

Università degli Studi di Bologna

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

La forma di Levi per ipersuperfici in  
 $\mathbb{C}^{N+1}$  e l'equazione di pseudocurvatura  
media per grafici reali

Tesi di Dottorato in Matematica

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
Annamaria Montanari

Presentata da:  
Vittorio Martino

Anno Accademico 2005-2006

Università degli Studi di Bologna

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

La forma di Levi per ipersuperfici in  $\mathbb{C}^{N+1}$  e l'equazione di pseudocurvatura media per grafici reali

Tesi di Dottorato in Matematica

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
Annamaria Montanari

Presentata da:  
Vittorio Martino

Commissione:  
Ugo Gianazza (Pavia), Ermanno Lanconelli (Bologna),  
Carlo Sinestrari (Roma)

Anno Accademico 2005-2006

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Preliminari</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>La forma di Levi</b>	<b>8</b>
3.1	Varietà CR . . . . .	8
3.2	Ipersuperfici in $\mathbb{C}^{N+1}$ . . . . .	12
3.3	La forma di Levi e la seconda forma fondamentale . . . . .	15
3.4	Il calcolo della forma di Levi . . . . .	17
3.5	Curvature sezionali complesse . . . . .	20
3.6	Gli autovalori della forma di Levi . . . . .	24
3.7	Il caso $N=1$ . . . . .	30
3.8	Curvatura media e pseudocurvatura media . . . . .	43
<b>4</b>	<b>L'equazione di pseudocurvatura media</b>	<b>47</b>
4.1	La traccia per i grafici cartesiani . . . . .	47
4.2	Grafici e cilindri . . . . .	52
4.3	Struttura dell'operatore di traccia . . . . .	55
4.4	Soluzione viscosa . . . . .	58
4.5	Lipschitzianità della soluzione viscosa . . . . .	66
4.6	Lipschitzianità locale . . . . .	72
	<b>Appendice</b>	<b>83</b>
	<b>A Cenni sulle soluzioni viscosse</b>	<b>83</b>
	<b>Riferimenti Bibliografici</b>	<b>86</b>

# 1 Introduzione

In questo lavoro vengono trattati alcuni aspetti riguardanti la forma di Levi. Quest'ultima è legata allo studio di problemi nella teoria di più variabili complesse (domini di olomorfia, pseudoconvessità) e in quella delle varietà CR (si vedano ad esempio [7], [4], [15], [27], [24], [25], [28], [26], [13]).

Nella prima parte di questa trattazione si adotta un linguaggio più geometrico-differenziale per descrivere la forma di Levi: dapprima si introducono le varietà CR, poi come caso particolare le ipersuperfici reali in  $\mathbb{C}^{N+1}$ ; per quest'ultime si procede ad una comparazione tra la seconda forma fondamentale e la forma di Levi, e in analogia con le classiche curvatures, costruite con gli autovalori della seconda forma fondamentale, si definiscono le pseudocurvature della forma di Levi. Si discute poi il caso dimensionalmente più basso,  $N = 1$ , e con l'ausilio delle equazioni di Codazzi si arriva a due risultati di caratterizzazione per le sfere. Infine si dimostra un teorema, sempre di caratterizzazione per le sfere ma in dimensione qualsiasi, usando un approccio di tipo Relly ([21]), comparando la curvatura media classica e la pseudocurvature media.

Nella seconda parte, invece, si affronta un problema analitico: l'equazione di traccia della forma di Levi. Questa equazione alle derivate parziali del secondo ordine viene spesso chiamata anche equazione di pseudocurvature media (o di curvatura media di Levi), conseguenza sempre della analogia tra la forma di Levi per ipersuperfici reali in  $\mathbb{C}^{N+1}$  e la forma di Gauss per quelle in  $\mathbb{R}^{N+1}$ : va sottolineato, però, che mentre l'equazione di curvatura media (classica) si scrive in forma di divergenza ed è ellittica, quella di pseudocurvature media non è possibile scriverla in tale forma e, in più, poichè la parte caratteristica ha un autovalore identicamente nullo, non è ellittica. Il modo di procedere è il seguente: si definisce la forma di Levi per ipersuperfici reali

in  $\mathbb{C}^{N+1}$  visti come grafici di funzioni reali in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,  $n = 2N + 1$ , e si definisce l'equazione di traccia della forma di Levi; a questo punto si esaminano le proprietà strutturali della parte caratteristica. Dal punto di vista delle soluzioni, questa equazione viene qui studiata inizialmente con i metodi della teoria delle soluzioni deboli, nel senso viscoso, introdotte da Crandall, Ishii e Lions ([12], [6]), quindi si dimostra un principio del confronto per soluzioni viscoso e si applica il metodo di Perron adattato (alle soluzioni viscoso) in modo da trovare una unica soluzione del problema di Dirichlet; poi si ricava una stima del gradiente per soluzioni (classiche) del problema regolarizzato (in maniera ellittica) e con un discorso di passaggio al limite si arriva alla regolarità lipschitziana (globale); infine si mostra la locale lipschitzianità sotto una opportuna condizione sulla funzione (pseudocurvatura) assegnata, sfruttando una disuguaglianza derivante dalla struttura dell'equazione: va osservato, che una stima interna di questo tipo, esiste anche per l'equazione di curvatura media classica, senza però condizioni sulla curvatura assegnata, ad esempio nel caso di superfici minime (curvatura media nulla), vale una stima del genere (Bombieri, De Giorgi, Miranda); nell'analogo caso Levi-piatto, però, non ci si può aspettare nulla di questo tipo, in quanto, ad esempio, ogni funzione della sola variabile  $x_n$  risulta essere soluzione.

Nel caso  $N = 1$ , i primi a studiare soluzioni viscoso (lipschitziane) dell'equazione di pseudocurvatura media, sono stati Slodkowski e Tomassini ([24]); poi Citti, Lanconelli e Montanari ([5]) hanno dimostrato, sotto opportune ipotesi, la regolarità  $C^\infty$  delle soluzioni lipschitziane. Per quanto riguarda il caso  $N$ -dimensionale ( $N > 1$ ), l'unico risultato in letteratura è un principio del massimo forte, dimostrato (in realtà per una classe più ampia di operatori) da Lanconelli e Montanari ([19]).

Viene riportata, in fondo, una appendice con definizioni e proprietà riguardanti le soluzioni viscoso.

## 2 Preliminari

Sia  $N \geq 1$  e consideriamo lo spazio  $\mathbb{R}^{2N+2}$  ( $\simeq \mathbb{C}^{N+1}$ ) come varietà complessa con coordinate locali  $x_1, y_1, \dots, x_{N+1}, y_{N+1}$  con l'usuale identificazione  $z_k = x_k + iy_k$  per  $k = 1, \dots, N+1$ . Sul fibrato tangente di  $\mathbb{R}^{2N+2}$  si consideri la base canonica data da

$$\{\partial_{x_k}, \partial_{y_k}\}_{k=1, \dots, N+1}$$

Dal punto di vista complesso si ha che il fibrato tangente complesso  $T(\mathbb{C}^{N+1})$  (di dimensione complessa  $2N+2$ ) ammette la base canonica

$$\{\partial_{z_k}, \partial_{\bar{z}_k}\}_{k=1, \dots, N+1}$$

dove naturalmente

$$\partial_{z_k} = \frac{1}{2}(\partial_{x_k} - i\partial_{y_k}), \quad \partial_{\bar{z}_k} = \frac{1}{2}(\partial_{x_k} + i\partial_{y_k}), \quad k = 1, \dots, N+1$$

**Definizione 2.1.** *Chiamiamo fibrato olomorfo  $T^{1,0}(\mathbb{C}^{N+1})$ , il fibrato complesso (di dimensione complessa  $N+1$ ) generato dai campi tangenti complessi combinazione lineare dei campi  $\{\partial_{z_k}\}$ , cioè:*

$$Z \in T^{1,0}(\mathbb{C}^{N+1}) \iff Z = \alpha^k \partial_{z_k}$$

con  $\alpha^k : \mathbb{C}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ , per  $k = 1, \dots, N+1$ . Il fibrato antiolomorfo  $T^{0,1}(\mathbb{C}^{N+1})$  è

$$T^{0,1}(\mathbb{C}^{N+1}) := \overline{T^{1,0}(\mathbb{C}^{N+1})}$$

quindi se  $Z = \alpha^k \partial_{z_k} \in T^{1,0}(\mathbb{C}^{N+1})$  allora  $\bar{Z} = \bar{\alpha}^k \partial_{\bar{z}_k} \in T^{0,1}(\mathbb{C}^{N+1})$ .

