Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 18/12/2018

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = e^{\left((-1)^n \cdot \frac{2^n+1}{5^n+1}\right)}, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset, \ Der(A) = \{1\}, \ Fr(A) = A \cup \{1\}, \ \bar{A} = A \cup \{1\}$$

$$\inf A = \min A = e^{-\frac{1}{2}}, \ \sup A = \max A = e^{\frac{5}{26}}$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log(n^n + n!) - 2^{2n} + n^4 |\cos(n^n)|}{\left(4 + \dfrac{5}{n}\right)^n + |\sin(\log(n))|} \qquad = -\frac{1}{e^{\frac{5}{4}}}$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3\sin(x^2 + 2x) - 2\cosh(x - 2x^2) + 2e^{-x^2} - 6x\sqrt{1 - x^4}}{\cosh(2x^2 + x) - \sinh(x + x^3) + \log(1 + x + x^3) - e^{\frac{13}{6}x^3}} \qquad = \frac{-\frac{109}{12}}{\frac{19}{24}} = -\frac{218}{19}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \log\left(|x-2| - \left|x^2-1\right|\right)$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\log(2)} \frac{1}{\cosh(x)(\sinh(x)+1)}\, dx$.

$$\left[\frac{\log(\sinh(x)+1) + \arctan(\sinh(x)) - \log(\cosh(x))}{2}\right]_0^{\log(2)}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{7}{5}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{4x^4 + 7x^{2\alpha-1}}{(\sqrt[4]{|x-6|})(5x^5 + \sin(x^3))}\, dx$.

$$\frac{3}{2} < \alpha < \frac{21}{8}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (9\alpha + 18)^n \sin\left((\alpha+2)^n\right)$.

$$-\frac{7}{3} < \alpha < -\frac{5}{3}$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $\left(4z^3 + i\right)\ Re\left(\overline{z}^2 + i\right) = 0$.

$$\left\{\frac{i}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right), \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\right\} \bigcup \{z \in \mathbb{C}\ :\ Re(z) = \pm Im(z)\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda$. Dimostrare che vale $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lambda$.
Inoltre, se $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, provare che risulta $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \lambda$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 18/12/2018

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = \arctan\left((-1)^n \cdot \frac{n^3+1}{n^2+1} \right),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset,\ Der(A) = \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\},\ Fr(A) = A \cup \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\},\ \bar{A} = A \cup \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\inf A = -\frac{\pi}{2},\ \min A = \nexists,\ \sup A = \frac{\pi}{2},\ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^n + n!} + \arctan(n^4)|\cos(n^n)| + 3^{2n}}{\left(9 + \frac{8}{n}\right)^n + |\sin(\log(n))|} = \frac{1}{e^{\frac{8}{9}}}$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cosh(x^2+x) - \sin(x+x^3) + \log(1+x+3x^3) - e^{\frac{7}{2}x^3}}{\sinh(x-3x^2) - 2\cos(x+2x^2) + 2e^{x^2} - x\sqrt{1+\frac{25}{3}x^2}} = \frac{-\frac{65}{24}}{\frac{41}{12}} = -\frac{65}{82}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \log\left(|x-1| - \left|x^2-4\right|\right)$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_{\log(2)}^{\log(3)} \frac{1}{\sinh(x)\,(\cosh(x)+1)}\,dx$.

$$\left[\frac{\log(\cosh(x)-1) - \log(\cosh(x)+1)}{4} + \frac{1}{2\cosh(x)+2}\right]_{\log(2)}^{\log(3)}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{144}$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{5x^3 + 6x^{3\alpha-2}}{(\sqrt[3]{|x-4|})(4x^4 + \sin(x^2))}\,dx$.

$$1 < \alpha < \frac{16}{9}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (4\alpha - 12)^n \sin\left((\alpha - 3)^n\right)$.

$$\frac{5}{2} < \alpha < \frac{7}{2}$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $\left(3z^4 + 1\right)\ Im\left(\overline{z}^2 + 1\right) = 0$.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \right), \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right\} \bigcup \{ z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) = 0 \quad \vee \quad Im(z) = 0 \}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Siano $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ e $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lambda$. Dimostrare che vale $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lambda$.
Inoltre, se $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, provare che risulta $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \lambda$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 15/01/2019

