

Esercizi.

Limiti e continuità.

Verificare in base alla definizione di limite:

$$\begin{array}{llll}
 a) \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 & b) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 & c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 & d) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3 = 3 \\
 e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 & f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty & g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 & h) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty
 \end{array}$$

Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{array}{llll}
 a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1} & b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1} & c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1} & d) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1} \\
 e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x - 5}{-4x^2 + x + 1} & f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x - 5}{-3x^6 + x^2} & g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x - 5}{-7x^5 + x^3} & h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 + 3x - 5}{-4x^2 + x + 1} \\
 i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 + 3x^3}{-4x^2 + x} & l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 + 3x^3}{-3x^6 + x^4} & m) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & n) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\
 o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} & p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(4x)}{\sin(x)} & q) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{5x^2} & r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2|x|} - 1}{3|x|} \\
 s) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 3x)}{2x} & t) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 4x} - 1}{\sin(5x)} & u) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2)}{\cos(5x) - 1} & v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + |x|}{x^2}
 \end{array}$$

Determinare se le seguenti funzioni sono prolungabili con continuità

$$\begin{array}{lll}
 a) f(x) = \frac{x}{|x|} & b) f(x) = \frac{x + |x|}{x^2} & c) f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\
 d) f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & e) f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & f) f(x) = \arctan\left(\frac{1}{|x|}\right)
 \end{array}$$

Studiare la continuità della seguente funzione (di Dirichlet)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$