### ✓Nota

In questa definizione e nel resto del lavoro, quando non c'è ambiguità, si fa uso della convenzione per la sommatoria degli indici per la quale, ad esempio

$Z = \alpha^k \partial_{z_k}$  sta per  $Z = \sum_{k=1}^{N+1} \alpha^k \partial_{z_k}$ . ✓

**Definizione 2.2.** *La struttura complessa canonica  $J$  definita su  $T(\mathbb{R}^{2N+2})$  è l'endomorfismo reale (che soddisfa  $J^2 = -Id$ ) definito da:*

$$J : T(\mathbb{R}^{2N+2}) \longrightarrow T(\mathbb{R}^{2N+2})$$

$$J(\partial_{x_k}) = \partial_{y_k}, \quad J(\partial_{y_k}) = -\partial_{x_k}, \quad k = 1, \dots, N+1$$

**Osservazione 2.3.** *Un calcolo diretto mostra che l'estensione per  $\mathbb{C}$ -linearità di  $J$  a  $J^{\mathbb{C}}$  ammette allora come autovalori  $\pm i$ , e come autospazi relativi il fibrato olomorfo e quello antiolomorfo, cioè:*

$$J^{\mathbb{C}} : T(\mathbb{C}^{N+1}) \longrightarrow T(\mathbb{C}^{N+1})$$

$$J^{\mathbb{C}}(\partial_{z_k}) = i\partial_{z_k}, \quad J^{\mathbb{C}}(\partial_{\bar{z}_k}) = -i\partial_{\bar{z}_k}, \quad k = 1, \dots, N+1$$

✓**Nota**

D'ora in poi non si farà più distinzione fra un'applicazione e la sua estensione per  $\mathbb{C}$ -linearità, sarà il contesto a far capire quale si sta usando. ✓

**Definizione 2.4.** *La metrica standard di  $\mathbb{R}^{2N+2}$  è l'applicazione bilineare e simmetrica definita da*

$$g : T(\mathbb{R}^{2N+2}) \times T(\mathbb{R}^{2N+2}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(\partial_{x_k}, \partial_{x_j}) = g(\partial_{y_k}, \partial_{y_j}) = \delta_{kj},$$

$$g(\partial_{x_k}, \partial_{y_j}) = 0, \quad k, j = 1, \dots, N+1$$

**Osservazione 2.5.** *Si noti che  $g$  è compatibile con la struttura complessa  $J$ , cioè: per ogni coppia di campi  $X, Y$  in  $T(\mathbb{R}^{2N+2})$  vale*

$$g(X, Y) = g(J(X), J(Y))$$

Da questo si deduce quindi che l'endomorfismo  $J$  è un'isometria ortogonale, cioè

$$|X|^2 = g(X, X) = g(J(X), J(X)) = |J(X)|^2$$

e

$$g(X, J(X)) = 0$$

per ogni  $X \in T(\mathbb{R}^{2N+2})$ .

**Osservazione 2.6.** L'estensione per  $\mathbb{C}$ -linearità di  $g$  è una metrica hermitiana su  $\mathbb{C}^{N+1}$  che soddisfa

$$g(\partial_{z_k}, \partial_{z_j}) = g(\partial_{\bar{z}_k}, \partial_{\bar{z}_j}) = 0,$$

$$g(\partial_{z_k}, \partial_{\bar{z}_j}) = g(\partial_{\bar{z}_k}, \partial_{z_j}) = \frac{1}{2}\delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, N+1$$

**Osservazione 2.7.** Dalle precedenti proprietà si deduce che il fibrato tangente complesso ammette una decomposizione  $g$ -ortogonale in somma diretta tra il fibrato olomorfo e quello antiolomorfo:

$$T(\mathbb{C}^{N+1}) = T^{1,0}(\mathbb{C}^{N+1}) \oplus T^{0,1}(\mathbb{C}^{N+1})$$

In generale questa decomposizione vale per tutte le varietà complesse.

**Definizione 2.8.** Siano  $X, Y \in T(\mathbb{R}^{2N+2})$  con

$$Y = a^k \partial_{x_k} + b^k \partial_{y_k}$$

allora la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  associata a  $g$  agisce nel seguente modo:

$$\nabla_X Y = X(a^k) \partial_{x_k} + X(b^k) \partial_{y_k}$$

In altre parole, essendo in  $\mathbb{R}^{2N+2}$ , la derivata covariante è semplicemente la derivata direzionale. Così anche l'estensione per  $\mathbb{C}$ -linearità di  $\nabla$  agirà come derivata direzionale.



**Osservazione 2.9.** *Un calcolo diretto mostra che la connessione  $\nabla$  ed anche l'estensione per  $\mathbb{C}$ -linearità, ha la ulteriore proprietà di essere compatibile con la struttura complessa  $J$ , cioè per ogni coppia di campi  $X, Y$  in  $T(\mathbb{R}^{2N+2})$  vale*

$$J(\nabla_X Y) = \nabla_X J(Y)$$

*o equivalentemente per ogni  $Z, W$  in  $T(\mathbb{C}^{N+1})$  si ha*

$$J(\nabla_Z W) = \nabla_Z J(W)$$

## 3 La forma di Levi

### 3.1 Varietà CR

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Sia  $T(M)$  il suo fibrato tangente e  $T^{\mathbb{C}}(M) = T(M) \otimes \mathbb{C}$  il suo complessificato, cioè:

$$T^{\mathbb{C}}(M) = \{Z = X + iY \mid X, Y \in T(M)\}$$

**Definizione 3.1.** *Un sottofibrato complesso  $A(M)$  di  $T^{\mathbb{C}}(M)$  di dimensione complessa  $N \leq [n/2]$  si dice struttura di Cauchy-Riemann (CR) se valgono le due proprietà seguenti:*

- i)  $[Z, W] \in A(M), \forall Z, W \in A(M)$*
- ii)  $A(M) \cap \bar{A}(M) = \{0\}$*

*La coppia  $(M, A(M))$  viene detta varietà CR di tipo  $(N, d)$ , dove l'intero  $d = n - 2N$  è la CR-codimensione di  $A(M)$  in  $M$ . Se  $A(M)$  soddisfa la prima proprietà si dice che  $A(M)$  è involutivo (o integrabile).*

**Esempio 3.2.** *Una qualsiasi varietà differenziabile di dimensione  $n$  può essere considerata banalmente una varietà CR di tipo  $(0, n)$ : infatti il sottofibrato nullo verifica ovviamente le due condizioni.*

**Esempio 3.3.** *Su ogni aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$  si può costruire una struttura CR di dimensione  $N$ , per ogni  $N \leq [n/2]$ , nel seguente modo:  $T^{\mathbb{C}}(\Omega)$  è il fibrato banale isomorfo a  $\mathbb{C}^n$ , quindi un qualunque sottospazio  $A \subseteq \mathbb{C}^n$  di dimensione  $N$  tale che  $A \cap \bar{A} = \{0\}$  soddisfa le condizioni richieste.*

**Esempio 3.4.** *Tutte le varietà complesse  $M$  di dimensione  $2n$  possono essere sempre considerate varietà CR di tipo  $(n,0)$ : infatti il fibrato tangente olomorfo  $T^{1,0}(M)$  è involutivo (il commutatore di due campi olomorfi è olomorfo) e non ha intersezione non banali con lo spazio tangente antiolomorfo  $T^{0,1}(M)$ , e quindi è sempre una struttura CR; in particolare vale  $T^{1,0}(M) \oplus T^{0,1}(M) = T^{\mathbb{C}}(M)$ , quindi la struttura CR ha la massima dimensione possibile.*

**Esempio 3.5.** *Sia  $C$  la varietà di tipo cilindro ottenuta nel seguente modo:*

$$C = S^2 \times \mathbb{R}$$

*Poichè  $S^2$  è una varietà complessa di dimensione 1, allora è possibile scrivere*

$$T^{\mathbb{C}}(S^2) = T^{1,0}(S^2) \oplus T^{0,1}(S^2)$$

*Quindi  $T^{1,0}(S^2)$  è una struttura CR di dimensione 1 e vale*

$$T^{\mathbb{C}}(C) = T^{1,0}(S^2) \oplus T^{0,1}(S^2) \oplus \mathbb{C}$$

*Sia ora  $(M, A(M))$  una varietà CR di tipo  $(N, d)$*

**Definizione 3.6.** *Sia*

$$H^{\mathbb{C}}(M) = A(M) \oplus \overline{A}(M)$$

*Si chiama distribuzione complessa massimale di  $M$  o distribuzione di Levi, il sottofibrato  $H(M)$  di  $T(M)$ , di dimensione (reale)  $2N$ , definito da*

$$H(M) = \text{Re}(H^{\mathbb{C}}(M))$$

**Osservazione 3.7.** *Su  $H(M)$  è definita una struttura complessa  $J : H(M) \rightarrow H(M)$  data da*

$$J(Z + \overline{Z}) = i(Z - \overline{Z}), \quad \forall Z \in A(M)$$

*Inoltre l'estensione per  $\mathbb{C}$ -linearità di  $J$  a  $J^{\mathbb{C}} : H^{\mathbb{C}}(M) \rightarrow H^{\mathbb{C}}(M)$  ammette autovalori  $\pm i$  e come autospazi relativi rispettivamente  $A(M)$  e  $\overline{A}(M)$*

**Definizione 3.8.** Siano  $(M, A(M))$  e  $(\widetilde{M}, A(\widetilde{M}))$  due varietà CR, e  $J_M$  e  $J_{\widetilde{M}}$  le due strutture complesse definite rispettivamente su  $H(M)$  e  $H(\widetilde{M})$ . Una applicazione differenziabile  $f : M \rightarrow \widetilde{M}$  si dice applicazione CR se per ogni  $p \in M$  il differenziale di  $f$  manda la distribuzione di Levi di  $M$  in quella di  $\widetilde{M}$  e commuta con le strutture complesse, cioè:

$$d_p f(H_p(M)) \subseteq H_{f(p)}(\widetilde{M})$$

$$(d_p f) \circ J_{M,p} = J_{\widetilde{M},f(p)} \circ (d_p f)$$

Se  $d_p^{\mathbb{C}} f$  è l'estensione per  $\mathbb{C}$ -linearità di  $d_p f$  a  $T_p^{\mathbb{C}}(M)$ , allora si può equivalentemente dire che  $f$  è una applicazione CR se per ogni  $p \in M$  vale

$$d_p^{\mathbb{C}} f(A_p(M)) \subseteq A_{f(p)}(\widetilde{M})$$

**Esempio 3.9.** Se  $M$  ed  $\widetilde{M}$  sono due varietà complesse con le proprie strutture CR standard, allora le applicazioni CR sono le applicazioni olomorfe tra  $M$  ed  $\widetilde{M}$ .