MATRICOLA:...........................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \quad |x^2 - 1| \le |1 + x|\right\} = \{-1\} \cup [0, 2]$$

$$Int(A) = (0, 2),\ Der(A) = [0, 2],$$

$$Fr(A) = \{-1, 0, 2\},\ \bar{A} = A$$

$$\inf A = \min A = -1,\ \sup A = \max A = 2$$

A non è aperto, è chiuso, è limitato, è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(3^n \sin(n!) + 3^{n+1}\right)}{n} = \log(3)$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cosh(x^2 + x) - \log(\cos(2x)) - \sin(x^2 + 2x^3) - 2e^{x^2}}{e^{x^4 - x^2} - \sqrt{1 - \log(\cosh(2x))}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{4}{3}} = \frac{17}{16}$$

4)*(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $$f(x) = \frac{|x^2 - 9|}{x - 2}\ .$$

5)*(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $$\int_1^2 \frac{\log(x+2)}{\sqrt{x}}\, dx\ .$$

$$\left[2\left(\sqrt{x}\ln(x+2) - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]_1^2$$

$$= -2^{\frac{5}{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2^{\frac{3}{2}}\ln(4) - 2\ln(3) + \sqrt{2}\pi - 2^{\frac{5}{2}} + 4$$

6)*(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^{3|\alpha|}}\right)}{\sqrt[3]{x + 3\alpha^2 x^2}}\, dx\ .$$

$$|\alpha| > \frac{1}{9}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(5+n)^{5\alpha}}{\left(\frac{1}{5}+\alpha\right)^n}$.

$$\alpha \leq -\frac{6}{5}, \quad \alpha > \frac{4}{5}$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $2z^2 + \overline{z}^2 + 2iRe(z) = 0$.

$$\{0, 1-i, -1-i\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile,tale che $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrare che $\lambda = 0$. Trovare un esempio per cui $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\nexists \lim_{x \to +\infty} f'(x)$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 15/01/2019

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad |x-2| \geq |x^2-4| \right\} = [-3,-1] \cup \{2\}$$

$$Int(A) = (-3,-1),\ Der(A) = [-3,-1],$$

$$Fr(A) = \{-3,-1,2\},\ \bar{A} = A$$

$$\inf A = \min A = -3,\ \sup A = \max A = 2$$

A non è aperto, è chiuso, è limitato, è compatto.

2)*(3 punti)* Studiare il seguente limite: $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(4^{n+1} - 4^n \cos(n^n)\right)}{n} \qquad = \log(4)$

3)*(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos(2x)) - 2\cos(x^2+x) - \sinh(x^2+2x^3) + 2e^{x^2}}{\sqrt{1+\log(\cos(2x))} - e^{x^4-x^2}} \qquad = \frac{\frac{7}{12}}{-\frac{8}{3}} = -\frac{7}{32}$$

4)*(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4|}{1 - x}$.

5)*(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_1^3 \frac{\log(x+3)}{\sqrt{x}}\, dx$.

$$\left[2\left(\sqrt{x}\ln(x+3) - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]_1^3$$

$$= 2\sqrt{3}\ln(6) - 2\ln(4) + \sqrt{3}\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 4\sqrt{3} + 4$$

6)*(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^{5|\alpha|}}\right)}{\sqrt[5]{x + 5\alpha^2 x^2}}\, dx$.

$$|\alpha| > \frac{3}{25}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+n)^{3\alpha}}{\left(\frac{1}{3}+\alpha\right)^n}$.

$$\alpha \leq -\frac{4}{3}, \quad \alpha > \frac{2}{3}$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $z^2 + 2\overline{z}^2 + 2iIm(z) = 0$.

$$\{0, 1+i, 1-i\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.
Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile, tale che $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.
Dimostrare che $\lambda = 0$. Trovare un esempio per cui $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\nexists \lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 05/02/2019

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: ....

