log(|x|) \leq \frac{1}{2} \right\} \qquad = [-\sqrt{e}, 0) \cup (0, \sqrt{e}]$$

$$Int(A) = (-\sqrt{e}, 0) \cup (0, \sqrt{e}),\; Der(A) = [-\sqrt{e}, \sqrt{e}],\; Fr(A) = \{-\sqrt{e}, 0, \sqrt{e}\},\; \bar{A} = [-\sqrt{e}, \sqrt{e}],$$
$$\inf A = -\sqrt{e},\; \min A = -\sqrt{e},\; \sup A = \sqrt{e},\; \max A = \sqrt{e}$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2)*(4 punti)* Studiare il seguente limite, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{4^n (5n^2 + 3)}{(3|\alpha| + 2)^n}\,. \qquad \text{conv. per } |\alpha| > \frac{2}{3}; \quad \text{div. per } |\alpha| \leq \frac{2}{3}$$

3)*(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-(x+x^3)} - \cosh(x + x^4) + \sinh(x + x^3)}{2\sqrt{\cos(x + x^4)} - \log(1 - x + x^4) - 2 - \sin(x + \frac{x^3}{2})} \qquad = -\frac{48}{37}$$

4)*(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = e^{\left(\frac{1}{\log|2x-4|}\right)}\,.$$

5)*(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^3 (3x - 4)\log(6x - 11)e^{2x}\, dx \qquad = \frac{e^4}{4}\left(7e^2\log(7) - 3e^2 + 3\right)$$

6)*(5 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge il seguente integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sinh\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)(2x^3 + 4x + 3)}{\sqrt[\alpha]{(2x-4)^3}}\, dx\,. \qquad \alpha > 3$$

7)*(facoltativo, 3 punti)* Sia A un insieme ed $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su A. Dato $a \in A$, si chiama classe di equivalenza $[a]$ di a il seguente insieme:

$$[a] = \{x \in A \;:\; x\mathcal{R}a\}.$$

L'insieme composto da tutte le classi di equivalenza si chiama quoziente e si indica $A/\mathcal{R}$.
Si consideri la seguente relazione sui reali:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = \cos(y) \\ \sin(x) = \sin(y) \end{cases}\,.$$

Dimostrare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza sui reali e descrivere le classi di equivalenza e il quoziente $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Gestionale, 20/12/2016

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad \frac{1}{|x|} > 2 \right\} \qquad = (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$$

$$Int(A) = (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}),\ Der(A) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\ Fr(A) = \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\},\ \bar{A} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],$$

$$\inf A = -\frac{1}{2},\ \min A = \nexists,\ \sup A = \frac{1}{2},\ \max A = \nexists$$

A è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(4|\alpha| + 3)^n}{(n+1)5^n} . \qquad \text{conv. per } |\alpha| \le \frac{1}{2}; \quad \text{div. per } |\alpha| > \frac{1}{2}$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{4\log(\sqrt{1 + x^2 + x^4}) - e^{2x - x^4} + 1 + \sinh(2x + 3x^4)}{2\cos(3x - 2x^4) - 8 + 9e^{x^2 - 2x^4} - 3\cos(2x^2 + 3x^4)} \qquad = -\frac{52}{9}$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = -e^{\left(\frac{1}{\log|3-x|}\right)} .$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_2^3 (2x - 3)\log(6x - 11)e^{3x}\, dx \qquad = \frac{e^6}{9}\Big(7e^3\log(7) - 2e^3 + 2\Big)$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge il seguente integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{(3x^6 + 4x^2 + 2)\sqrt[\alpha]{(2x-6)^6}}\, dx . \qquad \alpha > 6$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Sia A un insieme ed $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su A. Dato $a \in A$, si chiama classe di equivalenza $[a]$ di a il seguente insieme:

$$[a] = \{x \in A \ : \ x\mathcal{R}a\}.$$

L'insieme composto da tutte le classi di equivalenza si chiama quoziente e si indica $A/\mathcal{R}$.
Si consideri la seguente relazione sui reali:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = \cos(y) \\ \sin(x) = \sin(y) \end{cases} .$$

