Primo Appello di ANALISI MATEMATICA T2, CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni A.A. 18/19, 10/06/2019 Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ f(x,y) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^3\,.$ $\underline{(0 < \beta < 4)}$

i) [4 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli.

ii) [1 punto] Determinare $f(V)$, dove $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \leq \dfrac{\beta^2}{36} \right\}$.

---

(2) [5 punti]

Calcolare $\displaystyle\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, dove $f(x,y,z) = xyz$, e $\underline{(0 < \beta)}$

$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ \beta^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq (2\beta)^2,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \right\}$.

---

(3) [5 punti]

Sia data la seguente forma differenziale in $\mathbb{R}^2$: (α pari)

$$\omega(x,y) = \left(\alpha x^{\alpha-1} + \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^\alpha}{x^\alpha + y^\alpha + 1}\right) dx + \left(\frac{\alpha y^{2\alpha-1}}{x^\alpha + y^\alpha + 1} + \alpha y^{\alpha-1} \log(x^\alpha + y^\alpha + 1)\right) dy.$$

(i-2 punto) verificare che ω è chiusa; (ii-2) determinare un potenziale per ω; (iii-1 punto) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è l'arco della semicirconferenza con ascisse positive, centrata in $(0, \frac{1}{2})$, avente diametro 1, passante per l'origine e il punto $(0,1)$, percorsa in verso antiorario.

---

(4) Si consideri il seguente problema di Cauchy ($\alpha > 1$):

$$\begin{cases} y'' + (\alpha+1)y' + \alpha y = \alpha x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Determinare: (i-1 punto) un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione differenziale omogenea associata; (ii-1 punto) l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea; (iii-2 punti) risolvere il problema di Cauchy; (iv-1 punto) se ϕ é la soluzione del problema di Cauchy, calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(x) - x + 1 + \frac{1}{\alpha}}{e^{-x}}.$$

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(5)
(i-1 punto) scrivere la definizione di serie di potenze in $\mathbb{C}$; (ii-1 punti) scrivere la definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze; (ii-2 punti) scrivere l'enunciato di un Teorema con cui si calcola il raggio di convergenza di una serie di potenze.

---

(6) [2 punti] Scrivere la definizione di superficie regolare semplice in $\mathbb{R}^3$.

---

(7) [3 punti] Scrivere la definizione di varietà in $\mathbb{R}^n$.

---

(8) [2 punti] Scrivere la definizione di insieme connesso per archi in $\mathbb{R}^n$ ed enunciare il teorema di Bolzano.

Soluzioni esercizi

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.

i) Vale:

$$\nabla f(x,y) = \big(2(x-\alpha), 3(y-\beta)^2\big)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (\alpha,\beta) = P_0$$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6(y-\beta) \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $D^2 f(P_0)$ è semidefinita positiva. Per classificare P_0, basta osservare che qualsiasi intorno di P_0, contiene un segmento della retta $\{x = \alpha\}$; la funzione f calcolata su questo segmento risulta:
-) positiva, se $y \geq \beta$;
-) negativa, se $y \leq \beta$.
Poiché $f(P_0) = 0$, il punto critico P_0 è un punto di sella.

ii) L'insieme V è connesso e compatto, $f \in C(V;\mathbb{R})$, quindi $f(V)$ sarà un intervallo connesso e compatto di $\mathbb{R}$.
Dal punto i), si vede che il punto critico $P_0 \in Int(V)$.
La frontiera di V risulta essere una varietà di dimensione 1, in particolare

$$Fr(V) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ F(x,y) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \frac{\beta^2}{36} = 0 \right\}.$$

La Lagrangiana associata è:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda F(x,y) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^3 - \lambda\left((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \frac{\beta^2}{36}\right)$$

Annullare il gradiente di $L(x,y,\lambda)$ significa risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2(x-\alpha)(1-\lambda) = 0 \\ (y-\beta)(3(y-\beta) - 2\lambda) = 0 \\ F(x,y) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del precedente sistema sono:

$$P_1 = \left(\alpha, \frac{7}{6}\beta\right),\ P_2 = \left(\alpha, \frac{5}{6}\beta\right),\ P_3 = \left(\alpha + \frac{1}{6}\beta, \beta\right),\ P_4 = \left(\alpha - \frac{1}{6}\beta, \beta\right).$$

Risulta:

$$f(P_0) = 0,\ f(P_1) = \left(\frac{1}{6}\beta\right)^3,\ f(P_2) = -\left(\frac{1}{6}\beta\right)^3,\ f(P_3) = f(P_4) = \left(\frac{1}{6}\beta\right)^2.$$

Quindi

$$f(V) = \left[-\left(\frac{1}{6}\beta\right)^3, \left(\frac{1}{6}\beta\right)^2\right]$$

2) Si consideri il cambio di coordinate $\varphi(r,\theta,\alpha)=(x,y,z)$ dato da:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\ \cos\theta \\ \\ y = r\cos\alpha\ \sin\theta \\ \\ z = r\sin\alpha \end{cases}$$

con $0 \le r,\ \theta \in [0,2\pi],\ \alpha \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, e $det\,(Jac\,(\varphi)) = r^2\cos\alpha \ge 0$. Risulta $\varphi : B \to A$, dove

$$B = \left\{(r,\theta,\alpha) \in \mathbb{R}^3\ :\ \beta \le r \le 2\beta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Quindi

$$\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_B r^5(\cos\alpha)^3(\sin\alpha)(\cos\theta)(\sin\theta)\,dr\,d\theta\,d\alpha =$$

$$= \left(\int_\beta^{2\beta} r^5\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta)(\sin\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha)^3(\sin\alpha)\,d\alpha\right) =$$

$$= \left[\frac{r^6}{6}\right]_\beta^{2\beta}\left[\frac{(\sin\theta)^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\left[-\frac{(\cos\alpha)^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{63\beta^6}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

Esercizio 3

(i) ω è chiusa. Infatti

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\alpha^2 x^{\alpha-1} y^{\alpha-1}(x^\alpha+y^\alpha+1) - \alpha y^{\alpha-1} \cdot \alpha y^\alpha x^{\alpha-1}}{(x^\alpha+y^\alpha+1)^2}$$

$$= \frac{\alpha^2 x^{2\alpha-1} y^{\alpha-1} + \cancel{\alpha^2 x^{\alpha-1} y^{2\alpha-1}} + \alpha^2 x^{\alpha-1} y^{\alpha-1} - \cancel{\alpha^2 y^{2\alpha-1} x^{\alpha-1}}}{(x^\alpha+y^\alpha+1)^2}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x}(x,y) = \frac{-\alpha x^{\alpha-1} \cdot \alpha y^{2\alpha-1}}{(x^\alpha+y^\alpha+1)^2} + \frac{\alpha y^{\alpha-1} \cdot \alpha x^{\alpha-1}}{x^\alpha+y^\alpha+1}$$

$$= \frac{-\alpha^2 x^{\alpha-1} y^{2\alpha-1} + \alpha^2 (x^\alpha+y^\alpha+1) x^{\alpha-1} y^{\alpha-1}}{(x^\alpha+y^\alpha+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{-\alpha^2 x^{\alpha-1} y^{2\alpha-1}} + \alpha^2 x^{2\alpha-1} y^{\alpha-1} + \cancel{\alpha^2 x^{\alpha-1} y^{2\alpha-1}} + \alpha^2 x^{\alpha-1} y^{\alpha-1}}{(x^\alpha+y^\alpha+1)^2}$$

(ii) Quindi $\displaystyle \frac{\partial \omega_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Poiché $\mathbb{R}^2$ è stellato, dal Teorema di Poincaré segue che ω è esatta. Quindi esiste un potenziale. Per calcolarlo determiniamo

$$\int_{\Gamma_x \cup \Gamma_y} \omega$$

dove $\Gamma_x=\{(t,0) \,/\, 0\le t\le x\}$ e $\Gamma_y=\{(x,s) \,/\, 0\le s\le y\}$