Sia, d'ora in avanti,  $M$  una varietà orientabile e differenziabile di dimensione  $n$ , e  $(M, A(M))$ , sempre, una varietà CR, di CR-codimensione 1 (o di tipo ipersuperficie). Si è detto, per definizione, che  $A(M)$  (come pure  $\overline{A}(M)$ ) è un sottofibrato di  $T^{\mathbb{C}}(M)$  involutivo: in generale, però,  $H^{\mathbb{C}}(M)$  non lo è, cioè: presi  $Z, W \in A(M)$  non è detto che  $[Z, \overline{W}]$  appartenga ancora a  $A(M)$ . Lo strumento che misura di quanto  $H^{\mathbb{C}}(M)$  non è involutivo è la forma di Levi. Si consideri, per ogni  $p \in M$ , la naturale mappa di proiezione

$$\pi_p : T_p^{\mathbb{C}}(M) \longrightarrow \frac{T_p^{\mathbb{C}}(M)}{H_p^{\mathbb{C}}(M)}$$

così per ogni campo  $Z_p \in T_p^{\mathbb{C}}(M)$ ,  $\pi_p(Z_p)$  è la parte di  $Z_p$  che non giace in  $H_p^{\mathbb{C}}(M)$ .

**Definizione 3.10.** Per ogni  $p$  di  $M$  la forma di Levi è la funzione

$$\mathcal{L}_p : A_p(M) \times \overline{A}_p(M) \rightarrow \frac{T_p^{\mathbb{C}}(M)}{H_p^{\mathbb{C}}(M)}$$

definita da:

$$\mathcal{L}_p(Z_p, \overline{W}_p) = \frac{1}{2i} \pi_p([Z, \overline{W}]_p) \quad (1)$$

con  $Z, W \in T_{1,0}(M)$

Il fattore  $1/2i$  rende la forma di Levi reale quando la si considera come forma quadratica, cioè

$$\mathcal{L}(Z_p, \overline{Z}_p) = \overline{\mathcal{L}(Z_p, \overline{Z}_p)}, \quad \forall Z_p \in A_p(M)$$

Ora, se  $H_p^{\mathbb{C}}(M)$  è involutivo allora  $\mathcal{L}_p(Z_p, \overline{W}_p) = 0$  per ogni  $Z_p, W_p \in A_p(M)$ , viceversa se  $\mathcal{L}_p$  è identicamente nulla, allora risulta  $H_p^{\mathbb{C}}(M)$  involutivo; questo giustifica la seguente

**Definizione 3.11.** Se  $\mathcal{L}_p(Z_p, \overline{W}_p) = 0$  per ogni  $Z_p, W_p \in A_p(M)$  e per ogni  $p \in M$  allora la CR-struttura  $A(M)$  si dice Levi-piatta

**Osservazione 3.12.** In particolare, poichè la forma di Levi è una forma  $\mathbb{C}$ -bilineare e hermitiana, basta che sia  $\mathcal{L}(Z_p, \overline{Z}_p) = 0$  per ogni  $Z_p \in A_p(M)$ , per poter concludere che  $A(M)$  è Levi-piatta.

**Definizione 3.13.** Se, fissato  $Z_p \in A_p(M)$ ,  $\mathcal{L}_p(Z_p, \overline{W}_p) = 0$  per ogni  $W_p \in A_p(M)$  implica  $W_p = 0$  allora la forma di Levi (ed anche la struttura CR) si dice non degenerare.

Se  $\mathcal{L}_p(Z_p, \overline{Z}_p) > 0$  per ogni  $Z_p \in A_p(M)$  e per ogni  $p \in M$  allora la CR-struttura  $A(M)$  si dice strettamente pseudoconvessa.

### 3.2 Ipersuperfici in $\mathbb{C}^{N+1}$

Sia  $V$  una varietà complessa di dimensione (complessa)  $m$  e  $M \subseteq V$  una sottovarietà reale di dimensione (reale)  $n$ . Si indichi con  $T^{1,0}(V)$  il fibrato tangente olomorfo di  $V$  e si definisca:

$$A_p(M) = T_p^{1,0}(V) \cap T_p^{\mathbb{C}}(M), \quad \forall p \in M$$

L'insieme degli  $A_p(M)$  al variare di  $p$  in  $M$  non forma in generale un sottofibrato vettoriale di  $T_p^{\mathbb{C}}(M)$  perchè la dimensione di  $A_p(M)$  può dipendere da  $p$ . Se la dimensione di  $A_p(M)$ , però, è costante e uguale ad  $N$  per tutti i  $p$  in  $M$ , allora  $(M, A(M))$  è una varietà CR di tipo  $(N, d)$  con  $d = n - 2N$ : se la codimensione di  $M$  in  $V$  come sottovarietà reale, è uguale alla CR-codimensione di  $A(M)$  in  $M$ , la varietà  $(M, A(M))$  è detta CR generica. Nel caso particolare in cui  $M$  sia una ipersuperficie reale di  $V$  (cioè  $n = 2m - 1$ ) allora vale sempre  $\dim(A_p(M)) = m - 1$  per ogni  $p$  in  $M$  (si veda ad esempio [4]), perciò  $(M, A(M))$  è una varietà CR generica di tipo  $(m - 1, 1)$ . Quindi data una varietà complessa  $V$  e una sua sottovarietà reale di tipo ipersuperficie  $M$ , si è trovato un modo standard di costruire strutture CR; in genere questo tipo di strutture CR si indicano con  $T_{1,0}(M)$  (e  $T_{0,1}(M) = \overline{T_{1,0}(M)}$ ) in analogia con i fibrati olomorfi.

Sia ora  $n = 2N + 1$ , e consideriamo come varietà ambiente  $V = \mathbb{C}^{N+1} \simeq \mathbb{R}^{2N+1}$  con la metrica e la struttura complessa canoniche e sia  $M$  una ipersuperficie reale, cioè  $\dim_{\mathbb{R}} M = 2N + 1 = n$ , con la metrica indotta. Allora

$$\begin{aligned} T_{1,0}(M) &= T^{1,0}(\mathbb{C}^{N+1}) \cap T^{\mathbb{C}}(M) \\ T_{0,1}(M) &= T^{0,1}(\mathbb{C}^{N+1}) \cap T^{\mathbb{C}}(M) = \overline{T_{1,0}(M)} \end{aligned}$$

e

$$H^{\mathbb{C}}(M) = T_{1,0}(M) \oplus T_{0,1}(M)$$

dove ovviamente la somma diretta è anche  $g$ -ortogonale.

**Osservazione 3.14.** *Si osservi che per costruzione  $H^{\mathbb{C}}(M)$  è il più grande sottofibrato di  $T^{\mathbb{C}}(M)$  invariante sotto l'azione della struttura complessa  $J$  di  $\mathbb{C}^{N+1}$ , in altre parole*

$$H^{\mathbb{C}}(M) = T^{\mathbb{C}}(M) \cap J(T^{\mathbb{C}}(M))$$

*Lo stesso vale, dal punto di vista reale, per  $H(M)$ .*

A questo punto si ha  $\dim(H(M)) = 2N$ , quindi per "completare" lo spazio tangente "manca" una direzione (dimensione). Per trovare questa direzione usiamo la metrica e la struttura complessa:

**Definizione 3.15.** *Sia  $N$  la normale interna unitaria a  $M$  e sia*

$$T := J(N)$$

*Chiamiamo il sottofibrato unidimensionale generato da  $T$ , direzione caratteristica di  $M$ .*

**Osservazione 3.16.** *Prima di tutto si noti che sia  $N$  che  $T$  sono campi reali, in più per le proprietà della struttura complessa si ha che  $T$  è un campo unitario e ortogonale a  $N$ . Inoltre per ogni  $Z$  in  $T_{1,0}(M)$  si ha*

$$0 = g(Z, N) = g(J(Z), J(N)) = ig(Z, T)$$

$$0 = g(\bar{Z}, N) = g(J(\bar{Z}), J(N)) = -ig(\bar{Z}, T)$$

*quindi  $T$  è ortogonale a  $H^{\mathbb{C}}(M)$  e si può scrivere*

$$T^{\mathbb{C}}(M) = H^{\mathbb{C}}(M) \oplus \mathbb{C}T$$

*o allo stesso modo*

$$T(M) = H(M) \oplus \mathbb{R}T$$

**Osservazione 3.17.** *Si può indurre su  $T(M)$  la struttura complessa di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , notando che però questa sarà un endomorfismo solo su  $H(M)$ , in quanto  $J(T) = -N$ .*

