

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 19/12/2017

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

Ingegneria chimica e biochimica

Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \log \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right), n \in \mathbb{N}, n > 1 \right\}.$$

2)(3 punti) Studiare il seguente limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(4n) \frac{(n!)^2 \cos(2n)}{3^{(n^2)} + n^n \sin(3n)}.$

3)(4 punti) Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin(x^3(x+2)) + 1 - 4 \tan(x \log(1+x^2)) - \cos(x^2(x-1))}{\sqrt[3]{\cosh(x^2) - e^{x \sin(x^2(x+3))}} + \sinh(x^3(x^2+3))}.$$

4) (5 punti) Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = |2 \log(3|x|)| - 4x$.

5) (4 punti) Calcolare il seguente integrale: $\int_1^e \frac{\log(x)(4x+10)}{(x^2+5x+6)^2} dx$.

6) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\int_0^{+\infty} \frac{x^5 + x^{2\alpha+1}}{x^{10} + \sin(\sqrt{x})} dx$.

7)(4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n (\alpha - 1)^n \log \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)}{\log(n^6)}.$$

8)(3 punti) Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} : $z^3 \bar{z}^2 + 2z^3 - \bar{z}^2 = 2$.

9)(facoltativo, 3 punti) Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Dimostrare che la successione $a_n = h_n - \log(n+1)$ converge. Inoltre provare che $\{a_n\}$ è positiva e crescente. Infine, sia $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, mostrare che $0 < \gamma < 1$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 19/12/2017

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

Ingegneria chimica e biochimica

Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \sin \left(\frac{(-1)^n}{n^2} + \pi \right), n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\}.$$

2)(3 punti) Studiare il seguente limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(3n) \frac{n^n \sin(2n)}{(n!)^2 \cos(4n) + 2^{(n^2)}}.$

3)(4 punti) Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5\sqrt[5]{e^{x^2}} - \cosh(x^2(x^3 - 2)) - 4 + 2 \log(\cos(x(2x^2 - 1)))}{\tan(x^2(x^2 + 2)) + \cos(x(x^2 - 2)) - e^{x^2} \sinh(x^2)}.$$

4) (5 punti) Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = 2x - |3 \log(4|x|)|$.

5) (4 punti) Calcolare il seguente integrale: $\int_2^e \frac{(6x + 3) \log(x - 1)}{(x^2 + x)^2} dx$.

6) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\int_0^{+\infty} \frac{x^4 + x^{\alpha-1}}{x^6 + \sin(x^2)} dx$.

7) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} (\alpha - 2)^n \left(\sqrt[2]{1 + \frac{1}{n^\alpha}} - 1 \right)}{\log(n^5)} .$$

8) (3 punti) Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} :

$$2z^3 \bar{z}^2 + 18z^3 + \bar{z}^2 = -9 .$$

9) (facoltativo, 3 punti) Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Dimostrare che la successione $a_n = h_n - \log(n+1)$ converge. Inoltre provare che $\{a_n\}$ è positiva e crescente. Infine, sia $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, mostrare che $0 < \gamma < 1$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 23/01/2018

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

Ingegneria chimica e biochimica

Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |\log(x - 2) - 1| \geq 2\}.$$

2)(3 punti) Studiare il seguente limite:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k + 5)^2 .$$

3)(4 punti) Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + x - x^4) + e^{2x^4 - x} - 2 \cos(\arctan(x - x^3)) + \sqrt{1 - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3}}{e^{\sin(2x - x^4)} - \cos(x - x^2) + 1 - \tan(2x + 4x^4) - 1 - \frac{1}{6} \arctan(15x^2 - 16x^3)} .$$

4) (5 punti) Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = 5|x|^{\frac{1}{5}}(x+1)^2$.

5) (4 punti) Calcolare il seguente integrale: $\int_0^{\log 2} \frac{5e^{3x} + 7e^{2x} + 5e^x}{(e^{2x} + 2e^x + 2)(e^x + 1)} dx$.

6) (4 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge l'integrale: $\int_0^{+\infty} \frac{3x^2 \sin(x^3)}{x^{4\alpha}} dx$.

