Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 18/12/2019

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria dell'energia elettrica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \quad x = e^{3n} + e^{-2m},\ n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq 1\right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset,\ Der(A) = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \quad x = e^{3n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\right\},\ Fr(A) = A \cup Der(A),\ \bar{A} = A \cup Der(A)$$

$$\inf A = e^3,\ \min A = \nexists,\ \sup A = +\infty,\ \max A = \nexists$$

A non è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2)*(3 punti)* Studiare il seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log(n! + n^3) - \left(\dfrac{3n+2}{n}\right)^n - \cos(1+n^2)}{\left(3 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n + e^n} \qquad = -e^{\frac{2}{3}}$$

3)*(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 - x + 2x^3) + \cosh(2x^2 - 3x) - \sinh(2x^2 - x) - e^{2x^2}}{\cosh(2x - 4x^2) + 2xe^{x - x^2} - \sqrt{1 - 2x^2} - \sin(5x^2 + 2x)} \qquad = \frac{-\frac{25}{6}}{-\frac{23}{3}} = \frac{25}{46}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = e^{|x|} - e^{|4-x|}$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4 + 5\sin^2(x)}\, dx$.

$$\left[\frac{1}{6} \arctan\left(\frac{3\tan(x)}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\sin(7x) + 3x^4}{(1 + e^{-x})(4x^{3\alpha} + 5x\sqrt{x})}\, dx$.

$$\alpha > \frac{5}{3}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{\alpha+3}{2} \right)^{-n}$.

$$\alpha < -5,\ \alpha \geq -1$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $\displaystyle\left(\frac{z^3}{2} + \frac{25}{3+4i} - 3 \right) (\bar{z} - Re(z)) = 0$.

$$\left\{ -2i, \pm\sqrt{3} + i \right\} \cup \{ z \in \mathbb{C} \ : \ Im(z) = 0 \}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, A compatto e $f : A \to A$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \quad \forall x, y \in A, \quad x \neq y \ .$$

Dimostrare che esiste un unico punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = x_0$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 18/12/2019

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria dell'energia elettrica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1)*(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = e^{-4n} - e^{2m},\ n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq 1 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset,\ Der(A) = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = -e^{2m},\ m \in \mathbb{N},\ m \geq 1 \right\},\ Fr(A) = A \cup Der(A),\ \bar{A} = A \cup Der(A)$$

$$\inf A = -\infty,\ \min A = \nexists,\ \sup A = \max A = -e^2 + e^{-4}$$

A non è aperto, non è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2)*(3 punti)* Studiare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(4 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n - e^n + \log(3 + n^n)}{\sin(2 + \log(n)) + \left(\dfrac{4n+5}{n}\right)^n} \qquad = e^{-\frac{5}{4}}$$

3)*(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x + 13x^2) - xe^{7x} + \cos(3x + 2x^2) - \sqrt{1 + 3x^2}}{\cosh(4x^2 - x) + \log(1 + x + 3x^3) - e^{x^3} - \sin(x + 2x^3)} \qquad = \frac{-\frac{91}{3}}{-\frac{7}{2}} = \frac{182}{21}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = e^{|x-2|} - e^{|x|}$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2+3\cos^2(x)}\, dx$.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{10}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}\tan(x)}{\sqrt{5}}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+e^{-x})(2x^3+4\sin(5x))}{3x\sqrt{x}+2x^{6\alpha}}\, dx$.

$$\alpha > \frac{2}{3}$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{\log(n)} \left(\frac{\alpha+2}{3}\right)^{-n} .$$

$$\alpha < -5, \ \alpha \geq 1$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $$\left(16z^3 + \frac{6}{2-\sqrt{2}i} - \sqrt{2}i\right)(z + iIm(\bar{z})) = 0 .$$

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i\right\} \cup \{z \in \mathbb{C} \ : \ Re(z) = 0 \}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, A compatto e $f : A \to A$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \quad \forall x, y \in A, \quad x \neq y .$$

Dimostrare che esiste un unico punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = x_0$.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 14/01/2020