Allora

$$\int_{\Gamma_x\cup\Gamma_y}\omega = \int_{\Gamma_x}\omega+\int_{\Gamma_y}\omega = \int_0^x \alpha t^{\alpha-1}\,dt + \int_0^y \frac{\alpha s^{2\alpha-1}}{x^\alpha+s^\alpha+1}+\alpha s^{\alpha-1}\log(x^\alpha+s^\alpha+1)$$

$$= x^\alpha + \int_0^y \frac{\alpha s^{2\alpha-1}}{x^\alpha+s^\alpha+1}\,ds + \alpha\int_0^y s^{\alpha-1}\log(x^\alpha+s^\alpha+1)\,ds$$

$$= x^\alpha + \Big[s^\alpha\log(x^\alpha+s^\alpha+1)\Big]_{s=0}^{s=y} - \cancel{\int_0^y \alpha s^{\alpha-1}\log(x^\alpha+s^\alpha+1)\,ds}$$

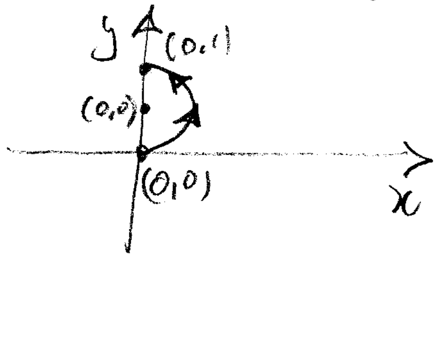
$$+\cancel{\alpha\int_0^y s^{\alpha-1}\log(x^\alpha+s^\alpha+1)\,ds}$$

$$= x^\alpha + y^\alpha\log(x^\alpha+y^\alpha+1).$$

Quindi un potenziale è:

$$V = x^\alpha + y^\alpha\log(x^\alpha+y^\alpha+1).$$

(iii) La circonferenza su cui integrare è



Poiché V è un potenziale risulterà, per l'esattezza di

$$V(0,1)-V(0,0)=\int_\gamma \omega$$

Quindi

$$\int_\gamma \omega = \log(1+1) = \log(2) = V(0,1)$$

perché $V(0,0)=0$

Esercizio 4

(i) L'eq. caratteristica è

$\lambda^2+(\alpha+1)\lambda+\alpha=0$. Quindi gli autovalori sono $\lambda=-\alpha$ e $\lambda=-1$. Un sistema fondamentale di soluzioni dell'eq. diff omogenea associata è

$$\{e^{-\alpha x}, e^{-x}\},$$ per cui:

$$V_2 = \text{span}\{e^{-\alpha x}, e^{-x}\}.$$

(ii) determiniamo una soluzione dell'eq. diff.

Utilizzando il metodo per s'impostare cercheremo una soluzione della forma

$\varphi(x) = kx + c$. Quindi:

$\varphi' = k$ e $\varphi'' = 0$. Sostituendo risulterà:

$$(\alpha+1)k + \alpha(kx + c) = \alpha x$$ per cui da

$$(\alpha+1)k + \alpha c + \alpha k x = \alpha x$$

segue che $\begin{cases} (\alpha+1)k + \alpha c = 0 \\ \alpha k = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\dfrac{\alpha+1}{\alpha} \\ k = 1 \end{cases}$

da cui $\varphi(x) = x - 1 - \frac{1}{\alpha}$

Allora l'integrale generale è:

$$LV_2 = \mathrm{span}\{e^{-\alpha x}, e^{-x}\} + x - 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

(iii) Sia $c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{-x} + x - 1 - \frac{1}{\alpha}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

l'espressione di una soluzione dell'eq. diff.

Imponiamo le condizioni iniziali ottenendo:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 1 - \frac{1}{\alpha} = 0 \\ -\alpha c_1 - c_2 + 1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 + \frac{1}{\alpha} \\ -\alpha c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$ (5)

$$c_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{\alpha} & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & -1 \end{bmatrix}} = \frac{-1-\frac{1}{\alpha}}{-1+\alpha} = \frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$

$$c_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 1+\frac{1}{\alpha} \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & -1 \end{bmatrix}} = \frac{\alpha + 1}{-1+\alpha} = -\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$\phi(x) = \frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)} e^{-\alpha x} - \frac{1+\alpha}{1-\alpha} e^{-x} + x - 1 - \frac{1}{\alpha}$$

(IV) Quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\phi(x) - x + 1 + \frac{1}{\alpha}}{e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)} e^{-\alpha x} - \frac{1+\alpha}{1-\alpha} e^{-x}}{e^{-x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\alpha}{\alpha(1-\alpha)} e^{(1-\alpha)x} - \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = -\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

$(\text{se } \alpha > 1)$.

Secondo Appello di ANALISI MATEMATICA T2, A.A. 18/19
CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni A.A. 18/19 del 24/06/2019
Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) [5 punti] (file: $\alpha = 3, 4, 5$) Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\|(x,y)\| = \alpha\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{\alpha^2 - \|(x,y)\|^2}$.

i) [3 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli.

ii) [2 punti] Determinare $f(V)$, dove $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq \dfrac{x^2}{(\alpha-1)^2} + \dfrac{y^2}{(\alpha-2)^2}, \ \|(x,y)\| < \alpha \right\}$.

---

(2) [5 punti] (file: $\alpha = 2, 3, 4$) Calcolare $\int_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$, dove $f(x,y,z) = xy$, e

$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|(x,y)\| \leq \alpha, \ \alpha \leq z + \|(x,y)\|^2 \leq \alpha + 1, \ 0 \leq x, \ 0 \leq y \right\}$.

---

(3) [5 punti] (file: $\alpha = 2, 3, 4$)

Sia $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + \dfrac{y^2}{\alpha^2} \leq 4r^2\} \to \mathbb{R}, \ \ f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^2}{\alpha}$.

(i-3punti) Calcolare l'area A_r del grafico della funzione f ristretta all'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \dfrac{y^2}{\alpha^2} \leq r^2\}$.

(ii-2 punto) Calcolare $\lim\limits_{r \to 0^+} \dfrac{A_r}{\text{area}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + \frac{y^2}{\alpha^2} \leq r^2\})}$

---

(4) [5 punti] (file $\alpha = 2, 3, 4$) Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + xy = \alpha \\ y(0) = -\pi. \end{cases}$$

Determinare: (i-1 punto) un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione differenziale omogenea associata; (ii-2 punti) l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea; (iii-1 punto) risolvere il problema di Cauchy; (iv-1 punto) se ϕ é la soluzione del problema di Cauchy, calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} x\phi(x),$$

avendo cura di motivare il risultato ottenuto.

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(5) [2 punti] Scrivere l'enunciato del Teorema di Poincaré

---

(6) [3 punti] Scrivere l'enunciato del Teorema di Gauss-Green nel piano.

---

(7) [2 punti] Scrivere le definizioni di derivata direzionale e derivata parziale.

---

(8) [3 punti] Scrivere le definizioni di insieme limitato e sequenzialmente compatto. Enunciare il Teorema di Heine-Borel.

Soluzioni esercizi

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{\|(x,y)\| = \alpha\}\,;\mathbb{R})$.

i) Vale:

$$\nabla f(x,y) = \frac{2}{(\alpha^2 - \|(x,y)\|^2)^2}\,(x,y)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) = P_0$$

$$D^2 f(x,y) = \frac{2}{(\alpha^2 - \|(x,y)\|^2)^3}\begin{pmatrix} \alpha^2 - \|(x,y)\|^2 + 4x^2 & 4xy \\ 4xy & \alpha^2 - \|(x,y)\|^2 + 4y^2 \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(P_0) = \frac{2}{(\alpha^2)^3}\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

La matrice $D^2 f(P_0)$ è definita positiva, quindi il punto critico P_0 è un punto di minimo locale.

ii) L'insieme V è connesso, limitato ma non chiuso, quindi non compatto. $f \in C(V;\mathbb{R})$, quindi $f(V)$ sarà un intervallo (connesso) di $\mathbb{R}$.
Dal punto i), si vede che il punto critico $P_0 \notin Int(V)$.
La frontiera di V è composta da due varietà di dimensione 1, in particolare $Fr(V) = E \cup C$, dove

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ F_1(x,y) = \frac{x^2}{(\alpha-1)^2} + \frac{y^2}{(\alpha-2)^2} - 1 = 0 \right\} .$$

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ F_2(x,y) = x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0 \right\} .$$

Vale: $E \subseteq V$, $C \nsubseteq V$; inoltre C non appartiene al dominio naturale di f.