7)(4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie:
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\alpha - 1)^n}{\log n} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{(n^2)} .$$

8)(3 punti) Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} :
$$6z - \frac{4}{1 + 2\bar{z}} = 3 .$$

9)(facoltativo, 3 punti) Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, l'insieme definito da

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0\} .$$

Dimostrare che la funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, con $f(z) = z^4$, è biunivoca.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 23/01/2018

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

Ingegneria chimica e biochimica

Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |e^{\sqrt{x-2}} - 1| < 2 \right\}.$$

2)(3 punti) Studiare il seguente limite:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

3)(4 punti) Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{x-x^4} - \log(1+2x-x^3) + 2 \cos(\sinh(x-3x^3)) - 4\sqrt{1+x^2 - \frac{2}{3}x^3}}{e^{\sinh(x-x^4)} - \cosh(2x+x^3)+1 - \sinh(x+x^3) - 1 + \frac{1}{6} \arctan(9x^2 + 17x^3)}.$$

4) (5 punti) Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = 3|x|^{\frac{1}{3}}(1-x)^2$.

5) (4 punti) Calcolare il seguente integrale: $\int_1^e \frac{6 \log^2(x) + 3 \log(x) + 1}{(x \log^2(x) + x \log(x) + x)(\log(x) + 1)} dx$.

6) (4 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge l'integrale: $\int_0^{+\infty} \frac{4x^3 \sin(x^4)}{x^{3\alpha}} dx$.

7) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha + 1)^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{(n^2)} .$$

8) (3 punti) Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} :
$$4\bar{z} + \frac{3}{1-2z} = -2 .$$

9) (facoltativo, 3 punti) Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, l'insieme definito da

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0\} .$$

Dimostrare che la funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, con $f(z) = z^4$, è biunivoca.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 13/02/2018

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

Ingegneria chimica e biochimica

Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| 3e^{-|x|} - 2 \right| \geq 1 \right\}.$$

2)(3 punti) Studiare il seguente limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{(2n)! \pi + (n! n)^2}{\log((2n)^n) + (2n)! 4} \right)$.

3)(4 punti) Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x - x^2) - \sqrt[5]{1 + 5x - 10x^2} + e^{-3x^2}}{\log(1 - x + 2x^2) + e^x - \cosh(2x - x^2)}.$$

4) (5 punti) Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \sqrt[4]{|x^4 - 1| + x^4} + 2|x|$.

5) (4 punti) Calcolare il seguente integrale: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{5 \sin(3x)} \cos(\pi \sin(3x)) \cos(3x) dx$.

6) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\int_2^5 (25 - x^2)^{3-\alpha} (x^2 + 1)^\alpha (x^2 - 4)^{3\alpha} dx$.

7) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5\alpha + 2}{7} \right)^n \left(\frac{5}{3n^4 + 7|\alpha|} \right)^{\frac{1}{4}} .$$

8) (3 punti) Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} :
$$(z^3 + 27i)(3z + 5 - 4\bar{z} + i) = 0 .$$

9) (facoltativo, 3 punti) Eventualmente sul retro di questo foglio.

Scrivere esplicitamente una funzione integrabile secondo Riemann, $f : [2, 7] \rightarrow \mathbb{R}$, e la sua funzione

integrale $I_f(x) = \int_2^x f(t) dt$, tali che:

- $f \notin C([2, 7]; \mathbb{R})$;
- $I_f \in C^1([2, 7]; \mathbb{R})$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 13/02/2018

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

Ingegneria chimica e biochimica

Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| 4e^{-|x|} - 3 \right| < 1 \right\}.$$

2)(3 punti) Studiare il seguente limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{(n!)^3 + (3n)! \pi}{(3n)! 3 + \log((3n)^n)} \right)$.

3)(4 punti) Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x - x^2) - e^x - \log(1 - x - 2x^2)}{\sinh(2x + 2x^2) - \sqrt[4]{1 + 8x - 4x^2} + e^{-9x^2}}.$$

4) (5 punti) Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \sqrt[6]{x^6 - |x^6 - 1|} + 3|x|$.

5) (4 punti) Calcolare il seguente integrale: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos(2x)} \sin(\pi \cos(2x)) \sin(2x) dx$.

6) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\int_3^4 (16 - x^2)^{5\alpha} (x^2 + 1)^\alpha (x^2 - 9)^{5-\alpha} dx$.

7) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{7+2\alpha}{5} \right)^n \left(\frac{7}{2n^2+3|\alpha|} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

8) (3 punti) Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} :
$$(z^4 + 16)(7\bar{z} - i + 4z - 3) = 0 .$$

9) (facoltativo, 3 punti) Eventualmente sul retro di questo foglio.

