Esercizi.

Calcolo differenziale

Determinare dominio e codominio delle seguenti funzioni. Scrivere il differenziale e la matrice Jacobiana (gradiente o derivata). Dove possibile scrivere la matrice Hessiana.

a) $f(x,y) = \cos(x^2-1) + xe^y$;

b) $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2}) + y\sin(x)$;

c) $f(x,y) = (y\cos(x), x\sin(y))$;

d) $f(x,y) = (\log(1+x^2), xye^{xy}, \sin(xy))$;

e) $f(x,y,z) = z^3\log(\sqrt{x^2+y^2})$;

f) $f(x,y,z) = xy^2z^3(\sin(x)+\cos(y))$;

g) $f(x,y,z) = (z\sin(yx), x\cos(zy))$;

h) $f(x,y,z) = (xy^2, z, x\cos(z), z\sin(z))$;

i) $f(t) = (t\sin(t^2), \log(\sqrt{t}))$;

l) $f(t) = (t\cos(e^t), t\sin(e^t), t+1)$;

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni, nel punto indicato.

a) $f(x,y) = x^2+y^2,\ (1,2)$;

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\ (1,2)$;

c) $f(x,y) = x\cos(xy),\ (0,0)$;

d) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2,\ (1,2,3)$;

e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ (1,2,3)$;

f) $f(x,y,z) = e^{xyz},\ (0,0,0)$;

Sia $g \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni.

a) $f(t) = g(t^2, e^t)$; *b)* $f(t) = g(1+t, \log(1+t^2))$;

c) $f(t) = g(t\cos(t^2), \sin(t))$; *d)* $f(t) = g(\cosh(t), \sinh(t))$;

Sia $g \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni.

a) $f(x,y) = g(x^2, y^2, x^2+y^2)$; *b)* $f(x,y) = g(\log(1+x^2), \log(1+y^2), e^{xy})$;

c) $f(x,y) = g(x\cos(y^2), \sin(xy), \sqrt{1+x^2})$; *d)* $f(x,y) = g(\cosh(x), \sinh(y), xy^2)$;

Determinare i punti critici delle seguenti funzioni e classificarli.

a) $f(x,y) = x^3 + (x-y)^2$; *b)* $f(x,y) = x^4 + (x-y)^2$;

c) $f(x,y) = xy + y^2 - 3x$; *d)* $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - xz + z$;

Determinare $f(V)$.

a) $f(x,y) = 3xy, \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 4, xy \ge 0\}$;

b) $f(x,y) = x - y, \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y^2 \le 16\}$;

c) $f(x,y) = 2x + y, \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - y^2 \le 1, |y| \le 9\}$;

d) $f(x,y) = x + 5y, \quad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4 \le x^2+y^2 \le 9, x \ge 0\}$;