Per quanto riguarda la forma di Levi in questo contesto: si può identificare

$$\frac{T^{\mathbb{C}}(M)}{H^{\mathbb{C}}(M)}$$

con il complemento ortogonale di  $H^{\mathbb{C}}(M)$  in  $T^{\mathbb{C}}(M)$ , cioè  $\mathbb{C}T$ ; la proiezione  $\pi$  sarà semplicemente la  $g$ -proiezione su  $T$ , infine poichè  $\mathbb{C}T$  è un fibrato unidimensionale, ci si può dimenticare della natura vettoriale della forma di Levi e considerare solo lo scalare associato alla proiezione, quindi

**Definizione 3.18.** *La forma di Levi per ipersuperfici reali di  $\mathbb{C}^{N+1}$  è la forma  $\mathbb{C}$ -bilineare hermitiana*

$$\mathcal{L} : T_{1,0}(M) \times T_{0,1}(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}(Z, \bar{W}) = \frac{1}{2i}g([Z, \bar{W}], T)$$

con  $Z, W \in T_{1,0}(M)$



### 3.3 La forma di Levi e la seconda forma fondamentale

Poichè la connessione  $\nabla$  di  $\mathbb{C}^{N+1}$  ha torsione nulla, è possibile far comparire nella forma di Levi la derivata covariante al posto del commutatore

**Lemma 3.19.** *Per ogni  $Z, W \in T_{1,0}(M)$  si ha:*

$$\mathcal{L}(Z, \bar{W}) = g(\nabla_Z \bar{W}, N)$$

#### Dimostrazione

Ricordiamo che, per ogni coppia di campi dello spazio tangente, il tensore di torsione associato ad una connessione  $\nabla$  è

$$Tor_{\nabla}(Z, W) = \nabla_Z W - \nabla_W Z - [Z, W]$$

e visto che la connessione di Levi-Civita associata a  $g$  è simmetrica allora si ha  $Tor_{\nabla}(Z, W) = 0$ . In particolare, allora, per ogni  $Z, W \in T_{1,0}(M)$  si ha

$$[Z, \bar{W}] = \nabla_Z \bar{W} - \nabla_{\bar{W}} Z$$

e

$$\begin{aligned} g([Z, \bar{W}], T) &= g(\nabla_Z \bar{W} - \nabla_{\bar{W}} Z, T) = g(\nabla_Z J(\bar{W}) - \nabla_{\bar{W}} J(Z), J(T)) = \\ &= ig(\nabla_Z \bar{W} + \nabla_{\bar{W}} Z, N) = i\{g(\nabla_Z \bar{W}, N) + g(\nabla_{\bar{W}} Z, N)\} \end{aligned}$$

Ora poichè il commutatore di due campi tangenti è ancora un campo tangente, si ha

$$0 = g([Z, \bar{W}], N) = g(\nabla_Z \bar{W} - \nabla_{\bar{W}} Z, N) = g(\nabla_Z \bar{W}, N) - g(\nabla_{\bar{W}} Z, N)$$

quindi

$$\mathcal{L}(Z, \bar{W}) = \frac{1}{2i} g([Z, \bar{W}], T) = g(\nabla_Z \bar{W}, N) \quad \#$$

Quest'ultima formula ricorda la costruzione della seconda forma fondamentale  $II$ , infatti

**Proposizione 3.20.** Per ogni  $Z_1, Z_2 \in T_{1,0}(M)$  con

$$Z_1 = X_1 - iY_1, \quad Z_2 = X_2 - iY_2, \quad Y_1 = J(X_1), \quad Y_2 = J(X_2)$$

si ha:

$$\mathcal{L}(Z_1, \bar{Z}_2) = II(X_1, X_2) + II(Y_1, Y_2) + i\{II(X_1, Y_2) - II(Y_1, X_2)\}$$

### Dimostrazione

Ricordiamo che, per ogni coppia di campi  $X, Y$  dello spazio tangente, la seconda forma fondamentale  $II$  è l'applicazione bilineare e simmetrica definita come la proiezione lungo la normale alla varietà della derivata covariante di un campo lungo l'altro secondo la connessione dell'ambiente, in formule:

$$II(X, Y) = g(\nabla_X Y, N)$$

o, usando l'operatore forma  $A(X) = -\nabla_X N$

$$II(X, Y) = g(A(X), Y)$$

Adesso siano  $Z_1, Z_2 \in T_{1,0}(M)$  con

$$Z_1 = X_1 - iY_1, \quad Z_2 = X_2 - iY_2, \quad Y_1 = J(X_1), \quad Y_2 = J(X_2)$$

allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Z_1, \bar{Z}_2) &= g(\nabla_{Z_1} \bar{Z}_2, N) = g(\nabla_{X_1 - iY_1} (X_2 + iY_2), N) = \\ &= g(\nabla_{X_1} X_2, N) + g(\nabla_{Y_1} Y_2, N) + i\{g(\nabla_{X_1} Y_2, N) - g(\nabla_{Y_1} X_2, N)\} = \\ &= II(X_1, X_2) + II(Y_1, Y_2) + i\{II(X_1, Y_2) - II(Y_1, X_2)\} \quad \# \end{aligned}$$

### 3.4 Il calcolo della forma di Levi

Sia

$$D = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} : f(z) < 0\}, \quad M = \partial D = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} : f(z) = 0\}$$

con  $f : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{C}^{N+1})$  tale che  $\partial_p f := (f_1(p), \dots, f_{N+1}(p)) \neq 0$ , per ogni  $p \in \partial D$ , con la notazione

$$f_l := \frac{\partial f}{\partial z_l}, \quad \bar{f}_l := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_l} \quad l = 1, \dots, N+1$$

Una formula esplicita per il calcolo della forma di Levi è

**Proposizione 3.21.** *Si consideri la matrice Hessiana complessa di  $f$*

$$Hess(f) := \left( f_{j\bar{k}} \right)_{j,k=1,\dots,n+1}$$

Allora, se

$$Z = \alpha^k \partial_{z_k}, \quad W = \beta^k \partial_{z_k}$$

con  $Z, W \in T_{1,0}(M)$ , si ha

$$\mathcal{L}(Z, \bar{W}) = \frac{1}{2|\partial f|} g(Hess^T(f)Z, W) = \frac{1}{2|\partial f|} \alpha^j \bar{\beta}^k f_{j\bar{k}}$$

#### Dimostrazione

Innanzitutto la normale interna unitaria in questo contesto si può esplicitare nel seguente modo

$$N = -\frac{1}{|\partial f|} (f_{\bar{k}} \partial_{z_k} + f_k \partial_{\bar{z}_k})$$

Adesso, visto che

$$0 = Z(g(\bar{W}, N)) = g(\nabla_Z \bar{W}, N) + g(\bar{W}, \nabla_Z N)$$

vale

$$\mathcal{L}(Z, \overline{W}) = g(\nabla_Z \overline{W}, N) = g(-\nabla_Z N, \overline{W})$$

allora

$$\begin{aligned} g(-\nabla_Z N, \overline{W}) &= g(\nabla_{\alpha^j \partial_{z_j}} \left( \frac{1}{|\partial f|} (f_l \partial_{z_l} + f_l \partial_{\bar{z}_l}) \right), \bar{\beta}^k \partial_{\bar{z}_k}) = \\ &= \frac{1}{2} \alpha^j \bar{\beta}^k \partial_{z_j} \left( \frac{1}{|\partial f|} f_{\bar{k}} \right) = \frac{1}{2|\partial f|} \alpha^j \bar{\beta}^k f_{j\bar{k}} + \frac{1}{2} \bar{\beta}^k f_{\bar{k}} \alpha^j \partial_{z_j} \left( \frac{1}{|\partial f|} \right) = \\ &= \frac{1}{2|\partial f|} \alpha^j \bar{\beta}^k f_{j\bar{k}} \end{aligned}$$

in quanto  $\bar{\beta}^k f_{\bar{k}} = 0$  perchè

$$0 = g(\overline{W}, N) = -\frac{1}{|\partial f|} g(\bar{\beta}^k \partial_{\bar{z}_k}, f_{\bar{k}} \partial_{z_k} + f_k \partial_{\bar{z}_k}) = -\frac{1}{2|\partial f|} \bar{\beta}^k f_{\bar{k}} \quad \#$$

**Osservazione 3.22.** *Il legame fra il gradiente complesso e quello reale è*

$$\begin{aligned} |\partial f|^2 &= \sum_{k=1}^{N+1} f_k f_{\bar{k}} = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{2} (f_{x_k} - i f_{y_k}) \frac{1}{2} (f_{x_k} + i f_{y_k}) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N+1} f_{x_k}^2 + f_{y_k}^2 = \frac{1}{4} |Df|^2 \end{aligned}$$

dove  $Df = \text{grad}(f)$ .