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

□ Ingegneria dell'energia elettrica □ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \quad \left(x^2 - 5\right)^2 \geq 25\right\} = \left(-\infty, -\sqrt{10}\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{10}, +\infty\right)$$

$$Int(A) = \left(-\infty, -\sqrt{10}\right) \cup \left(\sqrt{10}, +\infty\right), \ Der(A) = A \setminus \{0\},$$

$$Fr(A) = \left\{-\sqrt{10}, 0, \sqrt{10}\right\}, \ \bar{A} = A$$

$$\inf A = -\infty, \ \min A = \nexists, \ \sup A = +\infty, \ \max A = \nexists$$

A non è aperto, è chiuso, non è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n!)^2 \cos(\pi n) + \log(n)}{(n^2)! + n^n \cos(\pi n)} = 0$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\cos(x + 3x^2) + \sinh(7x^2 - 4x) + 2e^{2x - 3x^2} - 4\sqrt{1 + 2x^2}}{\sin(x^2 - x) + \log(1 + x - x^3) + \cosh(x^2 + x) - e^{x^2}} = \frac{-26}{\frac{1}{2}} = -52$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \log(x|x-3|) - |x+2|$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2 - x + 2}{x(x+2)^3}\, dx$.

$$\left[\frac{\log(|x|)}{4} - \frac{\log(|x+2|)}{4} - \frac{1}{2(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{18}$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_3^4 \frac{\left(16 - x^2\right)^{3+5\alpha}}{\left(x^2 - 9\right)^{\alpha-2}}\ \sinh(x + 2|\alpha|)\ dx$.

$$-\frac{4}{5} < \alpha < 3$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{7\sqrt{n} + 4|\alpha|} \right)^2 \left(\frac{5-4\alpha}{8} \right)^n .$$

$$-\frac{3}{4} < \alpha \leq \frac{13}{4}$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $$\left(\bar{z} - 2\sqrt{3}\, i \right)^3 = 64 .$$

$$\left\{ -2, 4 - 2\sqrt{3}\, i, -2 - 4\sqrt{3}\, i \right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.
Provare per induzione la seguente formula

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 14/01/2020

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria dell'energia elettrica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad \left(x^2 - 3\right)^2 < 9 \right\} = \left(-\sqrt{6}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{6}\right)$$

$$Int(A) = A, \ Der(A) = \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right],$$

$$Fr(A) = \left\{-\sqrt{6}, 0, \sqrt{6}\right\}, \ \bar{A} = \left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$$

$$\inf A = -\sqrt{6}, \ \min A = \nexists, \ \sup A = \sqrt{6}, \ \max A = \nexists$$

A è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n^2)! + \log(n)\cos(\pi n)}{n^n \cos(\pi n) + (n!)^2} = +\infty$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sinh(x + x^2) + \cos(2x^2 + x) + \log(1 - x + 2x^3) - e^{x^3}}{2e^{3x} - 3\sin(2x + 2x^2) + 2\cosh(x - x^2) - 4\sqrt{1 + 2x^2}} = \frac{-\frac{7}{6}}{11} = -\frac{7}{66}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = |x+1| - \log(x|x-2|)$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+3x-3}{x(x+3)^3}\,dx$.

$$\left[\frac{\log(|x+3|)}{9} - \frac{\log(|x|)}{9} - \frac{4}{3(x+3)} - \frac{1}{2(x+3)^2}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{9}\log\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{187}{2400}$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_2^3 \frac{\left(x^2-4\right)^{4+2\alpha}}{\left(9-x^2\right)^{\alpha-3}} \cosh(x+3|\alpha|)\,dx$.

$$-\frac{5}{2} < \alpha < 4$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4|\alpha| + 5\sqrt{n}}\right)^2 \left(\frac{4-2\alpha}{7}\right)^n$.

$$-\frac{3}{2} < \alpha \leq \frac{11}{2}$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $\left(\bar{z} + \sqrt{3}\, i\right)^3 = -8$.

$$\left\{1, 1 + 2\sqrt{3}\, i, -2 + \sqrt{3}\, i\right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Provare per induzione la seguente formula