La Lagrangiana associata a E è:

$$L_1(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda F_1(x,y)$$

Annullare il gradiente di $L_1(x,y,\lambda)$ significa risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x\left(f^2 - \frac{\lambda}{(\alpha-1)^2}\right) = 0 \\ 2y\left(f^2 - \frac{\lambda}{(\alpha-2)^2}\right) = 0 \\ F_1(x,y) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del precedente sistema sono:

$$P_1 = (0,(\alpha-2))\,,\ P_2 = (0,-(\alpha-2))\,,\ P_3 = ((\alpha-1),0)\,,\ P_4 = (-(\alpha-1),0)\ .$$

Risulta:

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{1}{\alpha^2 - (\alpha-2)^2},\ f(P_3) = f(P_4) = \frac{1}{\alpha^2 - (\alpha-1)^2}\ .$$

Per quanto riguarda C, poiché la funzione è radiale (dipende dalla norma $r = \|(x,y)\|$), sull'insieme V è una funzione monotona crescente di r; in particolare $\lim\limits_{r\to\alpha^-} f(r) = +\infty$.

Quindi

$$f(V) = \left[\frac{1}{\alpha^2 - (\alpha-2)^2}, +\infty\right)$$

2) Si consideri il cambio di coordinate $\varphi(r,\theta,z)=(x,y,z)$ dato da:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \\ \\ z = z \end{cases}$$

con $0 \leq r,\ \theta \in [0,2\pi],\ z \in \mathbb{R}$, e $det\,(Jac\,(\varphi)) = r \geq 0$. Risulta $\varphi : B \to A$, dove

$$B = \left\{ (r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \leq r \leq \alpha,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \alpha - r^2 \leq z \leq \alpha + 1 - r^2 \right\}\ .$$

Quindi

$$\int_A f(x,y,z)\ dx\,dy\,dz = \int_B r^3\cos\theta\ \sin\theta\ dr\,d\theta\,dz =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)(\sin\theta)\ d\theta\right)\left(\int_0^{\alpha}\left(\int_{\alpha-r^2}^{\alpha+1-r^2} r^3\ dz\right)\ dr\right) =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)(\sin\theta)\ d\theta\right)\left(\int_0^{\alpha} r^3\ dr\right) =$$

$$= \left[\frac{(\sin\theta)^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\alpha} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha^4}{4}\right)$$

Esercizio 3

Il grafico di $f \mid \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x^2+\frac{y^2}{\alpha^2}\le r^2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ è

parametrizzato da $\varphi: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x^2+\frac{y^2}{\alpha^2}\le r^2\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\varphi(x,y) = \left(x,y,\ x^2+\frac{y^2}{\alpha} \right)$. Quindi

$$A_r = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x^2+\frac{y^2}{\alpha^2}\le r^2\}} \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) \right\| dx\,dy \quad , \text{ dove}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = (1,0,\ 2x) \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \left(0, 1, \ \frac{2y}{\alpha}\right)$$

$$\det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & \frac{2y}{\alpha} \end{bmatrix} = \vec{i}(-2x) - \vec{j}\,\frac{2y}{\alpha} + \vec{k}$$

$$= \left(-2x, -\frac{2y}{\alpha}, 1\right)$$

$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{4x^2+\frac{4y^2}{\alpha^2}+1}$. Quindi

$$A_r = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x^2+\frac{y^2}{\alpha^2}\le r^2\}} \sqrt{4x^2+\frac{4y^2}{\alpha^2}+1}\ dx\,dy = \int_{[0,r]\times[0,2\pi]} \alpha\rho\cdot\sqrt{4\rho^2+1}\ d\rho\, d\theta$$

$$= \alpha\cdot 2\pi \int_0^r \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho = 2\alpha\pi\cdot\left[\frac{1}{12}\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\right]_{\rho=0}^{\rho=r}$$

$$= \frac{2\alpha\pi}{12}\left((1+4r^2)^{3/2} - 1\right)$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{A_r}{\text{area}\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2 + \frac{y^2}{\alpha^2} \leq r\right\}} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{\frac{\alpha\pi}{6}}\left((1+4r^2)^{3/2} - 1\right)}{\cancel{\alpha} r^2 \cancel{\pi}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{(1+4r^2)^{3/2} - 1}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{1} + 6r^2 \cancel{-1} + o(r^2)}{r^2}$$

$$= 6$$

Esercizio 4

$$\begin{cases} y' + xy = \alpha \\ y(0) = -\pi \end{cases}$$

Sia $y' + xy = 0$ l'eq. diff. lineare associata. Si tratta di un'eq. lineare del primo ordine a coefficienti variabili per cui:

$$V_1 = \text{span}\left\{ e^{-\frac{x^2}{2}} \right\}$$

Cerchiamo ora una sol dell'eq. diff. lineare non omogenea con il metodo della variazione delle costanti nella forma

$$\varphi = \beta(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Allora

$$\varphi' = \beta' e^{-\frac{x^2}{2}} - x\beta(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Sostituendo nell'eq. non omogenea si ottiene

$$\beta' e^{-\frac{x^2}{2}} - x\,\cancel{\beta(x) e^{-\frac{x^2}{2}}} + x\,\cancel{\beta(x) e^{-\frac{x^2}{2}}} = \alpha$$

$$\beta' = \alpha e^{\frac{x^2}{2}}$$ da cui segue

$$\beta(x) = \alpha \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

Allora

$$LV = \operatorname{span}\{e^{-\frac{x^2}{2}}\} + \alpha e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

Risolviamo il problema di Cauchy imponendo la condizione iniziale

$y(0) = -\pi$ a $y = c e^{-\frac{x^2}{2}} + \alpha e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$.

Quindi

$y(0) = c = -\pi$, da cui la soluzione

$$\varphi(x) = -\pi e^{-\frac{x^2}{2}} + \alpha e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt.$$ Allora

$$x\varphi(x) = x\left(-\pi e^{-\frac{x^2}{2}} + \alpha e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt\right)$$

$$= \frac{x\left(-\pi + \alpha\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt\right)}{e^{\frac{x^2}{2}}} \quad \text{, per cui}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\varphi(x) = \alpha.$$

Infatti, dal T.le di De L'Hopital risulta:

$$\frac{-\pi + \alpha\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt + x\cdot\alpha e^{\frac{x^2}{2}}}{x e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$= \underbrace{-\frac{\pi}{x e^{\frac{x^2}{2}}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{\alpha\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}dt}{x e^{\frac{x^2}{2}}}}_{} + \alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} \alpha.$$

riapplicando De L'Hopital

$$\frac{\alpha e^{\frac{x^2}{2}}}{\underbrace{e^{\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{\frac{x^2}{2}}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

II

Terzo Appello di ANALISI MATEMATICA T2, A.A. 18/19
CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni A.A. 18/19 del 08/07/2019
Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) [5 punti] ($\alpha = 2, 3, 4$) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x - \alpha)^2 + y^4 - 2y^2 + \alpha^2 z^2$.
i) [3 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli.
ii) [2 punti] Determinare $f(V)$, dove

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x - \alpha)^2 + 2y^2 + \alpha^2 z^2 = 1 \right\} .$$

---

(2) [5 punti] ($\alpha = 3, 5, 7$) Calcolare $\int_A f(x, y) \, dx \, dy$, dove $f(x, y) = e^{\frac{\alpha x^2}{2}}$, e

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le \alpha, \ \frac{y}{\alpha} \le x \le \sqrt[3]{\frac{y}{\alpha}} \right\} .$$

---

(3) [4 punti] ($\alpha = 2, 3, 4$)
Sia $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \dfrac{x^2}{\alpha^2} + y^2 \le 4r^2\} \to \mathbb{R}, \ f(x, y) = \dfrac{x}{\alpha} + y.$
Calcolare l'area A_r del grafico della funzione f ristretta all'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \dfrac{x^2}{\alpha^2} + y^2 \le r^2\}.$

---

(4) [4 punti] ($\alpha = 2, 3, 4$) Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \alpha^2 y = \alpha \\ y(0) = \alpha, \\ y'(0) = \alpha. \end{cases}$$

(i-1 punto) determinare un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione differenziale omogenea associata; (ii-1 punti) determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea; (iii-2 punti) calcolare la soluzione del problema di Cauchy.