**Osservazione 3.23.** *Si noti la cosa seguente riguardo la normale interna unitaria*

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{|\partial f|} (f_{\bar{k}} \partial_{z_k} + f_k \partial_{\bar{z}_k}) = \\ &= -\frac{2}{|Df|} \left( \frac{1}{2} (f_{x_k} + i f_{y_k}) \frac{1}{2} (\partial_{x_k} - i \partial_{y_k}) + \frac{1}{2} (f_{x_k} - i f_{y_k}) \frac{1}{2} (\partial_{x_k} + i \partial_{y_k}) \right) = \\ &= -\frac{1}{|Df|} (f_{x_k} \partial_{x_k} + f_{y_k} \partial_{y_k}) \end{aligned}$$

*Si ritrova quindi la classica espressione di  $N$ .*

**Esempio 3.24.** Sia  $N = 1$ , e si consideri

$$Z = f_2 \partial_{z_1} - f_1 \partial_{z_2}$$

Poichè  $Z(f) = 0$ , allora  $Z$  è un campo tangente, inoltre è un campo olomorfo di  $\mathbb{C}^2$  in quanto combinazione lineare dei campi  $\partial_{z_1}$  e  $\partial_{z_2}$ , quindi  $Z \in T_{1,0}(M)$ .

La forma di Levi sarà:

$$\mathcal{L}(Z, \bar{Z}) = \frac{1}{2|\partial f|} (f_2 f_2 f_{1\bar{1}} - f_1 f_2 f_{2\bar{1}} - f_2 f_1 f_{1\bar{2}} + f_1 f_1 f_{2\bar{2}})$$

**Definizione 3.25.** Con queste notazioni la superficie  $M$  ed anche il dominio  $D$  si dirà strettamente pseudoconvesso se per ogni  $p \in M$

$$\alpha^j \bar{\alpha}^k f_{j\bar{k}} > 0$$

per ogni  $Z = \alpha^k \partial_{z_k} \in T_{1,0}(M)$ .

**Osservazione 3.26.** La condizione di pseudoconvessità è invariante sotto l'azione di cambi di coordinate biolomorfi. Questo perchè le applicazioni olomorfe (e le inverse) preservano la struttura complessa  $J$ , e quindi la struttura CR (che per costruzione involve  $J$ ) resta invariata.

### 3.5 Curvature sezionali complesse

Sia sempre  $M$  una ipersuperficie di  $\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{N+1}$ , ricordiamo:

**Definizione 3.27.** *La curvatura sezionale  $K(X, Y)$  è la curvatura di Gauss della superficie bidimensionale generata da  $X, Y$ , cioè, per ogni coppia di campi ortonormali  $X, Y \in T(M)$  :*

$$K(X, Y) = II(X, X)II(Y, Y) - (II(X, Y))^2$$

Chiamiamo ora con  $\nabla^M$  la connessione di  $M$  indotta dall'ambiente; riportiamo anche:

**Definizione 3.28.** *Il tensore di curvatura (di Riemann) è, per ogni  $X, Y, T \in T(M)$ :*

$$R^M(X, Y)T = \nabla_X^M \nabla_Y^M T - \nabla_Y^M \nabla_X^M T - \nabla_{[X, Y]}^M T$$

Usando la metrica  $g$  si può definire anche

$$R^M(X, Y, T, W) = g(R^M(X, Y)T, W)$$

Per tutte le proprietà di questi oggetti si vedano ad esempio [8] [16]. Diciamo solo che per tutti gli spazi euclidei, dotati di connessione e metrica standard, sia la curvatura sezionale sia il tensore di curvatura sono identicamente nulli.

**Proposizione 3.29.** *Per ogni  $X, Y \in T(M)$ , vale:*

$$K(X, Y) = R^M(X, Y, Y, X)$$

#### Dimostrazione

Chiamiamo semplicemente  $R$  il tensore di curvatura di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , che per quanto

detto sarà nullo. Adesso, per la definizione della seconda forma fondamentale, vale per ogni  $X, Y \in T(M)$ :

$$\nabla_X Y = \nabla_X^M Y + II(X, Y)N$$

con  $N \in T(M)^\perp$  Allora:

$$\begin{aligned} 0 &= R(X, Y, Y, X) = g(\nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X, Y]} Y, X) = \\ &= g(\nabla_X (\nabla_Y^M Y + II(Y, Y)N) - \nabla_Y (\nabla_X^M Y + II(X, Y)N) - \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]}^M Y - II([X, Y], Y)N, X) = \\ &= g(\nabla_X^M \nabla_Y^M Y + II(X, \nabla_Y^M Y)N + \nabla_X II(Y, Y)N - \nabla_Y^M \nabla_X^M Y - II(Y, \nabla_X^M Y)N - \\ &\quad - \nabla_Y II(X, Y)N - \nabla_{[X, Y]}^M Y, X) = \\ &= g(\nabla_X^M \nabla_Y^M Y - \nabla_Y^M \nabla_X^M Y - \nabla_{[X, Y]}^M Y, X) - \\ &\quad - II(Y, Y)g(A(X), X) + II(X, Y)g(A(Y), X) = \\ &= R^M(X, Y, Y, X) - II(X, X)II(Y, Y) + (II(X, Y))^2 \quad \# \end{aligned}$$

**Definizione 3.30.** Chiamiamo curvatura sezionale complessa

$$K(Z_1, \bar{Z}_2) = -R^M(Z_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_2, Z_1)$$

per ogni  $Z_1, Z_2 \in T_{1,0}(M)$  ortonormali.

**Osservazione 3.31.** Siano  $Z_1, Z_2 \in T_{1,0}(M)$  con

$$Z_1 = X_1 - iY_1, \quad Z_2 = X_2 - iY_2, \quad Y_1 = J(X_1), \quad Y_2 = J(X_2)$$

allora per la multilinearità del tensore di curvatura, e per le varie simmetrie, si ha

$$R^M(Z_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_2, Z_1) = R^M(X_1 - iY_1, X_2 + iY_2, X_2 + iY_2, X_1 - iY_1) =$$

$$\begin{aligned}
&= R^M(X_1, X_2, X_2, X_1) + R^M(Y_1, Y_2, Y_2, Y_1) + R^M(X_1, X_2, Y_2, Y_1) + \\
&\quad + R^M(Y_1, Y_2, X_2, X_1) - R^M(X_1, Y_2, Y_2, X_1) - R^M(Y_1, X_2, X_2, Y_1) + \\
&\quad + R^M(X_1, X_2, Y_2, Y_1) + R^M(Y_1, X_2, Y_2, X_1) + i\{-R^M(X_1, X_2, X_2, Y_1) + \\
&\quad + R^M(X_1, X_2, Y_2, X_1) + R^M(X_1, Y_2, X_2, X_1) - R^M(Y_1, X_2, X_2, X_1) + \\
&\quad + R^M(X_1, Y_2, Y_2, Y_1) - R^M(Y_1, X_2, Y_2, Y_1) - R^M(Y_1, Y_2, X_2, Y_1) + \\
&\quad + R^M(Y_1, Y_2, Y_2, X_1)\} = K(X_1, X_2) + K(Y_1, Y_2) - K(X_1, Y_2) - K(Y_1, X_2) + \\
&\quad + 2R^M(X_1, X_2, Y_2, Y_1) + 2R^M(X_1, X_2, Y_2, Y_1) + i\{2R^M(X_1, X_2, Y_2, X_1) - \\
&\quad - 2R^M(X_1, X_2, X_2, Y_1) + 2R^M(Y_1, Y_2, Y_2, X_1) - 2R^M(Y_1, X_2, Y_2, Y_1)\}
\end{aligned}$$

**Proposizione 3.32.** *Per ogni  $Z \in T_{1,0}(M)$  unitario, con  $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iY)$  e  $Y = J(X)$ , vale*

$$K(Z, \bar{Z}) = K(X, Y)$$

### Dimostrazione

Ovviamente  $X$  e  $Y$  sono campi ortonormali, allora la tesi segue dall'osservazione precedente ponendo  $Z_1 = Z_2 = Z$ , e dalle simmetrie del tensore di curvatura.  $\#$

**Osservazione 3.33.** *Si noti che mentre  $K(X, X) = 0$  per ogni  $X \in T(M)$ ,  $K(Z, \bar{Z})$  con  $Z \in T_{1,0}(M)$ , in generale non è nullo.*

Quindi dato  $Z \in T_{1,0}(M)$  con  $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iY)$ ,  $K(Z, \bar{Z})$  è il determinante del minore  $2 \times 2$ , della seconda forma fondamentale, individuato da  $X$  e  $Y$

$$II = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & II(X, X) & \dots & II(X, Y) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & II(X, X) & \dots & II(X, Y) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & II(T, T) \end{pmatrix}$$



La traccia dello stesso minore è invece dato dalla forma di Levi:

**Proposizione 3.34.** *Per ogni  $Z \in T_{1,0}(M)$  con*

$$Z = X - iY, \quad Y = J(X)$$

*si ha:*

$$\mathcal{L}(Z, \bar{Z}) = II(X, X) + II(Y, Y)$$

#### **Dimostrazione**

Segue dal risultato sul legame tra la forma di Levi e  $II$  (3.20), e dalla simmetria della seconda forma fondamentale.  $\sharp$

**Osservazione 3.35.** *In particolare se  $Z$  è unitario, allora  $\mathcal{L}(Z, \bar{Z})$  rappresenta la curvatura media della sezione bidimensionale generata da  $X$  e  $Y$ .*

### 3.6 Gli autovalori della forma di Levi

Sia ora  $B = \{E_1, \dots, E_N\}$  una base ortonormale di  $T_{1,0}(M)$ .