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = \cosh\left(\log(2)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right), \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset, \ Der(A) = \left\{\frac{5}{4}\right\}, \ Fr(A) = A \cup \left\{\frac{5}{4}\right\}, \ \bar{A} = A \cup \left\{\frac{5}{4}\right\}$$

$$\inf A = \min A = 1, \ \sup A = \frac{5}{4}, \ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2)*(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n \to +\infty} \frac{(2n)^n + (n!)^2 + \cos((-1)^n)}{\log((2n)^n) + (n^2)! + \sinh((-1)^n)} \qquad = 0$$

3)*(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2) + 1 - \log(\cos(x^2 + x^4)) - e^{(x^2)}}{\sqrt{1 + x^4 - x^6} - \sinh(x^2) - e^{(-x^2)}} \qquad = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \log(x^2 + 2 - |x^2 - 4|)$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(2x)e^{3x}\,dx$.

$$\left[\frac{e^{3x}}{13}\,(3\sin(2x) - 2\cos(2x))\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{13}\left(1 - e^{3\pi}\right)$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_2^5 \frac{(x^2-4)^{2\alpha}}{(x^2+5)^{3\alpha}(25-x^2)^{4\alpha}}\,dx$.

$$-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{4}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\alpha+3)^n}{(4\alpha-5)^{n+2}} \ .$$

$$\alpha < \frac{1}{3}, \quad \alpha > 4$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $(z^3+4i)(z^4-27|z|) = 0$.

$$\left\{0, \pm 3, \pm 3i, \sqrt[3]{4}i, \sqrt[3]{4}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Studiare la seguente successione al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} a_1 = \alpha \ , \\ a_{n+1} = 3a_n - 8 \ . \end{cases}$

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 05/02/2019

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria chimica e biochimica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = \sinh\left(\log(3)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset,\ Der(A) = \left\{\frac{4}{3}\right\},\ Fr(A) = A \cup \left\{\frac{4}{3}\right\},\ \bar{A} = A \cup \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

$$\inf A = \min A = 0,\ \sup A = \frac{4}{3},\ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(3n)^n + (n^2)! + \cosh\left((-1)^n\right)}{\log((3n)^n) + (n!)^2 + \sin\left((-1)^n\right)} \qquad = +\infty$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1 + x^4 + x^6} + \sin(x^2) - e^{(x^2)}}{\sinh(x^2) - 1 - \log(\cosh(x^2 + x^4)) + e^{(-x^2)}} \qquad = \frac{\frac{1}{6}}{-1} = -\frac{1}{6}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \log(x^2 + 3 - |x^2 - 9|)$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^\pi \cos(3x)e^{2x}\, dx$.

$$\left[\frac{e^{2x}}{13}\left(3\sin(3x) + 2\cos(3x)\right)\right]_0^\pi$$

$$= -\frac{2}{13}\left(1 + e^{2\pi}\right)$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_3^4 \frac{(x^2-9)^{4\alpha}}{(x^2+4)^{2\alpha}(16-x^2)^{3\alpha}}\, dx$.

$$-\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\alpha+2)^{n+2}}{(5\alpha-4)^n}$.

$$\alpha < \frac{1}{4}, \quad \alpha > 3$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $(z^4+3)(z^3-16|z|) = 0$.

$$\left\{0, 4, -2 \pm i2\sqrt{3}, \sqrt[4]{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \sqrt[4]{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Studiare la seguente successione al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} a_1 = \alpha \, , \\ a_{n+1} = 3a_n - 8 \, . \end{cases}$

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 18/06/2019

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

□ Ingegneria chimica e biochimica □ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = e^{\left(\frac{n-1}{n}\right)},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset,\ Der(A) = \{e\}\,,\ Fr(A) = A \cup \{e\}\,,\ \bar{A} = A \cup \{e\}$$

$$\inf A = \min A = 1,\ \sup A = e,\ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2n} - \log(n!)}{(2n)^n - (n!)^2} = -\infty$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x - x^2) - \cosh(x + x^2) + e^{-x+x^2}}{\sinh(2x - x^2) + \cos(x - x^2) - \sqrt{1 + 4x + x^2}} = \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{2}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \sqrt[4]{e^x - 1}$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \cos^3(x)}{\sin^2(x) + 3\sin(x) + 2}\, dx$.