---

(5) [2 punti] ($\alpha = 2, 3, 4$) (i-1 punto) Calcolare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze in $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^\alpha (z - \alpha)^k.$$

(ii-1 punto) La serie converge in $(-1 + i\alpha)$? Motivare la risposta.

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(6) [3 punti] ((i)-2 punti)scrivere la definizione di successione uniformemente convergente; ((ii)-1 punto) scrivere la condizione (di Cauchy) necessaria e sufficiente affinché una serie di funzioni sia convergente uniformemente.

---

(7) [2 punti] Scrivere la definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze.

---

(8) [2 punti] Scrivere la definizione di insieme convesso. Enunciare il Teorema del valor medio di Lagrange.

---

(9) [3 punti] Scrivere la definizione di vettore tangente ad una varietà e di spazio tangente.

Soluzioni esercizi

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$.

i) Vale:

$$\nabla f(x,y,z) = \big(2(x-\alpha), 4y^3-4y, 2\alpha^2 z\big)$$

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) = (\alpha,0,0) = P_0 \\ \\ (x,y,z) = (\alpha,1,0) = P_1 \\ \\ (x,y,z) = (\alpha,-1,0) = P_2 \end{cases}$$

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 12y^2-4 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \\ 0 & -4 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 \end{pmatrix} ; \quad D^2 f(P_1) = D^2 f(P_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 8 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 \end{pmatrix}$$

La matrice $D^2 f(P_0)$ è indefinita, quindi il punto critico P_0 è un punto di sella.
La matrice $D^2 f(P_1) = D^2 f(P_2)$ è definita positiva, quindi i punti critici P_1 e P_2 sono punti di minimo locale.

ii) L'insieme V è connesso e compatto. $f \in C(V;\mathbb{R})$, quindi $f(V)$ sarà un intervallo connesso e compatto di $\mathbb{R}$.
L'insieme V risulta essere una varietà di dimensione 2, in particolare

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ F(x,y,z) = (x-\alpha)^2 + 2y^2 + \alpha^2 z^2 - 1 = 0 \ \big\} \ .$$

La Lagrangiana associata è: $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda F(x,y,z)$
Annullare il gradiente di $L(x,y,z,\lambda)$ significa risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2(x-\alpha)(1-\lambda) = 0 \\ \\ 4y(y^2-1-\lambda) = 0 \\ \\ 2\alpha^2 z(1-\lambda) = 0 \\ \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del precedente sistema sono:

$$P_3 = \left(\alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \ P_4 = \left(\alpha, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

e tutti i punti del tipo $P_5 = (x,0,z)$ con $(x-\alpha)^2 + \alpha^2 z^2 = 1$.
Risulta:

$$f(P_3) = f(P_4) = -\frac{3}{4}, \ f(P_5) = 1 \ .$$

Quindi

$$f(V) = \left[-\frac{3}{4}, 1\right]$$

2) Usando direttamente il teorema di riduzione, vale

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\alpha} \left(\int_{\frac{y}{\alpha}}^{\sqrt[3]{\frac{y}{\alpha}}} e^{\frac{\alpha x^2}{2}}\,dx \right)\,dy$$

Questo non permette di calcolare esplicitamente l'integrale.
Si può scambiare l'ordine di integrazione, riscrivendo il dominio A nel seguente modo:

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 1,\ \alpha x^3 \le y \le \alpha x \right\}\ .$$

Quindi

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\alpha x^3}^{\alpha x} e^{\frac{\alpha x^2}{2}}\,dy \right)\,dx = \int_0^1 e^{\frac{\alpha x^2}{2}} \left(\int_{\alpha x^3}^{\alpha x} dy \right)\,dx =$$

$$= \int_0^1 e^{\frac{\alpha x^2}{2}} \alpha \left(x - x^3 \right)\,dx = \int_0^1 e^{\frac{\alpha x^2}{2}} \alpha x \left(1 - x^2 \right)\,dx =$$

$$= \left[e^{\frac{\alpha x^2}{2}} \left(1 - x^2 \right) \right]_0^1 + \int_0^1 e^{\frac{\alpha x^2}{2}} 2x\,dx =$$

$$= \left[e^{\frac{\alpha x^2}{2}} \left(1 - x^2 \right) + \frac{2}{\alpha} e^{\frac{\alpha x^2}{2}} \right]_0^1 = \left[e^{\frac{\alpha x^2}{2}} \left(1 - x^2 + \frac{2}{\alpha} \right) \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\alpha} e^{\frac{\alpha}{2}} - 1 - \frac{2}{\alpha}$$

$V_2 = \text{span}\{\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)\}$

$y'' + \alpha^2 y = \alpha$ eq. diff. lineare omogenea

α è una costante, quindi possiamo cercare una soluzione nella forma $y = K$, K costante ottenendo

$$\alpha^2 K = \alpha \quad \text{da cui} \quad K = \frac{1}{\alpha}.$$

$$LV_2 = \text{span}\{\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)\} + \frac{1}{\alpha}$$

Risolviamo il problema di Cauchy risolvendo

$y(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x) + \frac{1}{\alpha}$

$y'(x) = -\alpha c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \alpha \cos(\alpha x)$ per cui

$$\begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 + \frac{1}{\alpha} = \alpha \\ c_2 \alpha = \alpha \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = \alpha - \frac{1}{\alpha} \\ c_2 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi

$$y(x) = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \cos(\alpha x) + \sin(\alpha x) + \frac{1}{\alpha}$$

Esercizio 3

$$\varphi : \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{\alpha^2} + y^2 \leq r^2 \right\} \longrightarrow \left(x, y, \frac{x}{\alpha} + y \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \left(1, 0, \frac{1}{\alpha}\right) \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = (0, 1, 1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(-\frac{1}{\alpha}\right) - \vec{j} \cdot 1 + \vec{k} \cdot 1$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 1 + 1} = \sqrt{2 + \frac{1}{\alpha^2}}$$

$$\int_{\varphi(f)} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| d\sigma = \iint_{\left\{ \frac{x^2}{\alpha^2} + y^2 \leq r^2 \right\}} \sqrt{2 + \frac{1}{\alpha^2}} \, dx\,dy = \pi \alpha r^2 \sqrt{2 + \frac{1}{\alpha^2}}$$

Esercizio 4

$$\begin{cases} y'' + \alpha^2 y = \alpha \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \alpha \end{cases}$$

$y'' + \alpha^2 y = 0$ eq. omogenea $\lambda^2 + \alpha^2 = 0$, da cui

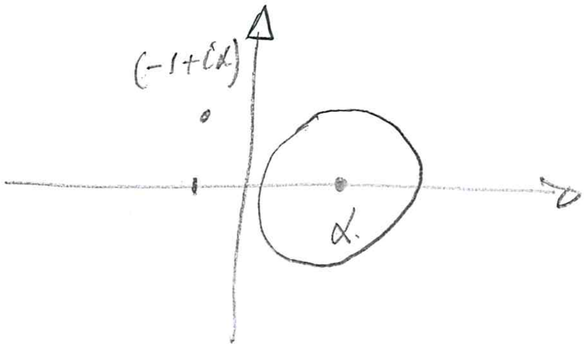
$$\lambda = \pm i\alpha$$

Esercizio 5

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie

$$\rho = \lim_{k \to +\infty} \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} = \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^\alpha = \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha = 1$$

Quindi $R = \frac{1}{\rho} = 1$



$\alpha = 2, 3, 4$

(reale) è il centro della serie

per cui il disco è tutto contenuto nel primo e quarto quadrante.