**Definizione 3.36.** *Sia*

$$\mathcal{L}_{j\bar{k}} = \mathcal{L}(E_j, \bar{E}_k)$$

*La forma hermitiana  $N \times N$*

$$L(f, B) = (\mathcal{L}_{j\bar{k}})_{j,k=1,\dots,N}$$

*si chiama forma di Levi  $B$ -normalizzata*

**Osservazione 3.37.** *Anche se  $\mathcal{L}_{j\bar{k}}$  dipende dalla scelta della funzione defnente  $f$  e della base  $B$  di  $T_{1,0}(M)$ , si dimostra che i suoi autovalori dipendono solo dal dominio (si veda [19]).*

**Osservazione 3.38.** *Ovviamente se  $f$  e  $g$  sono due funzioni defnenti lo stesso dominio, allora la forma di Levi relativa a  $f$  è equivalente a quella relativa a  $g$ , a condizione che il cambio di variabili necessario per passare da  $f$  a  $g$ , sia un'isometria complessa (cioè preservi la struttura complessa).*

**Esempio 3.39.** *Si consideri l'esempio (3.24). Quindi sia  $N = 1$ , e*

$$Z = \frac{\sqrt{2}}{|\partial f|} (f_2 \partial_{z_1} - f_1 \partial_{z_2})$$

*Si è già visto che  $Z \in T_{1,0}(M)$ , inoltre poichè*

$$g(Z, \bar{Z}) = \frac{2}{|\partial f|^2} \frac{1}{2} (f_2 f_{\bar{2}} + f_1 f_{\bar{1}}) = 1$$

*$Z$  è unitario. L'unico autovalore della forma di Levi sarà dato da:*

$$L_p(f, B) = \mathcal{L}_{1\bar{1}} = \mathcal{L}(Z, \bar{Z}) = \frac{1}{|\partial f|^3} (f_2 f_{\bar{2}} f_{1\bar{1}} - f_1 f_{\bar{2}} f_{2\bar{1}} - f_2 f_{\bar{1}} f_{1\bar{2}} + f_1 f_{\bar{1}} f_{2\bar{2}})$$

Dallo studio di  $\mathcal{L}_{j\bar{k}}$ , in particolare dei suoi autovalori, è possibile risalire ad alcune proprietà della struttura CR. Facendo alcune assunzioni, è possibile recuperare gli autovalori di  $\mathcal{L}_{j\bar{k}}$  senza passare esplicitamente per una base ortonormale di  $T_{1,0}(M)$ .

**Proposizione 3.40.** *Sia  $p \in M$ , e si assuma, poichè  $\partial_p f \neq 0$ , che ad esempio  $f_{N+1}(p) \neq 0$ ; e sia*

$$\alpha_j := \alpha_j(p) = \frac{f_j(p)}{f_{N+1}(p)}$$

Allora

$$\{Z_j\}_{j=1,\dots,N}$$

con

$$Z_j = \partial_{z_j} - \alpha_j \partial_{z_{N+1}}$$

risulta essere una base (non ortonormale) di  $T_{1,0}(M)$ .

### Dimostrazione

I campi  $Z_j$  risultano essere tutti linearmente indipendenti fra di loro perchè, ad esempio, il campo  $\partial_{z_j}$  è presente solo in  $Z_j$ . Inoltre sono tutti campi tangenti in quanto

$$Z_j(f) = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

Infine sono tutti campi olomorfi di  $\mathbb{C}_{N+1}$  perchè combinazioni lineari di  $(\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_{N+1}})$ . Risulta poi

$$g(Z_j, \bar{Z}_k) = \frac{1}{2}(\delta_{jk} + \frac{f_j f_{\bar{k}}}{|f_{N+1}|^2}) \quad \#$$

**Definizione 3.41.** *Si definiscano le seguenti matrici*

$$A = (A_{j\bar{k}})_{j,k=1,\dots,N}$$

con

$$A_{j\bar{k}} = A_{j\bar{k}}(p) = \mathcal{L}(Z_j, \bar{Z}_k)$$

e

$$H = H(p) = 2 \left( I_N - \frac{\alpha^T \bar{\alpha}}{1 + |\alpha|^2} \right)$$

dove  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ .

Vale ([19]):

**Proposizione 3.42.** *Gli autovalori della forma di Levi normalizzata  $\mathcal{L}_{j\bar{k}}$ , sono gli stessi della matrice  $AH$ .*

A questo punto si possono esprimere le classiche funzioni simmetriche elementari degli autovalori della forma di Levi normalizzata, in termini delle matrici  $A$  e  $H$ , cioè

**Definizione 3.43.** *Sia  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  e si consideri la funzione*

$$\sigma^{(j)}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq N} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_j}$$

con  $j \in \{1, \dots, N\}$ . Ora, per ogni  $q \in \{1, \dots, N\}$ , sia

$$s^{(q)}(\lambda) = \frac{\sigma^{(q)}(\lambda)}{\binom{N}{q}}$$

$s^{(q)}$  è la  $q$ -esima funzione simmetrica elementare.

**Esempio 3.44.** *Se  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  sono gli autovalori della forma di Levi,*

$$s^{(N)}(\lambda) = \det(L(f, B)) = \frac{|f_{N+1}|^2}{|\partial_p f|^{N+1}} \det A$$

$$s^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{N} \text{tr}(L(f, B)) = \frac{1}{N} \text{tr}(HA) \quad (2)$$

**Osservazione 3.45.** *Si noti che, in forma tensoriale, la traccia di  $\mathcal{L}_{j\bar{k}}$  sarà:*

$$\text{tr}(L(f, B)) = g^{j\bar{k}} \mathcal{L}_{j\bar{k}}$$

dove

$$g_{j\bar{k}} = g(Z_j, \bar{Z}_k)$$

e

$$g^{j\bar{k}} = (g_{j\bar{k}})^{-1}$$

con  $(Z_1, \dots, Z_N)$  una qualsiasi base di  $T_{1,0}(M)$ . Se adesso si prende in considerazione la base

$$\{Z_j\}_{j=1, \dots, N}, \quad Z_j = \partial_{z_j} - \alpha_j \partial_{z_{N+1}}$$

introdotta precedentemente, si ha che

$$\text{tr}(L(f, B)) = g^{j\bar{k}} \mathcal{L}_{j\bar{k}} = g^{j\bar{k}} \mathcal{L}(Z_j, \bar{Z}_k) = g^{j\bar{k}} A_{j\bar{k}}$$

quindi

$$H = \{g^{j\bar{k}}\}_{j=1, \dots, N}$$

Esiste inoltre una formula esplicita per il calcolo della  $q$ -esima funzione simmetrica elementare degli autovalori della forma di Levi (si veda [3]):

**Proposizione 3.46.**

$$s^{(q)}(\lambda) = -\frac{1}{\binom{N}{q}} \frac{1}{|\partial_p f|^{q+2}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{q+1} \leq N+1} L_{i_1, \dots, i_{q+1}}(f)$$

dove

$$L_{i_1, \dots, i_{q+1}}(f) = \det \begin{pmatrix} 0 & f_{\bar{i}_1} & \cdots & f_{\bar{i}_{q+1}} \\ f_{i_1} & f_{i_1 \bar{i}_1} & \cdots & f_{i_1 \bar{i}_{q+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_{q+1}} & f_{i_{q+1} \bar{i}_1} & \cdots & f_{i_{q+1} \bar{i}_{q+1}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

**Esempio 3.47.** Sia  $D = B(z_0, R)$  la palla di centro  $z_0$  e raggio  $R$  contenuta in  $\mathbb{C}^{N+1}$  definita da  $f(z) = |z - z_0|^2 - R^2$ , cioè  $D = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} : f(z) < 0\}$

e  $\partial D = \{z \in \mathbb{C}^{N+1} : f(z) = 0\}$ . Si ha allora, per ogni  $p \in \partial D$ , che  $\partial_p f = \bar{z} - \bar{z}_0$ ,  $|\partial f| = R$  e  $Hess_p(f) = I_{N+1}$ . Risulta  $L_p(f, B) = \frac{1}{R} I_N$  e  $\lambda_j = \frac{1}{R}, j = 1, \dots, N$ , così

$$\sigma^{(q)}(\lambda) = \frac{1}{R^q}$$

**Esempio 3.48.** Sia  $D = S^N \times \mathbb{R}$  il cilindro contenuto in  $\mathbb{C}^{N+1}$ . La funzione definente  $D$  sarà allora, indicando con  $(z, t, \tau)$  un punto di  $\mathbb{C}^{N+1} \simeq \mathbb{C}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $f(z, t, \tau) = |z|^2 + t^2 - 1^2$ . Usando la formula (3) si ottiene, per ogni  $p \in \partial D$ ,

$$s^{(N)}(\lambda) = \frac{|z|^2 + 2t^2}{2R^{N+2}}, \quad s^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{N} \frac{(N - \frac{1}{2})|z|^2 + 2t^2}{R^3}$$

**Osservazione 3.49.** Si noti che  $D = S^2 \times \mathbb{R}$  è la stessa varietà dell'esempio (3.5): quello che cambia è la scelta della struttura CR. Infatti, mentre in quel caso la forma di Levi è identicamente nulla (perchè la struttura CR è integrabile), nell'esempio precedente la forma di Levi è non nulla. Quindi, in generale, la forma di Levi dipende strettamente dalla scelta della struttura CR: qui si sceglierà, però, sempre la struttura CR standard, data dal fatto di considerare varietà di tipo ipersuperficie in  $\mathbb{C}^{N+1}$ .