$$\left[\log\left(\sin\left(x\right)+1\right) - 4\log\left(\sin\left(x\right)+2\right) + \sin\left(x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 5\log(2) - 4\log(3) + 1$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^{|\alpha|}}\right)}{\left|\sin\left(\sqrt{x}\right)\right| + x^{\frac{3}{4}}}\, dx$.

$$|\alpha| > \frac{1}{4}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^3-2}{6}\right)^n \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+1}} \, .$$

$$\sqrt[3]{-4} \leq \alpha < 2$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $$\left(|z|^2 - \bar{z} + i - 3\right)\left((3z+2)^3 + 1\right) = 0 \, .$$

$$\left\{2-i, \; -1-i, \; -1, \; \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{6}\right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $f(t) = e^{t^2}$. Scrivere il polinomio di Taylor al terzo ordine, in $x_0 = 0$, della seguente funzione:

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) \, dt \, .$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 18/07/2019

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

□ Ingegneria chimica e biochimica □ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} < \frac{3}{4} \right\} = (-\log 3, \log 3]$$

$$Int(A) = (-\log 3, \log 3), \ Der(A) = [-\log 3, \log 3],$$

$$Fr(A) = \{-\log 3, \log 3\}, \ \bar{A} = [-\log 3, \log 3]$$

$$\inf A = -\log 3, \ \min A = \nexists, \ \sup A = \max A = \log 3$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2)*(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cosh(5n) + \cos(n!) + 4n^3 + 2^{5n}}{\sinh(2n) + \sin(n!) + \log(n^n) + 3^{5n}} \qquad = 0$$

3)*(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2 - 3x) - \log(\cos(2x + x^2)) - 3\sinh(x^2 - x)}{\cos(x^2 - 3x) + 3\sqrt[3]{\cosh(x)} - 4e^{-x^2}} \qquad = \frac{7}{3}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = (|x-2|+2x)^3$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\int_1^2 (2x-1)\log(x+1)\,dx$.

$$\left[\left(x^2-x\right)\log\left(x+1\right)-2\log\left(x+1\right)-\frac{x^2-4x}{2}\right]_1^2$$

$$=\log(4)+\frac{1}{2}$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha}+x^4}{x^3+x^{3\alpha}}\,dx$.

$$\alpha > \frac{5}{3}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(\alpha - |\alpha - 2|)}{n^2+1} \,.$$

$$\alpha = 1$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $$z^5 + z^2 + 2i\left(z^3+1\right) = 0 \,.$$

$$\left\{1-i,\ -1+i,\ -1,\ \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.
Sia $f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e sia F una sua primitiva. Sia inoltre $g(x) = 2x + xf(3-x^2)$. Scrivere una primitiva di g.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 03/09/2019

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: ....

□ Ingegneria chimica e biochimica □ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \{y \in \mathbb{R} \ : \quad y = |3\sin(1+e^x) - 2|, \quad x \in \mathbb{R}\} = [0,5]$$

$$Int(A) = (0,5),\ Der(A) = [0,5],$$

$$Fr(A) = \{0,5\},\ \bar{A} = [0,5]$$

$$\inf A = 0 = \min A,\ \sup A = \max A = 5$$

A non è aperto, è chiuso, è limitato, è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2)! + \sin(n^n)}{2^n + (n!)^2} = +\infty$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x-2x^2) + 2\cosh(x-x^2) - 2e^{x-x^2}}{\sinh(4x^2-4x) + 4\cos(x+x^2) - 4\sqrt{1-2x+2x^2}} = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{50}{3}} = \frac{1}{10}$$

4)*(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = |2 + \log(|x-3|)|$.

5)*(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 - x}{(x+1)(x+2)^2}\, dx$.

$$\left[2\log\left(|x+1|\right) - \log\left(|x+2|\right) + \frac{6}{x+2}\right]_0^1$$

$$= \log\left(\frac{8}{3}\right) - 1$$

6)*(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_1^\pi \frac{(x-1)^{3\alpha-2}}{(\sin(x))^{2\alpha}}\, dx$.

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\log(\log(n))}{n^{2\alpha}}$.

$$\alpha > \frac{1}{2}$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $\left(\sqrt{3}\, z^2 - 1\right)^3 = 8$.

$$\left\{ \pm\sqrt[4]{3},\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \pm i) \right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.
Dimostrare che

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}$$