Primo Appello di ANALISI MATEMATICA T2, CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni A.A. 18/19, 10/06/2019 Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^3$. $\underline{(0 < \beta < 4)}$

i) [4 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli.

ii) [1 punto] Determinare $f(V)$, dove $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \le \dfrac{\beta^2}{36} \right\}$.

---

(2) [5 punti]

Calcolare $\displaystyle\int_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$, dove $f(x,y,z) = xyz$, e $\underline{(0 < \beta)}$

$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \beta^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le (2\beta)^2,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \right\}$.

---

(3) [5 punti]

Sia data la seguente forma differenziale in $\mathbb{R}^2$: (α pari)

$$\omega(x,y) = \left(\alpha x^{\alpha-1} + \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\alpha}}{x^{\alpha} + y^{\alpha} + 1} \right) dx + \left(\frac{\alpha y^{2\alpha-1}}{x^{\alpha} + y^{\alpha} + 1} + \alpha y^{\alpha-1} \log(x^{\alpha} + y^{\alpha} + 1) \right) dy.$$

(i-2 punto) verificare che ω è chiusa; (ii-2) determinare un potenziale per ω; (iii-1 punto) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è l'arco della semicirconferenza con ascisse positive, centrata in $(0, \frac{1}{2})$, avente diametro 1, passante per l'origine e il punto $(0,1)$, percorsa in verso antiorario.

---

(4) Si consideri il seguente problema di Cauchy ($\alpha > 1$):

$$\begin{cases} y'' + (\alpha+1)y' + \alpha y = \alpha x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Determinare: (i-1 punto) un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione differenziale omogenea associata; (ii-1 punto) l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea; (iii-2 punti) risolvere il problema di Cauchy; (iv-1 punto) se ϕ é la soluzione del problema di Cauchy, calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\phi(x) - x + 1 + \frac{1}{\alpha}}{e^{-x}}.$$

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(5)
(i-1 punto) scrivere la definizione di serie di potenze in $\mathbb{C}$; (ii-1 punti) scrivere la definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze; (ii-2 punti) scrivere l'enunciato di un Teorema con cui si calcola il raggio di convergenza di una serie di potenze.

---

(6) [2 punti] Scrivere la definizione di superficie regolare semplice in $\mathbb{R}^3$.

---

(7) [3 punti] Scrivere la definizione di varietà in $\mathbb{R}^n$.

---

(8) [2 punti] Scrivere la definizione di insieme connesso per archi in $\mathbb{R}^n$ ed enunciare il teorema di Bolzano.

Secondo Appello di ANALISI MATEMATICA T2, A.A. 18/19
CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni A.A. 18/19 del 24/06/2019
Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) [5 punti] (file: $\alpha = 3, 4, 5$) Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\|(x,y)\| = \alpha\} \to \mathbb{R}\,,\ f(x,y) = \dfrac{1}{\alpha^2 - \|(x,y)\|^2}\,.$

i) [3 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli.

ii) [2 punti] Determinare $f(V)$, dove $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq \dfrac{x^2}{(\alpha-1)^2} + \dfrac{y^2}{(\alpha-2)^2},\ \|(x,y)\| < \alpha \right\}$.

---

(2) [5 punti] (file: $\alpha = 2, 3, 4$) Calcolare $\displaystyle\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, dove $f(x,y,z) = xy$, e
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|(x,y)\| \leq \alpha,\ \alpha \leq z + \|(x,y)\|^2 \leq \alpha + 1,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y \}$.

---

(3) [5 punti] (file: $\alpha = 2, 3, 4$)

Sia $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + \dfrac{y^2}{\alpha^2} \leq 4r^2\} \to \mathbb{R},\ \ f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{\alpha}.$

(i-3punti) Calcolare l'area A_r del grafico della funzione f ristretta all'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \dfrac{y^2}{\alpha^2} \leq r^2\}$.

(ii-2 punto) Calcolare $\displaystyle\lim_{r \to 0^+} \frac{A_r}{\text{area}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + \frac{y^2}{\alpha^2} \leq r^2\})}$

---

(4) [5 punti] (file $\alpha = 2, 3, 4$) Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + xy = \alpha \\ \\ y(0) = -\pi. \end{cases}$$

Determinare: (i-1 punto) un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione differenziale omogenea associata; (ii-2 punti) l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea; (iii-1 punto) risolvere il problema di Cauchy; (iv-1 punto) se ϕ é la soluzione del problema di Cauchy, calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} x\phi(x),$$

avendo cura di motivare il risultato ottenuto.

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(5) [2 punti] Scrivere l'enunciato del Teorema di Poincaré

---

(6) [3 punti] Scrivere l'enunciato del Teorema di Gauss-Green nel piano.

---

(7) [2 punti] Scrivere le definizioni di derivata direzionale e derivata parziale.