**Osservazione 3.50.** La struttura CR standard può essere diversa per la stessa varietà, in relazione all'immersione della varietà stessa. Ad esempio, si consideri la seguente varietà di tipo cilindro

$$M = S^1 \times \mathbb{R}^2$$

e le seguenti funzioni definenti

$$f(z_1, z_2) = |z_1|^2 - 1 = x_1^2 + y_1^2 - 1$$

$$g(z_1, z_2) = \operatorname{Re}(z_1)^2 + \operatorname{Re}(z_2)^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

*Si vede subito che entrambe definiscono  $M$ , ma un calcolo diretto mostra che la struttura CR relativa ad  $f$  è Levi-piatta, mentre quella relativa a  $g$  è strettamente pseudoconvessa. Questo è dovuto al fatto che per passare da  $f$  a  $g$  bisogna fare una rotazione, la quale però non preserva la struttura complessa, o equivalentemente non è una isometria complessa. Quindi, fissata la varietà intrinsecamente, la struttura CR e conseguentemente la forma di Levi, misura anche il "modo" con cui la varietà è immersa nell'ambiente: in particolare dipende dalla "posizione reciproca" fra il fibrato olomorfo dell'ambiente e lo spazio tangente complessificato della varietà, in quanto la struttura CR standard è per costruzione:*

$$T_{1,0}(M) = T^{1,0}(\mathbb{C}^{N+1}) \cap T^{\mathbb{C}}(M)$$

### 3.7 Il caso N=1

Vogliamo esaminare in dettaglio il caso dimensionalmente più basso. Sia allora  $M$  una ipersuperficie in  $\mathbb{C}^2$ .

Data la normale interna unitaria  $N$ , la direzione caratteristica  $T$  sarà:  $T = J(N)$ . Il sottofibrato  $T_{1,0}(M)$  avrà dimensione 1, e dato un campo unitario  $Z \in T_{1,0}(M)$  chiamiamo  $X$  e  $Y$  i campi reali unitari di  $H(M)$  tali che

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iY), \quad Y = J(X)$$

Quindi  $\{X, Y, T\}$  risulta essere una base ortonormale di  $T(M)$ . Ogni altro campo unitario  $W \in T_{1,0}(M)$  è del tipo

$$\tilde{Z} = rZ$$

con  $r : M \rightarrow \mathbb{C}$  e  $r\bar{r} = 1$ . Dal punto di vista reale, sia  $r = a + ib$  con  $a, b : M \rightarrow \mathbb{R}$ , allora  $r\bar{r} = a^2 + b^2 = 1$  e

$$\tilde{Z} = rZ = (a+ib)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X-iY)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(aX+bY-i(-bX+aY)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X}-i\tilde{Y})$$

cioè si è effettuata una rotazione dei campi  $X, Y$

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

così anche  $\{\tilde{X}, \tilde{Y}, T\}$  risulta essere una base ortonormale di  $T(M)$ .

**Proposizione 3.51.** *Per ogni  $X, Y \in H(M)$  unitari, con  $Y = J(X)$  e  $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iY)$  si ha*

$$2\mathcal{L}(Z, \bar{Z}) = g([X, Y], T)$$



### Dimostrazione

È un calcolo diretto, infatti

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Z, \bar{Z}) &= \frac{1}{2i}g([Z, \bar{Z}], T) = \frac{1}{2i}g\left(\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(X - iY), \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iY)\right], T\right) = \\ &= \frac{1}{2}g([X, Y], T) \quad \# \end{aligned}$$

### ✓Nota

Nel resto di questa sezione chiameremo semplicemente

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}(Z, \bar{Z}), \quad K := K(Z, \bar{Z}) \quad \checkmark$$

**Osservazione 3.52.** Ricordiamo che dalle proprietà della forma di Levi risulta

$$2\mathcal{L} = II(X, X) + II(Y, Y)$$

Questo segue anche direttamente dalla proposizione precedente, infatti:

$$\begin{aligned}2\mathcal{L} &= g([X, Y], T) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, T) = \\ &= g(\nabla_X J(Y) - \nabla_Y J(X), J(T)) = g(\nabla_X X + \nabla_Y Y, N) = \\ &= g(\nabla_X X, N) + g(\nabla_Y Y, N) \end{aligned}$$

Adesso, poichè il commutatore  $[X, Y]$  è un campo tangente, vogliamo scriverlo come combinazione lineare dei campi della base:

**Definizione 3.53.** Siano  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : M \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni tale che

$$\alpha_1 := g(\nabla_X Y, X), \quad \alpha_2 := -g(\nabla_Y X, Y)$$

e

$$\alpha_3 = g(\nabla_T X, Y)$$

Così

$$[X, Y] = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + 2\mathcal{L}T$$

**Osservazione 3.54.** *Vale*

$$\alpha_1 = g([X, Y], X) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, X) = g(\nabla_X Y, X)$$

*in quanto*

$$2g(\nabla_Y X, X) = Y(g(X, X)) = 0$$

*Lo stesso vale per  $\alpha_2$ .*

**Definizione 3.55.** *Sia  $\{X, Y, T\}$  una base ortonormale di  $T(M)$  con  $X, Y \in H(M)$ ,  $Y = J(X)$  e la si rinomini  $\{X_1, X_2, X_0\}$ . Chiamiamo  $h_{ij}$  il seguente coefficiente della seconda forma fondamentale:*

$$h_{ij} := II(X_i, X_j), \quad i, j = 0, 1, 2$$

Con queste notazioni, la matrice simmetrica associata alla seconda forma fondamentale si scrive:

$$II = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{10} \\ h_{21} & h_{22} & h_{20} \\ h_{01} & h_{02} & h_{00} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{L} = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}, \quad K = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$$

Diamo ora alcune formule:

**Lemma 3.56.** *Valgono le seguenti regole di derivazione:*

$$\nabla_X X = -\alpha_1 Y - h_{12} T + h_{11} N$$

$$\nabla_Y Y = \alpha_2 X + h_{12} T + h_{22} N$$

$$\nabla_T T = h_{02} X - h_{01} Y + h_{00} N$$

$$\nabla_X Y = \alpha_1 X + h_{11} T + h_{12} N$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X T &= h_{12}X - h_{11}Y + h_{01}N \\
\nabla_Y X &= -\alpha_2 Y - h_{22}T + h_{12}N \\
\nabla_Y T &= h_{22}X - h_{12}Y + h_{02}N \\
\nabla_T X &= \alpha_3 Y - h_{02}T + h_{01}N \\
\nabla_T Y &= -\alpha_3 X + h_{01}T + h_{02}N
\end{aligned}$$

Inoltre dalla definizione dell'operatore  $A$ :

$$\begin{aligned}
A(X) &= -\nabla_X N = h_{11}X + h_{12}Y + h_{01}T \\
A(Y) &= -\nabla_Y N = h_{12}X + h_{22}Y + h_{02}T \\
A(T) &= -\nabla_T N = h_{01}X + h_{02}Y + h_{00}T
\end{aligned}$$

### Dimostrazione

Segue da calcoli diretti.  $\#$

Per quanto riguarda le regole di commutazione, vale:

### Proposizione 3.57.

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + 2\mathcal{L}T \\
[X, T] &= h_{12}X - (h_{11} + \alpha_3)Y + h_{02}T \\
[Y, T] &= (h_{22} + \alpha_3)X - h_{12}Y - h_{01}T
\end{aligned}$$

### Dimostrazione

La prima è la definizione. Per le altre bisogna fare le proiezioni del commutatore. Ad esempio, per  $[X, T]$ :

$$\begin{aligned}
g([X, T], X) &= g(\nabla_X T - \nabla_T X, X) = g(\nabla_X T, X) = -g(\nabla_X N, Y) = h_{12} \\
g([X, T], Y) &= g(\nabla_X T - \nabla_T X, Y) = g(\nabla_X N, X) - g(\nabla_T X, Y) = -(h_{11} + \alpha_3) \\
g([X, T], T) &= g(\nabla_X T - \nabla_T X, T) = -g(\nabla_T X, T) = g(\nabla_T Y, N) = h_{02}
\end{aligned}$$

Per  $[Y, T]$  si fa allo stesso modo.  $\sharp$

Con queste notazioni vogliamo introdurre ora le equazioni di Codazzi. Per quanto riguarda queste equazioni si può vedere ([14]). Queste si possono scrivere nel seguente modo: per ogni  $V, W \in T(M)$

$$(\nabla_V II)(W, \cdot) = (\nabla_W II)(V, \cdot)$$

dove  $\nabla$  è la connessione su  $M$  indotta dall'ambiente e

$$(\nabla_V II)(\cdot, \cdot) = V(II(\cdot, \cdot)) - II(\nabla_V \cdot, \cdot) - II(\cdot, \nabla_V \cdot)$$

Con le nostre notazioni si possono scrivere allora 9 equazioni:

$$\begin{aligned} (\nabla_X II)(Y, V) &= (\nabla_Y II)(X, V), & V = X, Y, T \\ (\nabla_X II)(T, V) &= (\nabla_T II)(X, V), & V = X, Y, T \\ (\nabla_Y II)(T, V) &= (\nabla_T II)(Y, V), & V = X, Y, T \end{aligned}$$