D'altra parte

$$|-1 + i\alpha - \alpha| = \sqrt{(1+\alpha)^2 + \alpha^2} > 1$$

Quindi in $-1+i\alpha$ la serie diverge

Quarto Appello di ANALISI MATEMATICA T2, A.A. 18/19
CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni
A.A. 18/19 del 04/09/2019
Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) ($\alpha = 2, 3, 4$) Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > 0\}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = y \log(z) - \alpha \cos(x)$.
i) [3 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli.
ii) [2 punti] Determinare $f(V)$, dove

$$V = \{(x, y, z) \in A \ : \ y = \alpha^2 \log(z), \ x = \pi \} \ .$$

---

(2) [5 punti] ($\alpha = 2, 3, 4$) Calcolare $\int_A f(x, y) \, dx \, dy$, dove

$$f(x, y) = (2x - y) \cos(\alpha^2 x + 2y), \qquad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (2x - y)^2 \leq \alpha^2 x + 2y \leq \pi, \quad 2x - y \geq 0\} \ .$$

---

(3) ($\alpha = 2, 3, 4$) Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = \alpha x \\ y(0) = \alpha, \\ y'(0) = \beta. \end{cases}$$

(i-2 punti) determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea; (ii-2 punti) calcolare la soluzione del problema di Cauchy.

---

(4) ($\alpha = 2, 3, 4$) (i-1 punto) Calcolare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze in $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2 + \alpha}{\alpha k^2 + k} z^k.$$

(ii-1 punto) La serie converge in $(\frac{1}{\alpha} + i\frac{1}{\alpha})$? Motivare la risposta.

---

(5) Sia $\omega = \left(\frac{2\alpha x^{2\alpha - 1} y^2}{1 + x^{2\alpha} y^2} + y \right) dx + \left(\frac{2y x^{2\alpha}}{1 + x^{2\alpha} y^2} + x \right) dy$. (i- $1-$ punto) verificare se ω è chiusa. (ii- $2-$ punti) Se Ω è chiusa calcolare un potenziale.

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(6) [3 punti] Scrivere l'enunciato del Teorema di Gauss-Green nel piano.

---

(7) [2 punti] Scrivere l'enunciato del teorema sull'esistenza della soluzione del problema di Cauchy per equazioni differenziali di ordine uno a variabili separabili.

---

(8) [2 punti] Scrivere la definizione di funzione di classe C^1, con $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

---

(9) [3 punti] Scrivere la definizione di cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^n$ e l'enunciato del Teorema del cambiamento di variabili per integrali multipli.

Soluzioni esercizi

1) $f \in C^\infty(A;\mathbb{R})$.

i) Vale:

$$\nabla f(x,y,z) = \Big(\alpha\sin(x), \log(z), \frac{y}{z}\Big)$$
$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z) = (k\pi, 0, 1) = P_k,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \alpha\cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{z} \\ 0 & \dfrac{1}{z} & -\dfrac{y}{z^2} \end{pmatrix}$$

Se k è pari si ha

$$D^2 f(P_k) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $(\alpha, 1, -1)$. Se invece k è dispari si ha

$$D^2 f(P_k) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $(-\alpha, 1, -1)$. In entrambi i casi la matrice è indefinita, quindi tutti i punti critici sono punti di sella.

ii) L'insieme V è connesso e chiuso, ma non limitato; in particolare non compatto. $f \in C(V;\mathbb{R})$, quindi $f(V)$ sarà un intervallo (connesso) di $\mathbb{R}$.
L'insieme V risulta essere una varietà di dimensione 1, in particolare

$$V = \big\{(x,y,z) \in A\ :\ F(x,y,z) = y - \alpha^2\log(z) = 0,\ G(x,y,z) = x - \pi = 0\ \big\}\ .$$

La Lagrangiana associata è: $L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda F(x,y,z) - \mu G(x,y,z)$
Annullare il gradiente di $L(x,y,z,\lambda,\mu)$ significa risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha\sin(x) - \mu = 0 \\ \log(z) - \lambda = 0 \\ \dfrac{y}{z} + \dfrac{\lambda\alpha^2}{z} = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

La soluzione del precedente sistema è $P_1 = (\pi, 0, 1)$, e risulta $f(P_1) = \alpha$.
Inoltre la funzione ristretta all'insieme V risulta essere $f_{|V}(x,y,z) = \alpha^2\left(\log(z)\right)^2 + \alpha$, quindi

$$f(V) = [\alpha, +\infty)$$

2) Si consideri il cambio di variabili $\varphi^{-1}(x, y) = (u, v)$ dato da:

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ \\ v = \alpha^2 x + 2y \end{cases}$$

Risulta $det\left(Jac\left(\varphi^{-1}\right)\right) = 4 + \alpha^2 > 0$.
Quindi $det\left(Jac\left(\varphi\right)\right) = \dfrac{1}{4+\alpha^2} > 0$, con $\varphi : B \to A$, dove

$$B = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u^2 \le v \le \pi, \ u \ge 0 \ \right\} \ .$$

Quindi

$$\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_B u\cos(v) \frac{1}{4+\alpha^2}\, du\, dv =$$

$$\frac{1}{4+\alpha^2} \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_{u^2}^{\pi} u\cos(v)\ dv \right)\ du = \frac{1}{4+\alpha^2} \int_0^{\sqrt{\pi}} u\left([\sin(v)]_{u^2}^{\pi} \right)\ du =$$

$$= \frac{1}{4+\alpha^2} \int_0^{\sqrt{\pi}} -u\sin(u^2)\ du = \frac{1}{4+\alpha^2} \left[\frac{1}{2}\cos(u^2) \right]_0^{\sqrt{\pi}} =$$

$$= -\frac{1}{4+\alpha^2}$$

Esercizio 3

$\alpha = 2, 3, 4$
$\beta = 3\ 4\ 5$

$$\begin{cases} y'' + (\alpha+\beta) y' + \alpha\beta y = \alpha x \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

$\lambda^2 + (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta = 0$ è l'eq. canonica associata all'eq. diff. lineare omogenea.

Quindi da $(\lambda+\alpha)(\lambda+\beta)=0$ segue $\lambda = -\alpha$, $\lambda = -\beta$

$$V_2 = \text{span}\{e^{-\alpha x}, e^{-\beta x}\}$$

Poiché α non è soluzione di $\lambda^2 + (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta = 0$, utilizzando il metodo per simpatia, cerchiamo una soluzione nella forma $a + bx$. Sostituendolo abbiamo:

$(\alpha+\beta) b + \alpha\beta(a + bx) = \alpha x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare in modo che la precedente relazione sia verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora dal principio d'identità tra polinomi risulta

$$\begin{cases} (\alpha+\beta) b + \alpha\beta a = 0 \\ \alpha\beta b = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+\beta)\frac{1}{\beta} + \alpha\beta a = 0 \\ b = \frac{1}{\beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{\beta}(\alpha+\beta) \\ b = \frac{1}{\beta} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{\alpha\beta^2}\cdot(\alpha+\beta) \\ b = \frac{1}{\beta} \end{cases}$$

2

Quindi

$$LV_2 = V_2 + \frac{1}{\beta}x - \left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha\beta}\right)$$

Risolviamo ora il problema di Cauchy, sapendo che $y = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{-\beta x} + \frac{1}{\beta}x - \left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha\beta}\right)$

e $y' = -\alpha c_1 e^{-\alpha x} - \beta c_2 e^{-\beta x} + \frac{1}{\beta}$.

