Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 19/12/2017

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right), \ n \in \mathbb{N}, \ n > 1 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset, \ Der(A) = \{0\}, \ Fr(A) = A \cup \{0\}, \ \bar{A} = A \cup \{0\}$$

$$\inf A = \min A = \log(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}), \ \sup A = \max A = \log(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n \to +\infty} \sin(4n) \frac{(n!)^2 \cos(2n)}{3^{(n^2)} + n^n \sin(3n)} \qquad = 0$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\sin(x^3(x+2)) + 1 - 4\tan(x\log(1+x^2)) - \cos(x^2(x-1))}{\sqrt[3]{\cosh(x^2)} - e^{x\sin(x^2(x+3))} + \sinh(x^3(x^2+3))} \qquad = -3$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = |2\log(3|x|)| - 4x$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_1^e \frac{\log(x)(4x+10)}{(x^2+5x+6)^2}\,dx$.

$$\left[\frac{2\log(x+3)+\log(x)}{3} - \log(x+2) - \frac{2\log x}{x^2+5x+6}\right]_1^e$$

$$= \frac{2}{3}\log\left(\frac{e+3}{4}\right) - \log\left(\frac{e+2}{3}\right) + \frac{1}{3} - \frac{2}{e^2+5e+6}$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5+x^{2\alpha+1}}{x^{10}+\sin(\sqrt{x})}\,dx$.

$$-\frac{3}{4} < \alpha < 4$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n\,(\alpha-1)^n\ \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\log\left(n^6\right)}$.

$$0 < \alpha < 2$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $z^3\,\overline{z}^2 + 2z^3 - \overline{z}^2 = 2$.

$$\left\{\pm i\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Dimostrare che la successione $a_n = h_n - \log(n+1)$ converge. Inoltre provare che $\{a_n\}$ è positiva e crescente. Infine, sia $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, mostrare che $0 < \gamma < 1$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 19/12/2017

MATRICOLA:...........................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2} + \pi\right), \ n \in \mathbb{N}, \ n > 0 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset, \ Der(A) = \{0\}, \ Fr(A) = A \cup \{0\}, \ \bar{A} = A \cup \{0\}$$

$$\inf A = \min A = \sin(\pi + \frac{1}{4}), \ \sup A = \max A = \sin(\pi - 1)$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite:
$$\lim_{n\to+\infty} \cos(3n)\frac{n^n \sin(2n)}{(n!)^2\cos(4n) + 2^{(n^2)}} \qquad = 0$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5\sqrt[5]{e^{x^2}} - \cosh(x^2(x^3-2)) - 4 + 2\log(\cos(x(2x^2-1)))}{\tan(x^2(x^2+2)) + \cos(x(x^2-2)) - e^{x^2\sinh(x^2)}} \qquad = \frac{29}{40}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $\qquad f(x) = 2x - |3\log(4|x|)|$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\qquad \displaystyle\int_2^e \frac{(6x+3)\log(x-1)}{(x^2+x)^2}\,dx$.

$$\left[\frac{3\log(x^2-1)}{2} - 3\log(x) - \frac{3\log(x-1)}{x^2+x}\right]_2^e$$

$$= \frac{3}{2}\log\left(e^2-1\right) - 3\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3 - \frac{3\log(e-1)}{e^2+e}$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4+x^{\alpha-1}}{x^6+\sin\left(x^2\right)}\,dx$.

$$2 < \alpha < 6$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\,(\alpha-2)^n \left(\sqrt[2]{1+\frac{1}{n^\alpha}}-1\right)}{\log\left(n^5\right)} \, .$$

$$1 \leq \alpha \leq 3$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $\quad 2z^3\,\overline{z}^2 + 18z^3 + \overline{z}^2 = -9$.

$$\left\{ \pm 3i, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Dimostrare che la successione $a_n = h_n - \log(n+1)$ converge. Inoltre provare che $\{a_n\}$ è positiva e crescente. Infine, sia $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$, mostrare che $0 < \gamma < 1$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 23/01/2018

MATRICOLA:...........................**NOME e COGNOME:** . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \quad |\log(x-2) - 1| \geq 2\ \} = \big(2, 2+e^{-1}\big] \cup \big[2+e^3, +\infty\big)$$

$$Int(A) = \big(2, 2+e^{-1}\big) \cup \big(2+e^3, +\infty\big)\,,\ Der(A) = \big[2, 2+e^{-1}\big] \cup \big[2+e^3, +\infty\big)\,,$$

$$Fr(A) = \big\{2, 2+e^{-1}, 2+e^3\big\}\,,\ \bar{A} = \big[2, 2+e^{-1}\big] \cup \big[2+e^3, +\infty\big)$$

$$\inf A = 2,\ \min A = \nexists,\ \sup A = +\infty,\ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2)*(3 punti)* Studiare il seguente limite: $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k+5)^2 \qquad = \frac{1}{3}$