Dimostrare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza sui reali e descrivere le classi di equivalenza e il quoziente $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Gestionale, 24/01/2017

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \quad x = |e^z - 1|, \quad z \in \mathbb{Z}\}\,.$$

$$Int(A) = \emptyset,\ Der(A) = \{1\},\ Fr(A) = A \cup \{1\},\ \bar{A} = A \cup \{1\},$$

$$\inf A = \min A = 0,\ \max A = \nexists,\ \sup A = +\infty$$

A non è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2)*(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\log n} - 2^n \qquad = -\infty$$

3)*(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(2x - x^2) + \cosh(x^3 - x) - \log(1 + 2x) - e^{\frac{3}{2}x^2}}{\sqrt{4 + x^2} - \sinh(2x + x^3) - 2e^{-x+3x^2}} \qquad = 0$$

4)*(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{1-x}}{|2 - x|}\,.$$

5)*(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x}}\,dx \qquad = \frac{14}{3} + 8\log\left(\frac{2}{3}\right)$$

6)*(5 punti)* Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{3\alpha} + x^2}{e^{|\alpha|x^2} + x^3 - 1}\,dx. \qquad \alpha > \frac{1}{3}$$

7)*(facoltativo, 3 punti)* Si consideri l'equazione in $x \in \mathbb{R}$

$$3x^5 + 4x^3 + 2x - \frac{1}{2^n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un'unica soluzione $x_n \in \mathbb{R}$ e calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Gestionale, 24/01/2017

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = \frac{\pi}{2} - |\arctan(z)|, \quad z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset,\ Der(A) = \{0\},\ Fr(A) = A \cup \{0\},\ \bar{A} = A \cup \{0\},$$

$$\inf A = 0,\ \min A = \nexists,\ \sup A = \max A = \frac{\pi}{2}$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2)*(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} 3^n - n^{\sqrt{n}} \qquad = +\infty$$

3)*(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 - 2x^2 + x^3) - \sinh(3x + 2x^2) + \cos(2x + x^2) - e^{-3x+x^2}}{\cosh(2x^2 + x^4) + 3e^{x^2-x^3} - 4\sqrt{1 + \frac{3}{2}x^2}} \qquad = +\infty$$

4)*(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{x-1}}{|2 + x|}\ .$$

5)*(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^{64} \frac{1}{\sqrt[6]{x^5} - 9\sqrt{x}}\, dx \qquad = 6 + 9\log\left(\frac{2}{5}\right)$$

6)*(5 punti)* Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{4\alpha} + x^2}{e^{|\alpha|x^2} + x^4 - 1}\, dx. \qquad \alpha > \frac{1}{4}$$

7)*(facoltativo, 3 punti)* Si consideri l'equazione in $x \in \mathbb{R}$

$$3x^5 + 4x^3 + 2x - \frac{1}{2^n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un'unica soluzione $x_n \in \mathbb{R}$ e calcolare $\lim_{n \to +\infty} x_n$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Gestionale, 07/02/2017

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \quad x^3 \leq -2x^2\right\} \qquad = (-\infty, -2] \cup \{0\}$$

$$Int(A) = (-\infty, -2),\ Der(A) = (-\infty, -2],\ Fr(A) = \{-2, 0\},\ \bar{A} = A,$$
$$\inf A = -\infty,\ \min A = \nexists,\ \sup A = \max A = 0$$

A non è aperto, è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2)*(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!(2n+3)^2 - 2^{2n}\sin(n^2)}{(3n+4)\ (n+1)! - e^n \cos(n^3)} \qquad = \frac{4}{3}$$

3)*(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(\sin(2x+x^2) - \log(1-x)) - e^{5x^2} + \cosh(2x)}{x(\sqrt{1-2x^2} - 2e^{-x}) + \sinh(x - 2x^2)} \qquad = -\frac{9}{11}$$

4)*(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{3x^4 + 2x}\ .$$

5)*(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2-3}{(x-2)(x^2-6x+8)}\, dx \qquad = \frac{1}{4}\left(9\log(2) + 13\log\left(\frac{3}{4}\right) - 1\right)$$

6)*(5 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha \geq 0$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^{2\alpha})}{x^2 + \alpha\sqrt[3]{x}}\, dx. \qquad \alpha > 0$$

7)*(facoltativo, 3 punti)* Si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}\ , n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\ ,$$

e sia $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$. Provare che vale la formula di ricorrenza

$$2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + xf_n(x)\ ,$$

e scrivere esplicitamente F_3 .