---

(8) [3 punti] Scrivere le definizioni di insieme limitato e sequenzialmente compatto. Enunciare il Teorema di Heine-Borel.

Terzo Appello di ANALISI MATEMATICA T2, A.A. 18/19
CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni A.A. 18/19 del 08/07/2019
Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) [5 punti] ($\alpha = 2, 3, 4$) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x-\alpha)^2 + y^4 - 2y^2 + \alpha^2 z^2$.
i) [3 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli.
ii) [2 punti] Determinare $f(V)$, dove

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-\alpha)^2 + 2y^2 + \alpha^2 z^2 = 1 \ \right\} \ .$$

---

(2) [5 punti] ($\alpha = 3, 5, 7$) Calcolare $\displaystyle\int_A f(x, y)\, dx\, dy$, dove $f(x, y) = e^{\frac{\alpha x^2}{2}}$, e

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le \alpha, \ \frac{y}{\alpha} \le x \le \sqrt[3]{\frac{y}{\alpha}}\right\} \ .$$

---

(3) [4 punti] ($\alpha = 2, 3, 4$)

Sia $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \dfrac{x^2}{\alpha^2} + y^2 \le 4r^2\} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \dfrac{x}{\alpha} + y.$

Calcolare l'area A_r del grafico della funzione f ristretta all'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \dfrac{x^2}{\alpha^2} + y^2 \le r^2\}.$

---

(4) [4 punti] ($\alpha = 2, 3, 4$) Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \alpha^2 y = \alpha \\ y(0) = \alpha, \\ y'(0) = \alpha. \end{cases}$$

(i-1 punto) determinare un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione differenziale omogenea associata; (ii-1 punti) determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea; (iii-2 punti) calcolare la soluzione del problema di Cauchy.

---

(5) [2 punti] ($\alpha = 2, 3, 4$) (i-1 punto) Calcolare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze in $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^\alpha (z-\alpha)^k.$$

(ii-1 punto) La serie converge in $(-1 + i\alpha)$? Motivare la risposta.

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(6) [3 punti] ((i)-2 punti)scrivere la definizione di successione uniformemente convergente; ((ii)-1 punto) scrivere la condizione (di Cauchy) necessaria e sufficiente affinché una serie di funzioni sia convergente uniformemente.

---

(7) [2 punti] Scrivere la definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze.

---

(8) [2 punti] Scrivere la definizione di insieme convesso. Enunciare il Teorema del valor medio di Lagrange.

---

(9) [3 punti] Scrivere la definizione di vettore tangente ad una varietà e di spazio tangente.

Quarto Appello di ANALISI MATEMATICA T2, A.A. 18/19
CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni
A.A. 18/19 del 04/09/2019
Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) ($\alpha = 2, 3, 4$) Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > 0\}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = y\log(z) - \alpha\cos(x)$.
i) [3 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli.
ii) [2 punti] Determinare $f(V)$, dove

$$V = \{(x, y, z) \in A \ : \ y = \alpha^2\log(z), \ x = \pi \} .$$

---

(2) [5 punti] ($\alpha = 2, 3, 4$) Calcolare $\displaystyle\int_A f(x, y)\, dx\, dy$, dove

$$f(x, y) = (2x - y)\cos(\alpha^2 x + 2y), \qquad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (2x - y)^2 \le \alpha^2 x + 2y \le \pi, \quad 2x - y \ge 0\} .$$

---

(3) ($\alpha = 2, 3, 4$) Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = \alpha x \\ y(0) = \alpha, \\ y'(0) = \beta. \end{cases}$$

(i-2 punti) determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea; (ii-2 punti) calcolare la soluzione del problema di Cauchy.

---

(4) ($\alpha = 2, 3, 4$) (i-1 punto) Calcolare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze in $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2 + \alpha}{\alpha k^2 + k} z^k.$$

(ii-1 punto) La serie converge in $(\frac{1}{\alpha} + i\frac{1}{\alpha})$? Motivare la risposta.

---

(5) Sia $\omega = \left(\dfrac{2\alpha x^{2\alpha-1}y^2}{1 + x^{2\alpha}y^2} + y\right) dx + \left(\dfrac{2yx^{2\alpha}}{1 + x^{2\alpha}y^2} + x\right) dy$. (i- $1-$ punto) verificare se ω è chiusa. (ii- $2-$ punti) Se Ω è chiusa calcolare un potenziale.

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(6) [3 punti] Scrivere l'enunciato del Teorema di Gauss-Green nel piano.

---

(7) [2 punti] Scrivere l'enunciato del teorema sull'esistenza della soluzione del problema di Cauchy per equazioni differenziali di ordine uno a variabili separabili.