3)*(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+x-x^4) + e^{2x^4-x} - 2\cos(\arctan(x-x^3)) + \sqrt{1-2x^2-\frac{1}{3}x^3}}{e^{\sin(2x-x^4)-\cos(x-x^2)+1} - \tan(2x+4x^4) - 1 - \frac{1}{6}\arctan(15x^2-16x^3)} \qquad = \frac{-\frac{59}{24}}{-\frac{89}{12}} = \frac{59}{178}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = 5|x|^{\frac{1}{5}}(x+1)^2$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{5e^{3x} + 7e^{2x} + 5e^x}{(e^{2x} + 2e^x + 2)(e^x + 1)}\, dx$.

$$\left[\log\left(e^{2x} + 2e^x + 2\right) + 3\log\left(e^x + 1\right) - 3\arctan\left(e^x + 1\right)\right]_0^{\log 2}$$

$$= \log\left(\frac{27}{4}\right) + 3\arctan(2) - 3\arctan(3)$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3x^2 \sin(x^3)}{x^{4\alpha}}\, dx$.

$$0 < \alpha < \frac{3}{2}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\alpha-1)^n}{\log n} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(n^2)} .$$

$$1 - \frac{1}{e} \leq \alpha < 1 + \frac{1}{e}$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $$6z - \frac{4}{1+2\overline{z}} = 3 .$$

$$\left\{ \pm\sqrt{\frac{7}{12}} \right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, l'insieme definito da

$$\Omega := \{ z \in \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0 \} .$$

Dimostrare che la funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con $f(z) = z^4$, è biunivoca.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 23/01/2018

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad |e^{\sqrt{x-2}} - 1| < 2 \ \right\} = \left[2, 2 + \log^2(3)\right)$$

$$Int(A) = \left(2, 2 + \log^2(3)\right), \ Der(A) = \left[2, 2 + \log^2(3)\right],$$

$$Fr(A) = \left\{2, 2 + \log^2(3)\right\}, \ \bar{A} = \left[2, 2 + \log^2(3)\right]$$

$$\inf A = \min A = 2, \ \sup A = \log^2(3), \ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad = 1$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2e^{x-x^4} - \log(1 + 2x - x^3) + 2\cos(\sinh(x - 3x^3)) - 4\sqrt{1 + x^2 - \frac{2}{3}x^3}}{e^{\sinh(x-x^4) - \cosh(2x+x^3)+1} - \sinh(x + x^3) - 1 + \frac{1}{6}\arctan(9x^2 + 17x^3)} \qquad = \frac{\frac{19}{3}}{-\frac{59}{24}} = -\frac{152}{59}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = 3|x|^{\frac{1}{3}}(1-x)^2$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_1^e \frac{6\log^2(x)+3\log(x)+1}{\left(x\log^2(x)+x\log(x)+x\right)(\log(x)+1)}\,dx$.

$$\left[\log\left(\left|\log^2(x)+\log(x)+1\right|\right)+4\log\left(\left|\log(x)+1\right|\right)-\frac{8}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\ln(x)+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^e$$

$$=\log(48)-\frac{4\pi}{\sqrt{27}}$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{4x^3\sin(x^4)}{x^{3\alpha}}\,dx$.

$$0 < \alpha < \frac{8}{3}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha+1)^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n^2)} .$$

$$-e-1 \leq \alpha < e-1$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $$4\overline{z} + \frac{3}{1-2z} = -2 .$$

$$\left\{ \pm\sqrt{\frac{5}{8}} \right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, l'insieme definito da

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\} .$$

Dimostrare che la funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$, con $f(z) = z^4$, è biunivoca.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 13/02/2018

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad \left| 3e^{-|x|} - 2 \right| \geq 1 \ \right\} = (-\infty, -\log(3)] \cup \{0\} \cup [\log(3), +\infty)$$

$$Int(A) = (-\infty, -\log(3)) \cup (\log(3), +\infty)\,, \ Der(A) = (-\infty, -\log(3)] \cup [\log(3), +\infty)\,,$$

$$Fr(A) = \{-\log(3), 0, \log(3)\}\,, \ \bar{A} = A$$

$$\inf A = -\infty, \ \min A = \nexists, \ \sup A = +\infty, \ \max A = \nexists$$