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Gestionale, 07/02/2017

MATRICOLA:..........................**NOME e COGNOME**: . . . .

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \quad -x^2 < x^3\right\} \qquad = (-1,0) \cup (0,+\infty)$$

$$Int(A) = A,\ Der(A) = [-1,+\infty),\ Fr(A) = \{-1,0\},\ \bar{A} = [-1,+\infty),$$
$$\inf A = -1,\ \min A = \nexists,\ \sup A = +\infty,\ \max A = \nexists$$

A è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2)*(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n \cos(n) - n!(2n-1)^3}{(2n+1)^2\ (n+1)! + 3^{3n}\sin(n^2)} \qquad = -2$$

3)*(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(2\log(1-2x) + \sinh(x-2x^2)) + e^{x^2} - \cos(2x)}{x(\cosh(x-x^2) - \sqrt{1-2x}) - \sin(x^2-x^3)} \qquad = -3$$

4)*(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{2x^4 - 4x}\ .$$

5)*(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^2 \frac{x^2-2}{(x-3)(x^2-8x+15)} \qquad = \frac{1}{12}\Big(126\log(3) - 69\log(5) - 28\Big)$$

6)*(5 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha \geq 0$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^{3\alpha})}{x^3 + \alpha\sqrt[4]{x}}\, dx. \qquad \alpha > 0$$

7)*(facoltativo, 3 punti)* Si consideri la funzione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}\ , n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\ ,$$

e sia $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$. Provare che vale la formula di ricorrenza

$$2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + xf_n(x)\ ,$$

e scrivere esplicitamente F_3 .

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Gestionale, 12/06/2017

MATRICOLA:.............................**NOME e COGNOME**: . . . .

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \quad (x^2-1)^2 < 1\} \qquad = (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, +\sqrt{2})$$

$$Int(A) = A,\ Der(A) = [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}],\ Fr(A) = \{-\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2}\},\ \bar{A} = [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}],$$
$$\inf A = -\sqrt{2},\ \min A = \nexists,\ \sup A = +\sqrt{2},\ \max A = \nexists$$

A è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)! \cos(1 + \frac{\cos n}{n}) n^2 + \sqrt[n]{3^{2n+1}}}{e^{5n + \arctan(n^2)} + (n+3)! \sin(1 + \frac{\sin n}{n})} \qquad = \frac{\cos(1)}{\sin(1)}$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x - x^3) + 2\cos(x^2) - \sqrt{4 - 8x^2} - \tan(x + 2x^2)}{\cosh(x + x^2) - e^{x + x^2} - x^3 + \sinh(x + x^2)} \qquad = \frac{3}{2}$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \left(\frac{1}{(1 - |x|)^2} - 1 \right)^2 .$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^e \frac{(x^2 - 3x + 1)\log x}{x}\, dx \qquad = \frac{e^2 - 9}{4}$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha} \sin(\frac{1}{x^{3\alpha}})}{e^{4\alpha x} - 1}\, dx. \qquad \forall \alpha$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni $x_1, x_2 \in I$ vale

$$f\left((1-t)x_1 + tx_2\right) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \qquad \forall t \in [0,1].$$

Dimostrare che se I è aperto allora f è continua. Inoltre, scrivere esplicitamente una funzione convessa ma non continua.

