Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 18/12/2019

MATRICOLA:...........................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria dell'energia elettrica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = e^{3n} + e^{-2m},\ n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq 1 \right\}.$$

2)*(3 punti)* Studiare il seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log(n! + n^3) - \left(\dfrac{3n+2}{n}\right)^n - \cos(1+n^2)}{\left(3 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n + e^n}.$$

3)*(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 - x + 2x^3) + \cosh(2x^2 - 3x) - \sinh(2x^2 - x) - e^{2x^2}}{\cosh(2x - 4x^2) + 2xe^{x - x^2} - \sqrt{1 - 2x^2} - \sin(5x^2 + 2x)}.$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = e^{|x|} - e^{|4-x|}$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4 + 5\sin^2(x)}\, dx \ .$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $$\int_0^{+\infty} \frac{2\sin(7x) + 3x^4}{(1 + e^{-x})(4x^{3\alpha} + 5x\sqrt{x})}\, dx \ .$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)^{-n} .$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $$\left(\frac{z^3}{2} + \frac{25}{3+4i} - 3\right)(\bar{z} - Re(z)) = 0 .$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, A compatto e $f : A \to A$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \quad \forall x, y \in A, \quad x \neq y .$$

Dimostrare che esiste un unico punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = x_0$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 18/12/2019

MATRICOLA:..........................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria dell'energia elettrica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = e^{-4n} - e^{2m},\ n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq 1 \right\}.$$

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite:
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(4 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n - e^n + \log(3 + n^n)}{\sin(2 + \log(n)) + \left(\dfrac{4n+5}{n}\right)^n}.$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sinh(x + 13x^2) - xe^{7x} + \cos(3x + 2x^2) - \sqrt{1 + 3x^2}}{\cosh(4x^2 - x) + \log(1 + x + 3x^3) - e^{x^3} - \sin(x + 2x^3)}.$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = e^{|x-2|} - e^{|x|}$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 + 3\cos^2(x)}\, dx$.

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1 + e^{-x})(2x^3 + 4\sin(5x))}{3x\sqrt{x} + 2x^{6\alpha}}\, dx$.

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{\log(n)} \left(\frac{\alpha+2}{3}\right)^{-n}$.

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $\left(16z^3 + \dfrac{6}{2-\sqrt{2}i} - \sqrt{2}i\right)(z + iIm(\bar{z})) = 0$.

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, A compatto e $f : A \to A$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \quad \forall x, y \in A, \quad x \neq y \ .$$

Dimostrare che esiste un unico punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = x_0$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 14/01/2020

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

□ Ingegneria dell'energia elettrica □ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad \left(x^2 - 5\right)^2 \geq 25 \right\}.$$

2)*(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n!)^2 \cos(\pi n) + \log(n)}{(n^2)! + n^n \cos(\pi n)} \ .$$

3)*(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\cos(x + 3x^2) + \sinh(7x^2 - 4x) + 2e^{2x - 3x^2} - 4\sqrt{1 + 2x^2}}{\sin(x^2 - x) + \log(1 + x - x^3) + \cosh(x^2 + x) - e^{x^2}}.$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \log(x|x-3|) - |x+2|$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2 - x + 2}{x(x+2)^3}\, dx$.

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_3^4 \frac{\left(16 - x^2\right)^{3+5\alpha}}{\left(x^2 - 9\right)^{\alpha - 2}} \sinh\left(x + 2|\alpha|\right)\, dx$.

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{7\sqrt{n} + 4|\alpha|} \right)^2 \left(\frac{5 - 4\alpha}{8} \right)^n$.

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $\left(\bar{z} - 2\sqrt{3}\, i \right)^3 = 64$.

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.
Provare per induzione la seguente formula

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 14/01/2020

MATRICOLA:..........................**NOME e COGNOME**: ....

☐ Ingegneria dell'energia elettrica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad \left(x^2 - 3\right)^2 < 9 \right\}.$$

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(n^2\right)! + \log(n)\cos(\pi n)}{n^n \cos(\pi n) + (n!)^2} \ .$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sinh(x + x^2) + \cos(2x^2 + x) + \log(1 - x + 2x^3) - e^{x^3}}{2e^{3x} - 3\sin(2x + 2x^2) + 2\cosh(x - x^2) - 4\sqrt{1 + 2x^2}}.$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = |x+1| - \log(x|x-2|)$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+3x-3}{x(x+3)^3}\,dx$.

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_2^3 \frac{\left(x^2-4\right)^{4+2\alpha}}{\left(9-x^2\right)^{\alpha-3}}\ \cosh\left(x+3|\alpha|\right)\ dx$.

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4|\alpha| + 5\sqrt{n}} \right)^2 \left(\frac{4-2\alpha}{7} \right)^n .$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $\left(\bar{z} + \sqrt{3}\, i \right)^3 = -8 .$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.
Provare per induzione la seguente formula

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 04/02/2020

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

□ Ingegneria dell'energia elettrica □ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = 2(-1)^{3n} + \frac{5}{\sqrt{n}}, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1 \right\}.$$

2)*(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+2)! - n!\,(n+3)^2}{n!\,(3n+2) + (n+1)!}\,.$$

3)*(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sinh(x+2x^2) + \cos(x+x^3) - e^{x+x^2} + \log(1-x^3+x^4)}{\cosh(x-x^2) - \sin(x+x^2) - \sqrt{1+x^2-x^3} + \sinh(x+x^2)}.$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \dfrac{1}{2^{|\log(x)|}}$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \sin(4x^3) e^{2x^3}\, dx$.

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\log(3x))}{4x\,(x-1)^{|\alpha+2|}}\, dx$.

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\alpha+2)^{n+2}}{(2\alpha-4)^{n+1}} .$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $$\bar{z}^3 = |z|^4 .$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $A = [1,2] \cup (3,4)$. Scrivere esplicitamente una funzione $f \in C(A;\mathbb{R})$, invertibile e tale che la funzione inversa f^{-1} non sia continua.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 04/02/2020

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

□ Ingegneria dell'energia elettrica □ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = \frac{3}{n^2} + 4(-1)^{5n}, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1 \right\}.$$

2)*(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)! + n!\,(3n+4)}{(n+1)!\,(n+3) - n!\,(n+1)^2}\ .$$

3)*(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\cos(x+x^2) + \sin(2x - x^3) + \sqrt{1 - x^2 - x^3} - 2e^{x-x^2}}{\sinh(x - 3x^2) + \cos(x - x^3) - e^{2x-x^2} + \log(1 + x + 5x^2)}.$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = 3^{|\log(x)|}$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(3x^2)e^{4x^2}\, dx$.

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\log(4x))}{5x\ (x-1)^{|\alpha-3|}}\, dx$.

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4\alpha - 2)^{n+1}}{(5\alpha + 4)^{n+2}} .$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $$z^3 = |z|^4 \bar{z} .$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $A = [1, 2] \cup (3, 4)$. Scrivere esplicitamente una funzione $f \in C(A; \mathbb{R})$, invertibile e tale che la funzione inversa f^{-1} non sia continua.