A non è aperto, è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{(2n)!\, \pi + (n!\, n)^2}{\log((2n)^n) + (2n)!\, 4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x - x^2) - \sqrt[5]{1 + 5x - 10x^2} + e^{-3x^2}}{\log(1 - x + 2x^2) + e^x - \cosh(2x - x^2)} = \frac{-\frac{85}{6}}{\frac{23}{6}} = -\frac{85}{23}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \sqrt[4]{|x^4 - 1| + x^4} + 2|x|$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{5\sin(3x)} \cos(\pi \sin(3x)) \cos(3x) \; dx$.

$$\left[\frac{e^{5\sin(3x)} \left(\pi \sin(\pi \sin(3x)) + 5\cos(\pi \sin(3x))\right)}{3(\pi^2 + 25)} \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= -\frac{5e^5 + 5}{3\pi^2 + 75}$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\int_2^5 (25 - x^2)^{3-\alpha} (x^2 + 1)^{\alpha} (x^2 - 4)^{3\alpha} \; dx$.

$$-\frac{1}{3} < \alpha < 4$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5\alpha+2}{7}\right)^n \left(\frac{5}{3n^4+7|\alpha|}\right)^{\frac{1}{4}}$.

$$-\frac{9}{5} \leq \alpha < 1$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $(z^3+27i)(3z+5-4\bar{z}+i)=0$.

$$\left\{3i, 3\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right), 5-\frac{i}{7}\right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Scrivere esplicitamente una funzione integrabile secondo Riemann, $f : [2,7] \to \mathbb{R}$, e la sua funzione integrale $I_f(x) = \displaystyle\int_2^x f(t)\, dt$, tali che:

- $f \notin C([2,7];\mathbb{R})$;
- $I_f \in C^1([2,7];\mathbb{R})$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 13/02/2018

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad \left| 4e^{-|x|} - 3 \right| < 1 \right\} = (-\log(2), 0) \cup (0, \log(2))$$

$$Int(A) = A, \ Der(A) = [-\log(2), \log(2)]\,,$$

$$Fr(A) = \{-\log(2), 0, \log(2)\}\,, \ \bar{A} = [-\log(2), \log(2)]$$

$$\inf A = -\log(2), \ \min A = \nexists, \ \sup A = +\log(2), \ \max A = \nexists$$

A è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2)*(3 punti)* Studiare il seguente limite: $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{(n!\,n)^3 + (3n)!\,\pi}{(3n)!\,3 + \log((3n)^n)} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3)*(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x - x^2) - e^x - \log(1 - x - 2x^2)}{\sinh(2x + 2x^2) - \sqrt[4]{1 + 8x - 4x^2} + e^{-9x^2}} = \frac{\frac{25}{6}}{-\frac{98}{3}} = -\frac{25}{196}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \sqrt[6]{x^6 - |x^6 - 1|} + 3|x|$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3\cos(2x)} \sin(\pi\cos(2x)) \sin(2x)\ dx$.

$$-\left[\frac{e^{3\cos(2x)}\left(3\sin(\pi\cos(2x)) - \pi\cos(\pi\cos(2x))\right)}{2(\pi^2+9)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\left(e^3+1\right)\pi}{2\pi^2+18}$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_3^4 (16-x^2)^{5\alpha}(x^2+1)^{\alpha}(x^2-9)^{5-\alpha}\ dx$.

$$-\frac{1}{5} < \alpha < 6$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{7+2\alpha}{5}\right)^n \left(\frac{7}{2n^2+3|\alpha|}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

$$-6 \leq \alpha < -1$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $$(z^4+16)(7\bar{z}-i+4z-3)=0 .$$

$$\left\{\sqrt{2}(1 \pm i), \sqrt{2}(-1 \pm i), \frac{3}{11} - \frac{i}{3}\right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Scrivere esplicitamente una funzione integrabile secondo Riemann, $f : [2,7] \to \mathbb{R}$, e la sua funzione integrale $I_f(x) = \int_2^x f(t)\,dt$, tali che:

- $f \notin C([2,7];\mathbb{R})$;
- $I_f \in C^1([2,7];\mathbb{R})$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 19/06/2018

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \quad \left|\sqrt{e^x - e} - 1\right| > 0 \ \right\} = [1, \log(1+e)) \cup (\log(1+e), +\infty)$$

$$Int(A) = (1, \log(1+e)) \cup (\log(1+e), +\infty)\,, \ Der(A) = [1, +\infty)\,,$$

$$Fr(A) = \{1, \log(1+e)\}\,, \ \bar{A} = [1, +\infty)$$

$$\inf A = \min A = 1, \ \sup A = +\infty, \ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite:
$$\lim_{n \to +\infty} \quad \arctan\left(\frac{(n+4)! + 4^{5n+\log n}}{\sqrt[n]{3n^4 + \sin n} - (n+2)!}\right) \qquad = -\frac{\pi}{2}$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(2x - x^3) + e^{7x^2 - 2x} - (1+x^2)^9}{\log(1 - x^2 + x^4) + \cosh(2x - x^2) - e^{x^2 + x^3}} \qquad = \frac{-\frac{53}{3}}{-3} = \frac{53}{9}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $$f(x) = \left|\log\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\right| .$$