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 04/02/2020

MATRICOLA:.............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria dell'energia elettrica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = 2(-1)^{3n} + \frac{5}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset,\ Der(A) = \{-2, 2\},\ Fr(A) = A \cup Der(A),\ \bar{A} = A \cup Der(A)$$

$$\inf A = -2,\ \min A = \nexists,\ \sup A = \max A = 2 + \frac{5}{\sqrt{2}}$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite: $$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+2)! - n!\,(n+3)^2}{n!\,(3n+2) + (n+1)!} = -\frac{3}{4}$$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sinh(x + 2x^2) + \cos(x + x^3) - e^{x+x^2} + \log(1 - x^3 + x^4)}{\cosh(x - x^2) - \sin(x + x^2) - \sqrt{1 + x^2 - x^3} + \sinh(x + x^2)} = \frac{-2}{-\frac{1}{6}} = 12$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = \dfrac{1}{2^{|\log(x)|}}$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \sin(4x^3) e^{2x^3}\, dx$.

$$\left[\frac{e^{2x^3}\left(\sin\left(4x^3\right) - 2\cos\left(4x^3\right)\right)}{30}\right]_0^{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$= -\frac{1}{15}\left(e^{2\pi} - 1\right)$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\log(3x))}{4x\,(x-1)^{|\alpha+2|}}\, dx$.

$$-3 < \alpha < -1,\ \alpha \neq -2$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\alpha+2)^{n+2}}{(2\alpha-4)^{n+1}}$.

$$-6 < \alpha < \frac{2}{5}$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $\bar{z}^3 = |z|^4$.

$$\left\{0, 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.

Sia $A = [1,2] \cup (3,4)$. Scrivere esplicitamente una funzione $f \in C\,(A;\mathbb{R})$, invertibile e tale che la funzione inversa f^{-1} non sia continua.

Prova scritta di Analisi Matematica T-1, 04/02/2020

MATRICOLA:............................**NOME e COGNOME**: . . . .

☐ Ingegneria dell'energia elettrica ☐ Ingegneria elettronica e telecomunicazioni

---

1) *(3 punti)* Dato il seguente insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Stabilire se è aperto, chiuso, compatto.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \quad x = \frac{3}{n^2} + 4(-1)^{5n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}.$$

$$Int(A) = \emptyset,\ Der(A) = \{-4, 4\},\ Fr(A) = A \cup Der(A),\ \bar{A} = A \cup Der(A)$$

$$\inf A = -4,\ \min A = \nexists,\ \sup A = \max A = \frac{19}{4}$$

A non è aperto, non è chiuso, è limitato, non è compatto.

2) *(3 punti)* Studiare il seguente limite: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)! + n!\,(3n+4)}{(n+1)!\,(n+3) - n!\,(n+1)^2}$ $= 2$

3) *(4 punti)* Studiare il seguente limite (sul retro di questo foglio)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x+x^2) + \sin(2x - x^3) + \sqrt{1 - x^2 - x^3} - 2e^{x-x^2}}{\sinh(x - 3x^2) + \cos(x - x^3) - e^{2x-x^2} + \log(1 + x + 5x^2)} \qquad = \frac{-\frac{13}{6}}{-\frac{23}{6}} = \frac{13}{23}$$

4) *(5 punti)* Studiare la seguente funzione (sul retro di questo foglio): $f(x) = 3^{|\log(x)|}$.

5) *(4 punti)* Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(3x^2)e^{4x^2}\,dx$.

$$\left[\frac{e^{4x^2}\left(3\sin\left(3x^2\right)+4\cos\left(3x^2\right)\right)}{50}\right]_0^{\sqrt{\pi}}$$

$$= -\frac{2}{25}\left(e^{4\pi}+1\right)$$

6) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\log(4x))}{5x\,(x-1)^{|\alpha-3|}}\,dx$.

$$2 < \alpha < 4,\ \alpha \neq 3$$

7) *(4 punti)* Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4\alpha-2)^{n+1}}{(5\alpha+4)^{n+2}}$.

$$\alpha < -6,\ \alpha > -\frac{2}{9}$$

8) *(3 punti)* Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$: $z^3 = |z|^4 \bar{z}$.

$$\{0, \pm 1, \pm i\}$$

9) *(facoltativo, 3 punti)* Eventualmente sul retro di questo foglio.
Sia $A = [1,2] \cup (3,4)$. Scrivere esplicitamente una funzione $f \in C(A;\mathbb{R})$, invertibile e tale che la funzione inversa f^{-1} non sia continua.