---

(8) [2 punti] Scrivere la definizione di funzione di classe C^1, con $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

---

(9) [3 punti] Scrivere la definizione di cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^n$ e l'enunciato del Teorema del cambiamento di variabili per integrali multipli.

Quinto Appello di ANALISI MATEMATICA T2, A.A. 18/19 CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni A.A. 18/19 del 07/01/2020 Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) ($\alpha = 3, 4, 5$) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x - \alpha y)^2 + \alpha z^2$. (i) [3 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli. (ii) [2 punti] Determinare $f(V)$, dove $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + \alpha y^2 + z^2 = 1\}$.

---

(2) [5 punti] ($\alpha = 3, 4, 5$) Calcolare $\int_A f(x, y)\, dx\, dy$, dove $f(x, y) = \alpha xy$, e $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x \le y \le \sqrt{3}\, x \; , \; \alpha \le \|(x, y)\|^2 \le \alpha + 1 \right\}$.

---

(3) ($\alpha = 2, 3, 4$) Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - \alpha y = 1 + \alpha x \\ y(0) = \alpha, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(i-2 punti) determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea; (ii-2 punti) calcolare la soluzione del problema di Cauchy; (iii-1 punto) calcolare $\lim_{x \to +\infty} y(x) e^{\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2} x}$.

---

(4) ($\alpha = 2, 3, 4$) [2 punti] Posto $B_\alpha(0) := \{(x, y) : \quad x^2 + y^2 < \alpha^2\}$, sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_\alpha(0), \quad z = \alpha x + y\}$. Calcolare l'integrale di superficie

$$\int\int_\Sigma z d\sigma$$

---

(5) ($\alpha = 2, 3, 4$) Sia

$$\omega = \left(\frac{1}{1 + (x + \alpha y)^2} + \frac{2x}{\alpha + x^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{\alpha}{1 + (x + \alpha y)^2} + \frac{2y}{\alpha + x^2 + y^2} \right) dy.$$

(i-1 punto) verificare che ω è chiusa; (ii-1 punto) determinare un potenziale di ω; (iii-1 punto) calcolare $\int_{[(0,0),(\alpha,\alpha)]} \omega$, dove $[(0, 0), (\alpha, \alpha)]$ è il segmento orientato da $(0, 0)$ a (α, α).

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(6) [2 punti] Scrivere la definizione di curva continua rettificabile.

---

(7) [3 punti] Scrivere le proprietà dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare di ordine due ed enunciare la relazione che sussiste con l'integrale generale dell'eqazione differenziale lineare omogenea ad essa associata.

---

(8) [2 punti] Scrivere l'enunciato del teorema sul differenziale delle funzioni composte in più variabili.

---

(9) [3 punti] Scrivere la definizione di funzione cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^n$.
Enunciare il Teorema del cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^n$.

Sesto Appello di ANALISI MATEMATICA T2, A.A. 18/19 CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni A.A. 18/19 del 07/02/2020 Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) ($\alpha = 3, 4, 5$) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - \alpha)y^2 - x^2$.

i) [3 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli.

ii) [2 punti] Determinare $f(V)$, dove $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq x = y \leq 7 \}$.

---

(2) [5 punti] ($\alpha = 3, 4, 5$) Calcolare $\int_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, dove $f(x, y, z) = \alpha(x^2 + y^2)$, e

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq z^2 + \alpha, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ |z| \leq \alpha \} .$$

---

(3) ($\alpha = 3, 4, 5$) Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1 + \alpha y^2)(1 + x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(i-2 punti) determinare la soluzione del problema; (ii-1 punto) determinare il più ampio dominio d'esistenza della soluzione trovata; (iii-1 punto) calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x}$, (iv-1 punto) calcolare $y''(0)$ e la formula di Taylor della soluzione in un intorno di 0.

---

(4) ($\alpha = 3, 4, 5$) (i-1 punto) Calcolare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze in $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^k}{k!}(z - \alpha i)^k.$$

(ii-1 punto) stabilire se la serie converge in $2 + \alpha i$.

---

(5) ($\alpha = 3, 4, 5$) Sia

$$\omega = \left(2x \log(1 + x^4 + y^2) + \frac{4x^3(\alpha + x^2 + y^2)}{1 + x^4 + y^2}\right) dx + \left(2y \log(1 + x^4 + y^2) + \frac{2y(\alpha + x^2 + y^2)}{1 + x^4 + y^2}\right) dy.$$

(i-1 punto) verificare che ω è chiusa; (ii-2 punti) determinare un potenziale di ω.

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(6) [2 punti] Scrivere la definizione di superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.

---

(7) [3 punti] Scrivere la definizione di wronskiano ed enunciare il Teorema relativo alle proprietà del wronskiano.

---

(8) [2 punti] Scrivere la definizione di derivata direzionale.

---

(9) [3 punti] Scrivere l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Bolzano in $\mathbb{R}^n$.