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)(\sin(x)+3)}{\cos^2(x)+3}\, dx .$$

$$\left[\frac{\log(\sin(x)+2) - 5\log(2-\sin(x))}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\log(3)}{4} + \log(2)$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x^{|3\alpha|}\right)}{x^{1+|\alpha|}}\, dx .$$

$$\forall\, \alpha \neq 0$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha^2 + \frac{|\alpha|}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

$$-1 < \alpha < 1$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $(z + \bar{z})(z^3 + i)(\bar{z} + i)^2 = 0$.

$$\left\{ i, \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right\} \cup \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) = 0\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $g : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{|x|-1}$. Dimostrare che vale la seguente formula per le derivate successive:

$$g^{(n)}(x) = (-\text{sgn}(x))^n n!\, (g(x))^{n+1}\,, \ n \in \mathbb{N}.$$

Provare quindi che la seguente funzione $f(x) = \begin{cases} e^{g(x)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 16/07/2018

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

□ Ingegneria chimica e biochimica □ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = \log\left(2 - \frac{1}{n^2}\right),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset,\ Der(A) = \{\log 2\},\ Fr(A) = A \cup \{\log 2\},\ \bar{A} = A \cup \{\log 2\}$$

$$\inf A = \min A = 0,\ \sup A = \log 2,\ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite: $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(-n^2)\left((n!)^2 + ne^n\right)}{(2n)! + e^{2n}} = 0$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos(x-x^2) - \sinh(x+x^2) + \log(1+x^2-x^3)}{x^2\cosh(x+x^2) - x\sin(x-x^2)} = \frac{-\frac{5}{3}}{1} = -\frac{5}{3}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \left|1 - \sqrt{2 - e^x}\right|$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2-4}\,dx$.

$$\left[x + \frac{3}{2}\log\left(\frac{|x-2|}{|x+2|}\right)\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\log(3)$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(x^{2|\alpha|}\right)}{\sqrt{x^3}(1-x)^{2\alpha}}\,dx$.

$$\alpha < -\frac{1}{4}\,, \quad \frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha+1}{n(\log(n))^{\alpha}}$.

$$\alpha > 1, \quad \alpha = -1$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $(z+|z|)(\bar{z}^4+4)=0$.

$$\{-x, 1 \pm i, -1 \pm i\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Siano $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{\pi}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$. Scrivere esplicitamente una funzione $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(0) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(b_n) .$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 04/09/2018

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \quad |x^2 - 4| > |2 - x|\right\} = (-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$Int(A) = A, \ Der(A) = (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty),$$

$$Fr(A) = \{-3, -1, 2\}, \ \bar{A} = (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$$

$$\inf A = -\infty, \ \min A = \nexists, \ \sup A = +\infty, \ \max A = \nexists$$

A è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite:
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log(\log(n)) + n^3 \cos(n^2) - n^4 \arctan(n!)}{\sqrt[n]{e^{2n} + n^2 + n^5 \sin\left(\frac{1}{n}\right)}} = -\frac{\pi}{2}$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2 - x) + \cosh(x^2) - \log(1 - x^2 + x) - e^{-2x}}{\cos(x^2 - x) - \sinh(x + x^2) - \sqrt{1 - x^2 - 2x}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = |x^2 - 9| - |5 - x| + 2$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x \ \sin(3x^2)\ e^{4x^2}\ dx$.

$$\left[\frac{e^{4x^2}\left(4\sin(3x^2) - 3\cos(3x^2)\right)}{50}\right]_0^{\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{3e^{4\pi} + 3}{50}$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha + \sqrt{x}}{x^3 + x}\ dx$.

$$0 < \alpha < 2$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-|\alpha|}{5}\right)^n \frac{\log(n)}{n} .$$

$$-6 \leq \alpha \leq 6$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $$(3\bar{z} + z - 5i + 3)((z+1)^3 + 8) = 0 .$$

$$\left\{-\frac{3}{4} - \frac{5}{2}i, -3, \pm i\sqrt{3}\right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Scrivere esplicitamente una funzione $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ tale che $f \in C^7\left([1,3];\mathbb{R}\right)$ ma $f \notin C^8\left([1,3];\mathbb{R}\right)$.