Imponiamo le condizioni iniziali ottenendo

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \alpha \\ -\alpha c_1 - \beta c_2 + \frac{1}{\beta} = \beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = \alpha \\ -\alpha c_1 - \beta c_2 = \beta - \frac{1}{\beta} \end{cases}$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} = -\beta + \alpha$$ per cui

$$c_1 = \frac{\det\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta - \frac{1}{\beta} & -\beta \end{vmatrix}}{-\beta+\alpha} = \frac{-\alpha\beta - \beta + \frac{1}{\beta}}{-\beta+\alpha}$$

3

$$c_2 = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & \beta - \frac{1}{\beta} \end{vmatrix}}{-\beta + \alpha} = \frac{\beta - \frac{1}{\beta} + \alpha^2}{-\beta + \alpha} = \frac{\beta^2 - 1 + \alpha^2 \beta}{\beta(\alpha - \beta)}$$

da cui la soluzione

$$y = \frac{-\alpha\beta^2 - \beta^2 + 1}{\beta(\alpha - \beta)} e^{-\alpha x} + \frac{\beta^2 - 1 + \alpha^2\beta}{\beta(\alpha-\beta)} e^{-\beta x} + \frac{x}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha\beta}\right)$$

Esercizio 4 $\qquad \alpha = 2, 3, 4$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + \alpha}{\alpha k^2 + k + 1} z^k$$

Si tratta di una serie di potenze. Calcoliamo il suo raggio di convergenza

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2 + \alpha}{\alpha(k+1)^2 + (k+1) + 1} \cdot \frac{\alpha k^2 + k + 1}{k^2 + \alpha} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2}{\alpha(k+1)^2} \cdot \lim_{k\to+\infty} \frac{\alpha k^2}{k^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1 = \rho$$

Quindi il raggio di convergenza $R = \frac{1}{\rho}$ vale 1

Pertanto $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} i \in \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1 \}$ perché

$$\left|\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} i\right| = \sqrt{1 + i} \cdot \frac{1}{|\alpha|} = \frac{\sqrt{2}}{|\alpha|}$$

e $\frac{\sqrt{2}}{|\alpha|} < 1 \iff \sqrt{2} < |\alpha|$ (condizione verificata per i parametri $\alpha = 2, 3, 4$.

Esercizio 5

Sia $\omega = \left(\frac{2\alpha x^{2\alpha-1} y^2}{1+x^{2\alpha}y^2} + y\right)dx + \left(\frac{2y x^{2\alpha}}{1+x^{2\alpha}y^2} + x\right)dy$

ω è definita su $\mathbb{R}^2$ che è stellato.

Verifichiamo se è chiusa

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\alpha x^{2\alpha-1}y^2}{1+x^{2\alpha}y^2} + y\right) = \frac{4\alpha x^{2\alpha-1} y(1+x^{2\alpha}y^2) - 2yx^{2\alpha} \cdot 2\alpha x^{2\alpha-1} y^2}{(1+x^{2\alpha}y^2)^2} + 1$$

$$= \frac{4\alpha x^{2\alpha-1} y + \cancel{4\alpha x^{4\alpha-1} y^3} - \cancel{4\alpha x^{4\alpha-1} y^3}}{(1+x^{2\alpha}y^2)^2} + 1 = \boxed{\frac{4\alpha x^{2\alpha-1} y}{(1+x^{2\alpha}y^2)^2} + 1}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2yx^{2\alpha}}{1+x^{2\alpha}y^2} + x\right) = \frac{4\alpha y x^{2\alpha-1}(1+x^{2\alpha}y^2) - 2yx^{2\alpha} \cdot 2\alpha x^{2\alpha-1} y^2}{(1+x^{2\alpha}y^2)^2} + 1$$

$$= \frac{4\alpha y x^{2\alpha-1} + \cancel{4\alpha y^3 x^{4\alpha-1}} - \cancel{4\alpha x^{4\alpha-1} y^3}}{(1+x^{2\alpha}y^2)^2} + 1 = \boxed{\frac{4\alpha x^{2\alpha-1} y}{(1+x^{2\alpha}y^2)^2} + 1}$$

Infatti $\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}$.

Dal Teorema di Poincaré segue che ω è esatta, quindi esiste un potenziale

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \omega$$

$$\Gamma_1 = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \le t \le x, \quad s = 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 / \ t = x, \quad 0 \le s \le y\}$$

Quindi

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega = \int_0^x \omega(t,0)\,dt + \int_0^y \omega(x,s)\,ds$$

$$= \int_0^y \frac{2s x^{2\alpha}}{1+x^{2\alpha}s^2} + x\,ds = \Big[\log(1+x^{2\alpha}s^2) + xs\Big]_{s=0}^{s=y}$$

$$= \log(1+x^{2\alpha}y^2) + xy$$

Quinto Appello di ANALISI MATEMATICA T2, A.A. 18/19
CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni A.A. 18/19 del 07/01/2020
Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) ($\alpha = 3,4,5$) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = (x-\alpha y)^2 + \alpha z^2$. (i) [3 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli. (ii) [2 punti] Determinare $f(V)$, dove $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+\alpha y^2+z^2 = 1\ \right\}$.

---

(2) [5 punti] ($\alpha = 3,4,5$) Calcolare $\displaystyle\int_A f(x,y)\,dx\,dy$, dove $f(x,y) = \alpha xy$, e

$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \le y \le \sqrt{3}\,x \ , \ \alpha \le \|(x,y)\|^2 \le \alpha+1\ \right\}$.

---

(3) ($\alpha = 2,3,4$) Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - \alpha y = 1 + \alpha x \\ y(0) = \alpha, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

(i-2 punti) determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea; (ii-2 punti) calcolare la soluzione del problema di Cauchy; (iii-1 punto) calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)e^{\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}x}$.

---

(4) ($\alpha = 2,3,4$) [2 punti] Posto $B_\alpha(0) := \{(x,y) : \quad x^2+y^2 < \alpha^2\}$, sia $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B_\alpha(0), \quad z = \alpha x + y\}$. Calcolare l'integrale di superficie

$$\int\int_\Sigma z d\sigma$$

---

(5) ($\alpha = 2,3,4$) Sia

$$\omega = \left(\frac{1}{1+(x+\alpha y)^2} + \frac{2x}{\alpha+x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{\alpha}{1+(x+\alpha y)^2} + \frac{2y}{\alpha+x^2+y^2}\right)dy.$$

(i-1 punto) verificare che ω è chiusa; (ii-1 punto) determinare un potenziale di ω; (iii-1 punto) calcolare $\displaystyle\int_{[(0,0),(\alpha,\alpha)]} \omega$, dove $[(0,0),(\alpha,\alpha)]$ è il segmento orientato da $(0,0)$ a (α,α).

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(6) [2 punti] Scrivere la definizione di curva continua rettificabile.

---

(7) [3 punti] Scrivere le proprietà dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare di ordine due ed enunciare la relazione che sussiste con l'integrale generale dell'eqazione differenziale lineare omogenea ad essa associata.

---

(8) [2 punti] Scrivere l'enunciato del teorema sul differenziale delle funzioni composte in più variabili.

---

(9) [3 punti] Scrivere la definizione di funzione cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^n$.
Enunciare il Teorema del cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^n$.

Soluzioni esercizi

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$.

i) Vale:

$$\nabla f(x,y,z) = (2(x-\alpha y), -2\alpha(x-\alpha y), 2\alpha z)$$

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x,y,z) = (\alpha y, y, 0) = P_y,\ y \in \mathbb{R}$$

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2\alpha & 0 \\ -2\alpha & 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix} = D^2 f(P_y)$$

La matrice $D^2 f(P_y)$ è semidefinita positiva.
Poiché $f(x,y,z) \geq 0 = f(P_y)$, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, allora tutti i punti critici P_y sono punti di minimo.

ii) L'insieme V è connesso, limitato e chiuso, quindi compatto. $f \in C(V;\mathbb{R})$, quindi $f(V)$ sarà un intervallo connesso e compatto di $\mathbb{R}$.
Vale $V = Fr(V)$, in particolare è una varietà di dimensione 2, con

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ F(x,y,z) = x^2 + \alpha y^2 + z^2 - 1 = 0 \right\} .$$

La Lagrangiana associata a V è:

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda F(x,y,z)$$

Annullare il gradiente di $L(x,y,z,\lambda)$ significa risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2(x-\alpha y) - 2\lambda x = 0 \\ -2\alpha(x-\alpha y) - 2\alpha\lambda y = 0 \\ 2\alpha z - 2\lambda z = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - \alpha y = 0 \\ x - (\alpha-\lambda)y = 0 \\ z(\alpha-\lambda) = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del precedente sistema sono:

$$P_1 = (0,0,-1)\,,\ P_2 = (0,0,1)\,,$$

$$P_3 = \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}}, -\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}}, 0\right),\ P_4 = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}}, 0\right),$$

$$P_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}, -\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}, 0\right),\ P_6 = \left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}, 0\right) .$$

Risulta:

$$f(P_1) = f(P_2) = \alpha,\ f(P_3) = f(P_4) = 0,\ f(P_5) = f(P_6) = 1+\alpha\ .$$

Quindi

$$f(V) = [0, 1+\alpha]$$

2) Si consideri il cambio di coordinate $\varphi(r,\theta) = (x,y)$ dato da:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

con $0 \leq r,\ \theta \in [0, 2\pi]$, e $det\,(Jac\,(\varphi)) = r \geq 0$. Risulta $\varphi : B \to A$, dove

$$B = \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{\alpha} \leq r \leq \sqrt{\alpha+1},\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\} .$$

Quindi

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_B \alpha r^3 \cos(\theta)\ \sin(\theta)\ dr\,d\theta =$$

$$= \alpha \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha+1}} r^3 \cos(\theta)\sin(\theta)\ dr \right)\ d\theta =$$

$$= \alpha \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(\theta)\ \sin(\theta)\ d\theta \right) \left(\int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha+1}} r^3\ dr \right) =$$

$$= \alpha \left[\frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha+1}} =$$

$$= \frac{\alpha}{32}\,(2\alpha+1)$$

Esercizio 3

L'equazione caratteristica è: $\lambda^2+\lambda-\alpha=0$. Quindi

$$\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\alpha}}{2}.$$

$$V_2=\operatorname{span}\left\{e^{\left(\frac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)x},\ e^{\left(\frac{-1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)x}\right\}$$

Una soluzione di $y''+y'-\alpha y=1+\alpha x$ si può ricercare nella forma $a+bx$. Quindi, sostituendo

$b-\alpha(a+bx)=1+\alpha x\quad \forall x\in\mathbb{R}$ che implica

$$\begin{cases} b-\alpha a=1\\ -\alpha b=\alpha\end{cases}. \text{ Da ciò segue } \begin{cases} b=-1\\ a=-\frac{2}{\alpha}\end{cases}$$

Quindi $LV_2=V_2-\frac{2}{\alpha}-x=\left\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})\,/\,\varphi(x)=c_1e^{\left(\frac{-1+\sqrt{4\alpha+1}}{2}\right)x}+c_2e^{-\left(\frac{1+\sqrt{4\alpha+1}}{2}\right)x}-\frac{2}{\alpha}-x\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$

Calcoliamo la soluzione imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} c_1+c_2-\frac{2}{\alpha}=\alpha\\ \frac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}c_1-\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}c_2-1=0\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1\\ \frac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} & -\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}-\frac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}=-\sqrt{1+4\alpha}$$

Quindi

$$\bar{c}_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} \alpha+\frac{2}{\alpha} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\end{bmatrix}}{\sqrt{1+4\alpha}} = +\left(\frac{\alpha^2+2}{\alpha}\,\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}+1\right)\frac{1}{\sqrt{1+4\alpha}}$$

$$\bar{c}_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\alpha}+\alpha \\ -\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2} & 1\end{bmatrix}}{-\sqrt{1+4\alpha}} = -\frac{\left(1-\frac{2+\alpha^2}{\alpha}\,\frac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}\right)}{\sqrt{1+4\alpha}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)\cdot e^{\frac{1-\sqrt{1+4\alpha}}{2}x} = \bar{c}_1 \ldots$$

Esercizio 4

$$\iint_\Sigma z\,d\sigma = \iint_{B_5(0)} (5x+y)\cdot\sqrt{1+25+1}\,dx\,dy$$

infatti $\quad d\sigma = \sqrt{1+|\nabla(5x+y)|^2}\,dx\,dy$

$$= \iint_{B_5(0)} (5x+y)\sqrt{27}\,dx\,dy = \sqrt{27}\int_0^5\int_0^{2\pi}(5\cos\theta+\sin\theta)\,\rho\,d\theta\,d\rho$$

$$= 0$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\bar\alpha}^{\hat\alpha}\Big(x^4 - \alpha x^3 + \frac{\alpha}{2}x^2 - (\alpha+2)x^3 + \alpha(\alpha+2)x^2 - \frac{\alpha}{2}(\alpha+2)x$$ (3)

$$+\frac{3}{2}\alpha x^2 - \frac{3}{2}\alpha^2 x + \frac{3}{4}\alpha^2\Big)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\bar\alpha}^{\hat\alpha} x^4 - 2(\alpha+1)x^3 + \alpha(\alpha+4)x^2 - \alpha(2\alpha+1)x + \frac{3}{4}\alpha^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}(\alpha+1)x^4 + \frac{\alpha}{3}(\alpha+4)x^3 - \frac{\alpha}{2}(2\alpha+1)x^2 + \frac{3}{4}\alpha^2 x\Big]_{x=\bar\alpha}^{x=\hat\alpha}$$

Esercizio 5

$$-\frac{1}{(1+(x+\alpha y)^2)^2}\cdot 2(x+\alpha y)\alpha - \frac{4xy}{(\alpha+x^2+y^2)^2} = \frac{\partial \omega_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = -\frac{2\alpha(x+\alpha y)}{(1+(x+\alpha y)^2)^2} - \frac{4xy}{(\alpha+x^2+y^2)^2}.$$ Quindi

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}.$$

Per il Teorema di Poincaré esiste un potenziale

④

$$\int_{[(0,0),(x,0)]\cup[(x,0),(x,y)]} \omega$$

$$= \int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{2t}{\alpha+t^2} \right) dt + \int_0^y \left(\frac{\alpha}{1+(x+\alpha\tau)^2} + \frac{2\tau}{\alpha+x^2+\tau^2} \right) d\tau$$

$$= \Big[\arctan t + \log(\alpha+t^2) \Big]_{t=0}^{t=x}$$

$$+ \Big[\arctan(x+\alpha\tau) + \log(\alpha+x^2+\tau^2) \Big]_{\tau=0}^{\tau=y}$$

$$= \cancel{\arctan x} + \cancel{\log(\alpha+x^2)} - \log\alpha$$

$$+ \arctan(x+\alpha y) + \log(\alpha+x^2+y^2) - \cancel{\arctan x}$$

$$- \cancel{\log(\alpha+x^2)}$$

Quindi $V(x,y) = \arctan(x+\alpha y) + \log(\alpha+x^2+y^2)$ è un potenziale. Inoltre

$$\int_{[(0,0),(\alpha,\alpha)]} \omega = V(\alpha,\alpha) - V(0,0) = \arctan(\alpha+\alpha^2) + \log(\alpha+2\alpha^2)$$

$$- \log\alpha^2 .$$

Sesto Appello di ANALISI MATEMATICA T2, A.A. 18/19
CdL in Ingegneria Chimica e Biochimica, Elettronica e Telecomunicazioni A.A. 18/19 del 07/02/2020
Commissione proff. Ferrari e Martino

COGNOME E NOME ....

N. di matricola ....

Durata della prova due ore e trenta minuti. Gli studenti che decidono di uscire dopo l'inizio della prova verranno valutati sull'elaborato svolto fino al momento della loro uscita e la loro prova verrà considerata conclusa. Il testo, debitamente compilato, va riconsegnato.

....

Parte di Esercizi (punteggio complessivo 20 punti).

---

(1) ($\alpha = 3, 4, 5$) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - \alpha)y^2 - x^2$.

i) [3 punti] Determinare eventuali punti critici di f e classificarli.

ii) [2 punti] Determinare $f(V)$, dove $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \le x = y \le 7 \}$.