Scrivere esplicitamente una funzione integrabile secondo Riemann, $f : [2, 7] \rightarrow \mathbb{R}$, e la sua funzione

integrale $I_f(x) = \int_2^x f(t) dt$, tali che:

- $f \notin C([2, 7]; \mathbb{R})$;
- $I_f \in C^1([2, 7]; \mathbb{R})$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 19/06/2018

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

Ingegneria chimica e biochimica

Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |\sqrt{e^x - e} - 1| > 0\}.$$

2)(3 punti) Studiare il seguente limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan \left(\frac{(n+4)! + 4^{5n+\log n}}{\sqrt[3]{3n^4 + \sin n} - (n+2)!} \right).$

3)(4 punti) Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x - x^3) + e^{7x^2 - 2x} - (1 + x^2)^9}{\log(1 - x^2 + x^4) + \cosh(2x - x^2) - e^{x^2 + x^3}}.$$

4)(5 *punti*) Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \left| \log \left(x^2 + \frac{3}{4} \right) \right|$.

5)(4 *punti*) Calcolare il seguente integrale: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) (\sin(x) + 3)}{\cos^2(x) + 3} dx$.

6)(4 *punti*) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^{3\alpha})}{x^{1+|\alpha|}} dx$.

7) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha^2 + \frac{|\alpha|}{n} \right)^{\frac{n}{2}} .$$

8) (3 punti) Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} :
$$(z + \bar{z})(z^3 + i)(\bar{z} + i)^2 = 0 .$$

9) (facoltativo, 3 punti) Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $g : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{|x|-1}$. Dimostrare che vale la seguente formula per le derivate successive:

$$g^{(n)}(x) = (-\operatorname{sgn}(x))^n n! (g(x))^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Provare quindi che la seguente funzione $f(x) = \begin{cases} e^{g(x)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 16/07/2018

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

Ingegneria chimica e biochimica

Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \log \left(2 - \frac{1}{n^2} \right), n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

2)(3 punti) Studiare il seguente limite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(-n^2) ((n!)^2 + ne^n)}{(2n)! + e^{2n}}.$

3)(4 punti) Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos(x - x^2) - \sinh(x + x^2) + \log(1 + x^2 - x^3)}{x^2 \cosh(x + x^2) - x \sin(x - x^2)}.$$

4) (5 punti) Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = |1 - \sqrt{2 - e^x}|$.

5) (4 punti) Calcolare il seguente integrale: $\int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} dx$.

6) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\int_0^1 \frac{\sin(x^{2|\alpha|})}{\sqrt{x^3}(1-x)^{2\alpha}} dx$.

7) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha + 1}{n(\log(n))^\alpha}.$$

8) (3 punti) Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} : $(z + |z|)(\bar{z}^4 + 4) = 0$.

9) (facoltativo, 3 punti) Eventualmente sul retro di questo foglio.

Siano $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{\pi}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$. Scrivere esplicitamente una funzione $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n).$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 04/09/2018

MATRICOLA:.....NOME e COGNOME:

Ingegneria chimica e biochimica

Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

1)(3 punti) Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 4| > |2 - x|\}.$$

2)(3 punti) Studiare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log(n)) + n^3 \cos(n^2) - n^4 \arctan(n!)}{\sqrt[n]{e^{2n} + n^2} + n^5 \sin\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

3)(4 punti) Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^2 - x) + \cosh(x^2) - \log(1 - x^2 + x) - e^{-2x}}{\cos(x^2 - x) - \sinh(x + x^2) - \sqrt{1 - x^2} - 2x}.$$

4) (5 punti) Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = |x^2 - 9| - |5 - x| + 2$.

5) (4 punti) Calcolare il seguente integrale: $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(3x^2) e^{4x^2} dx$.

6) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha + \sqrt{x}}{x^3 + x} dx$.

7) (4 punti) Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 - |\alpha|}{5} \right)^n \frac{\log(n)}{n}.$$

8) (3 punti) Risolvere la seguente equazione in \mathbb{C} :
$$(3\bar{z} + z - 5i + 3)((z + 1)^3 + 8) = 0.$$

9) (facoltativo, 3 punti) Eventualmente sul retro di questo foglio.
Scrivere esplicitamente una funzione $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f \in C^7([1, 3]; \mathbb{R})$ ma $f \notin C^8([1, 3]; \mathbb{R})$.