

Esercizi.

Insiemi, relazioni, disuguaglianze.

Dati i seguenti insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$, determinare gli insiemi $A^c, B^c, A \cup B, A \cap B, A \setminus B$

Per tutti gli insiemi $A, B, A^c, B^c, A \cup B, A \cap B, A \setminus B$, studiare: l'interno, il derivato, la frontiera, la chiusura, la limitatezza, gli estremi superiori e inferiori, massimi e minimi. Inoltre stabilire quali sono aperti, chiusi, compatti.

a) $A = \mathbb{R}, \quad B = \emptyset$

b) $A = \mathbb{N}, \quad B = \mathbb{Z}$

c) $A = \mathbb{R}, \quad B = \mathbb{Q}$

d) $A = (0, 5], \quad B = (3, 7)$

e) $A = (-\infty, -3), \quad B = (-\infty, 4]$

f) $A = (-2, 2), \quad B = [-1, 5] \cup \{-3, -2, 6\}$

g) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\}, \quad B = [1, \sqrt{2})$

h) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \leq 0\}$

i) $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}, \quad B = [0, 1]$

l) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad B = [0, 1]$

Stabilire quali fra le seguenti sono relazioni di equivalenza o d'ordine in \mathbb{R}

a) $xRy \iff xy \geq 0$

b) $xRy \iff x^2 = y^2$

c) $xRy \iff \cos(x) = \cos(y)$

d) $xRy \iff x < y$

e) $xRy \iff x \leq y$

f) $xRy \iff x + y$ è intero

Risolvere le seguenti disuguaglianze in \mathbb{R}

a) $(3x - 4) \geq |5 - 7x|$

b) $|2x - 1| - |4 + 3x| \leq 0$

c) $\frac{|4 - 3x|}{|6x - 1|} \geq 5$

d) $\frac{|3 - |x||}{|x - 1|} \leq 3$

e) $|\sin(x)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $|x^2 - 3x + 2| > x + 1$

g) $x + 3 > \sqrt{x^2 - x + 1}$

h) $\sqrt{3x^2 - x} \geq 2x + 1$

i) $\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{|x + 1|} \leq 2x + 1$