---

(2) [5 punti] ($\alpha = 3, 4, 5$) Calcolare $\int_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, dove $f(x, y, z) = \alpha(x^2 + y^2)$, e

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \le z^2 + \alpha, \ x \ge 0, \ y \ge 0, \ |z| \le \alpha \} .$$

---

(3) ($\alpha = 3, 4, 5$) Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1 + \alpha y^2)(1 + x) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(i-2 punti) determinare la soluzione del problema; (ii-1 punto) determinare il più ampio dominio d'esistenza della soluzione trovata; (iii-1 punto) calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{x}$, (iv-1 punto) calcolare $y''(0)$ e la formula di Taylor della soluzione in un intorno di 0.

---

(4) ($\alpha = 3, 4, 5$) (i-1 punto) Calcolare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze in $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^k}{k!} (z - \alpha i)^k.$$

(ii-1 punto) stabilire se la serie converge in $2 + \alpha i$.

---

(5) ($\alpha = 3, 4, 5$) Sia

$$\omega = \left(2x \log(1 + x^4 + y^2) + \frac{4x^3(\alpha + x^2 + y^2)}{1 + x^4 + y^2}\right) dx + \left(2y \log(1 + x^4 + y^2) + \frac{2y(\alpha + x^2 + y^2)}{1 + x^4 + y^2}\right) dy.$$

(i-1 punto) verificare che ω è chiusa; (ii-2 punti) determinare un potenziale di ω.

Parte di teoria (punteggio complessivo 10 punti).

---

(6) [2 punti] Scrivere la definizione di superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.

---

(7) [3 punti] Scrivere la definizione di wronskiano ed enunciare il Teorema relativo alle proprietà del wronskiano.

---

(8) [2 punti] Scrivere la definizione di derivata direzionale.

---

(9) [3 punti] Scrivere l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Bolzano in $\mathbb{R}^n$.

Soluzioni esercizi

1) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.

i) Vale:

$$\nabla f(x,y) = \big(y^2 - 2x, 2y(x-\alpha)\big)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = (0,0) = P_0 \\ \\ (x,y) = (\alpha, +\sqrt{2\alpha}) = P_1 \\ \\ (x,y) = (\alpha, -\sqrt{2\alpha}) = P_2 \end{cases}$$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ \\ 2y & 2(x-\alpha) \end{pmatrix}$$

La matrice $D^2 f(P_0)$ è definita negativa, quindi P_0 è un punto di massimo locale.
La matrice $D^2 f(P_1)$ e la matrice $D^2 f(P_2)$ sono indefinite, quindi P_1 e P_2 sono punti di sella.

ii) L'insieme V è connesso, limitato e chiuso, quindi compatto.
Poiché $f \in C(V;\mathbb{R})$, allora $f(V)$ sarà un intervallo connesso e compatto di $\mathbb{R}$.
Vale $V = Fr(V) = M \cup P_3 \cup P_4$, dove $P_3 = (-1,-1)$, $P_4 = (7,7)$ e M è una varietà di dimensione 1, con

$$M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 7, \ F(x,y) = x - y = 0, \ \big\} \ .$$

La Lagrangiana associata a M è:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda F(x,y)$$

Annullare il gradiente di $L(x,y,\lambda)$ significa risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y^2 - 2x = \lambda \\ \\ 2y(x-\alpha) = -\lambda \\ \\ x = y \end{cases}$$

Le soluzioni del precedente sistema sono:

$$P_0 = (0,0)\,, \ P_5 = \left(\frac{2(\alpha+1)}{3}, \frac{2(\alpha+1)}{3}\right)$$

Risulta:

$$f(P_0) = 0, \ f(P_5) = -\frac{4}{27}(\alpha+1)^3, \ f(P_3) = -(\alpha+2), \ f(P_4) = (6-\alpha)49 \ .$$

Quindi (per $\alpha = 3,4,5$) vale

$$f(V) = \left[-\frac{4}{27}(\alpha+1)^3, (6-\alpha)49\right]$$

2) Si consideri il cambio di coordinate $\varphi(r,\theta,h) = (x,y,z)$ dato da:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta \\ \\ z = h \end{cases}$$

con $0 \le r,\ \theta \in [0,2\pi],\ h \in \mathbb{R}$, e $det\,(Jac\,(\varphi)) = r \ge 0$.
Risulta $\varphi : B \to A$, dove

$$B = \left\{ (r,\theta,h) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le r,\ r^2 \le h^2 + \alpha,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ -\alpha \le h \le \alpha \right\}.$$

Quindi

$$\int_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_B \alpha r^3\, dr\, d\theta\, dh =$$

$$= \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\int_0^{\sqrt{h^2+\alpha}} r^3\, dr \right) dh \right) d\theta =$$

$$= \alpha \frac{\pi}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{h^2+\alpha}} \right) dh =$$

$$= \alpha \frac{\pi}{8} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(h^2+\alpha\right)^2\, dh =$$

$$= \alpha \frac{\pi}{8} \int_{-\alpha}^{\alpha} h^4 + 2h^2\alpha + \alpha^2\, dh =$$

$$= \alpha \frac{\pi}{8} \left(\left[\frac{h^5}{5} + 2\alpha \frac{h^3}{3} + \alpha^2 h \right]_{-\alpha}^{\alpha} \right) =$$

$$= \alpha \frac{\pi}{4} \left(\frac{\alpha^5}{5} + 2\frac{\alpha^4}{3} + \alpha^3 \right)$$

Esercizio 3

$$\begin{cases} y' = (1+\alpha y^2)(1+x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un'eq. diff a variabili separabili.

La soluzione è data in forma implicita da

$$\int_0^y \frac{1}{1+\alpha \tau^2} d\tau = \int_0^x (1+t)\,dt$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arctg}(\sqrt{\alpha}\,\tau)\right]_{\tau=0}^{\tau=y} = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=x}$$

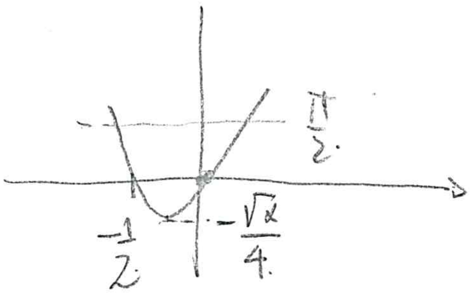
$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{artg}(\sqrt{\alpha}\, y) = x + \frac{x^2}{2}$$

Quindi $\operatorname{artg}(\sqrt{\alpha}\, y) = \sqrt{\alpha}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$ e

$$\sqrt{\alpha}\, y = \operatorname{tg}\left(\sqrt{\alpha}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\right) \quad \text{e}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{\alpha}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} < \sqrt{\alpha}\left(x + \frac{x^2}{2}\right) < \frac{\pi}{2}}$$



$\alpha = 3, 4, 5$ (2)

$$\sqrt{\alpha}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{4} \qquad \frac{\sqrt{\alpha}}{4} < \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$x + \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} < 0 \iff x^2 + 2x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} < 0$$

$$\boxed{\frac{1-\sqrt{1+\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}}}{1} < x < \frac{1+\sqrt{1+\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}}}{1}}$$

$$y'' = 2\alpha y y'(1+x) + (1+\alpha y^2) \qquad ; \; y'(0) = 1$$

$$y''(0) = 2\alpha y(0)\, y'(0) + 1 + \alpha y^2(0) = 0$$

Quindi $\quad y(x) = x + o(x^2)$.

<u>Esercizio 4</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{n!} (z - \alpha i)^k$$

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k\cdot\frac{1}{\cancel{k+1}}\cdot\cancel{(k+1)}$$

$$= \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} e$$

Così il raggio di convergenza è $\frac{1}{e}$.

poiché $|2+\alpha i-\alpha i| = 2 > \frac{1}{e}$

allora la serie diverge per $z = 2+\alpha i$.

Esercizio 5

$$V(x,y) = (\alpha+x^2+y^2)\log(1+x^4+y^2)$$

infatti

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x\log(1+x^4+y^2) + (\alpha+x^2+y^2)\cdot\frac{4x^3}{1+x^4+y^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2y\log(1+x^4+y^2) + (\alpha+x^2+y^2)\cdot 2y$$

da cui $dV = \omega$.