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Gestionale, 12/06/2017

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \quad (x^2-1)^2 \geq 1\} \qquad = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [+\sqrt{2}, +\infty)$$

$$Int(A) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (+\sqrt{2}, +\infty),\ Der(A) = A \setminus \{0\},\ Fr(A) = \{-\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2}\},\ \bar{A} = A,$$

$$\inf A = -\infty,\ \min A = \nexists,\ \sup A = +\infty,\ \max A = \nexists$$

A non è aperto, è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2)*(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{4n+\arctan(3n)} + (n+2)! \cos(1 + \frac{\sin n}{n})}{n! \sin(1 + \frac{\cos n}{n}) n^2 + \sqrt[n]{4^{3n+1}}} \qquad = \frac{\cos(1)}{\sin(1)}$$

3)*(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x + x^3) - 3\cos(x^2) + \sqrt{9 + 18x^2} - \tan(x + 3x^2)}{\sinh(x - x^2) - e^{x - x^2} + x^3 + \cosh(x - x^2)} \qquad = \frac{1}{2}$$

4)*(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{(|x|-1)^2}\right)^2 .$$

5)*(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^e \frac{(x^2 + 2x - 1)\log x}{x}\, dx \qquad = \frac{e^2+7}{4}$$

6)*(5 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha} \sin(\frac{1}{x^{4\alpha}})}{e^{3\alpha x} - 1}\, dx. \qquad \forall \alpha$$

7)*(facoltativo, 3 punti)* Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni $x_1, x_2 \in I$ vale

$$f\left((1-t)x_1 + tx_2\right) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \qquad \forall t \in [0,1].$$

Dimostrare che se I è aperto allora f è continua. Inoltre, scrivere esplicitamente una funzione convessa ma non continua.

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Gestionale, 11/07/2017

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad 0 \leq \frac{x-1}{|2-x|} < 2 \right\} \qquad = [1, \frac{5}{3}) \cup (3, +\infty)$$

$$Int(A) = (1, \frac{5}{3}) \cup (3, +\infty),\ Der(A) = [1, \frac{5}{3}] \cup [3, +\infty),\ Fr(A) = \{1, \frac{5}{3}, 3\},\ \bar{A} = [1, \frac{5}{3}] \cup [3, +\infty),$$

$$\inf A = 1,\ \min A = 1,\ \sup A = +\infty,\ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{(n^2+1)} \arctan\left(e^{n^2+1}\right)}{(n+2)! \arctan\left((n+2)!\right)} \qquad = +\infty$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} x \frac{\sin(3x - x^2) - \sinh(3x - x^2)}{\cos(2x^2 + x^3) - \cosh(2x^2 + x^3)} \qquad = \frac{9}{4}$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\log 4 - \log(x^2)}\ .$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x+2)(x^2+4x+3)}\, dx \qquad = \log\left(\frac{9}{8}\right)$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{(\sin(x))^\alpha}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^{2\alpha}}\, dx. \qquad -1 < \alpha < \frac{1}{2}$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

Dimostrare che f è differenziabile ma $f \notin C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Inoltre provare che il punto $x_0 = 0$ è un punto di minimo per il quale non esiste nessun intorno in cui la funzione sia crescente a destra di x_0 e decrescente a sinistra di x_0.

Prova scritta di Analisi Matematica T-A, Ingegneria Gestionale, 11/09/2017

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x-2|} \geq 1 \right\} \qquad = [\frac{5}{4}, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$Int(A) = (\frac{5}{4}, 2) \cup (2, +\infty),\ Der(A) = [\frac{5}{4}, +\infty),\ Fr(A) = \{\frac{5}{4}, 2\},\ \bar{A} = [\frac{5}{4}, +\infty),$$

$$\inf A = \min A = \frac{5}{4},\ \ \sup A = +\infty,\ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2) *(4 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n+2)^3(n!)^3 + (5n+2)^2\,(e^n)^3}{(\arctan(e^n))^3 + ((n+1)!)^3} \qquad = 27$$

3) *(6 punti)* Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin(3x+3x^3) - \arctan(6x)}{\cos(2x-12x^2) - e^{-2x^2+x^3}} \qquad = 3$$

4) *(7 punti)* Studiare la seguente funzione

$$f(x) = |\log(|x-1|)| - 1\ .$$

5) *(5 punti)* Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}\, dx \qquad = \frac{\pi}{4}$$

6) *(5 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right)}{e^{\sqrt{x}}-1}\, dx. \qquad \forall \alpha > 0$$

7) *(facoltativo, 3 punti)* Scrivere esplicitamente una funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ che non ammetta primitiva, giustificando la risposta.