**Proposizione 3.58.** *Le equazioni di Codazzi sono*

$$\begin{aligned} Y(h_{11}) - X(h_{12}) &= h_{12}h_{02} + \alpha_1 h_{22} - \alpha_1 h_{11} - h_{11}h_{01} - 2\alpha_2 h_{12} - 2h_{22}h_{01} \\ X(h_{22}) - Y(h_{12}) &= \alpha_2 h_{22} + h_{22}h_{02} - \alpha_2 h_{11} - h_{12}h_{01} + 2\alpha_1 h_{12} + 2h_{11}h_{02} \\ X(h_{02}) - Y(h_{01}) &= (h_{11} + h_{22})h_{00} - 2(h_{11}h_{22} - h_{12}^2) + \alpha_1 h_{01} + \alpha_2 h_{02} \\ X(h_{01}) - T(h_{11}) &= 2h_{02}h_{01} - 2\alpha_3 h_{12} - \alpha_1 h_{02} - h_{12}h_{00} \\ X(h_{02}) - T(h_{12}) &= h_{11}h_{00} + \alpha_1 h_{01} + \alpha_3 h_{11} - (h_{11}h_{22} - h_{12}^2) - \alpha_3 h_{22} + h_{02}^2 - h_{01}^2 \\ X(h_{00}) - T(h_{01}) &= 3h_{01}h_{12} - 3h_{02}h_{11} + h_{02}h_{00} - h_{02}\alpha_3 \\ Y(h_{01}) - T(h_{12}) &= (h_{11}h_{22} - h_{12}^2) + \alpha_3 h_{11} - h_{22}h_{00} - \alpha_3 h_{22} - \alpha_2 h_{02} - h_{01}^2 + h_{02}^2 \\ Y(h_{02}) - T(h_{22}) &= h_{12}h_{00} - 2h_{01}h_{02} + 2\alpha_3 h_{12} + \alpha_2 h_{01} \\ Y(h_{00}) - T(h_{02}) &= 3h_{01}h_{22} - 3h_{02}h_{12} + \alpha_3 h_{01} - h_{01}h_{00} \end{aligned}$$

### Dimostrazione

Dimostriamo solo la prima, le altre si fanno allo stesso modo.

$$(\nabla_X II)(Y, X) = X(II(Y, X)) - II(\nabla_X Y, X) - II(Y, \nabla_X X) =$$

$$\begin{aligned}
&= X(h_{12}) - II(\alpha_1 X + h_{11}T, X) - II(Y, -\alpha_1 Y - h_{12}T) = \\
&= X(h_{12}) - \alpha_1 h_{11} - h_{11}h_{01} + \alpha_1 h_{22} + h_{12}h_{02}
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y II)(X, X) &= Y(II(X, X)) - II(\nabla_Y X, X) - II(X, \nabla_Y X) = \\
Y(h_{11}) - 2II(-\alpha_2 Y - h_{22}T, X) &= Y(h_{11}) + 2\alpha_2 h_{12} + 2h_{22}h_{01}
\end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene l'equazione cercata  $\sharp$ .

Con queste formule possiamo dimostrare i seguenti risultati:

**Definizione 3.59.** *Sia  $p \in M$ . Diciamo che  $T$  è autovettore per l'operatore  $A$  in  $p$ , se  $h_{01} = h_{02} = 0$  in  $p$ ; o equivalentemente*

$$A_p(T) = h_{00}(p)T_p$$

**Teorema 3.60.** *Sia  $M$  una varietà compatta con forma di Levi  $\mathcal{L}$  costante positiva. Se la direzione caratteristica è autovettore per la seconda forma fondamentale, allora  $M$  è una sfera di raggio  $1/\mathcal{L}$ .*

### Dimostrazione

Se  $T$  è autovettore per la seconda forma fondamentale, allora si ha  $h_{01} = h_{02} = 0$  identicamente su  $M$ . Dalla sesta a dalla nona equazione si ha che

$$X(h_{00}) = Y(h_{00}) \equiv 0$$

Inoltre

$$2\mathcal{L}T(h_{00}) = [X, Y](h_{00}) = 0$$

quindi  $h_{00}$  è costante. Allora la curvatura media classica è costante e da un risultato di Alexandrov ([1],[2]), si ha che  $M$  è una sfera.  $\sharp$

**Teorema 3.61.** *Se  $M$  ha forma di Levi costante positiva e tale che  $\mathcal{L}^2 = K$ , allora  $M$  è una sfera di raggio  $1/\mathcal{L}$ .*

### Dimostrazione

Ricordiamo che vale sempre

$$K \leq \mathcal{L}^2$$

e l'uguaglianza vale se e solo se

$$h_{11} = h_{22} = \mathcal{L}, \quad h_{12} = 0$$

in ogni punto di  $M$  e per ogni scelta dei campi  $X, Y \in H(M)$ . Consideriamo le prime due equazioni di Codazzi

$$0 = Y(\mathcal{L}) = -3\mathcal{L}h_{01}$$

$$0 = X(\mathcal{L}) = 3\mathcal{L}h_{02}$$

e visto che  $\mathcal{L} > 0$ , si ha che  $h_{01} = h_{02} = 0$  identicamente su  $M$ . Adesso dalla terza equazione di Codazzi si ha

$$0 = X(h_{02}) - Y(h_{01}) = 2(\mathcal{L}h_{00} - K)$$

quindi  $h_{00} = \mathcal{L}$ . Allora la seconda forma fondamentale risulta essere diagonale con gli autovalori costanti uguali fra loro.  $\#$

**Osservazione 3.62.** *Dal punto di vista geometrico, l'ipotesi  $\mathcal{L}^2 = K$ , significa che il sottofibrato  $H(M)$  è ombelicale, cioè:*

$$A(X) = -\nabla_X N = \mathcal{L}X, \quad \forall X \in H(M)$$

Vogliamo mostrare ora che usando dei campi particolari, scritti usando una funzione definente, si ottengono delle uguaglianze fra alcuni dei coefficienti introdotti.

Sia allora  $M$  una ipersuperficie in  $\mathbb{C}^2$ , bordo di un dato dominio  $D$ :

$$D = \{z \in \mathbb{C}^2 : f(z) < 0\}, \quad M = \partial D = \{z \in \mathbb{C}^2 : f(z) = 0\}$$

con  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{C}^2)$ . La normale interna unitaria sarà:

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{|\partial f|}(f_{\bar{k}}\partial_{z_k} + f_k\partial_{\bar{z}_k}) = \\ &= -\frac{1}{|\partial f|}(f_{\bar{1}}\partial_{z_1} + f_{\bar{2}}\partial_{z_2} + f_1\partial_{\bar{z}_1} + f_2\partial_{\bar{z}_2}) \end{aligned}$$

La direzione caratteristica  $T$ :

$$T = J(N) = -\frac{i}{|\partial f|}(f_{\bar{k}}\partial_{z_k} - f_k\partial_{\bar{z}_k})$$

Il sottofibrato  $T_{1,0}(M)$  è generato dal campo unitario

$$Z^d = \frac{\sqrt{2}}{|\partial f|}(f_2\partial_{z_1} - f_1\partial_{z_2})$$

dove "d" sta per indicare che il campo è scritto mediante una funzione defnente. Chiamiamo  $X^d$  e  $Y^d$  i campi reali unitari tali che

$$Z^d = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^d - iY^d), \quad Y^d = J(X^d)$$

Quindi  $\{X^d, Y^d, T\}$  risulta essere una base ortonormale di  $T(M)$ . Si noti che la normale e di conseguenza il campo caratteristico non dipendono dalla funzione defnente.

**Definizione 3.63.** *Per una notazione compatta, definiamo*

$$\nu^k = \frac{f_k}{|\partial f|}$$

e

$$\mu^1 = \nu^2, \quad \mu^2 = -\nu^1$$

in modo da scrivere

$$\begin{aligned} N &= -(\bar{\nu}^k\partial_{z_k} + \nu^k\partial_{\bar{z}_k}) \\ T &= J(N) = -i(\bar{\nu}^k\partial_{z_k} - \nu^k\partial_{\bar{z}_k}) \\ Z^d &= \sqrt{2}(\nu^2\partial_{z_1} - \nu^1\partial_{z_2}) = \sqrt{2}\mu^k\partial_{z_k} \end{aligned}$$

**Osservazione 3.64.** *Vale*

$$W(\bar{\nu}^k)\nu_k = W(\bar{\mu}^k)\mu_k$$

per ogni  $W \in T(M)$

Esiste una relazione tra  $\alpha_1^d, \alpha_2^d, \alpha_3^d$  e  $h_{01}^d, h_{02}^d, h_{00}^d$ :

**Proposizione 3.65.** *Vale:*

$$\alpha_1^d = -h_{01}^d, \quad \alpha_2^d = -h_{02}^d$$

o equivalentemente

$$g(\nabla_{Z^d}\bar{Z}^d, Z^d) = -ig(\nabla_{Z^d}T, N)$$

### Dimostrazione

Usando notazioni complesse, si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{2}g(\nabla_{Z^d}\bar{Z}^d, Z^d) &= \sqrt{2}g(\nabla_{\frac{1}{\sqrt{2}}(X^d-iY^d)}\frac{1}{\sqrt{2}}(X^d+iY^d), \frac{1}{\sqrt{2}}(X^d-iY^d)) = \\ &= \frac{1}{2}\{g(\nabla_{Y^d}Y^d, X^d) - g(\nabla_{Y^d}X^d, Y^d) + i(g(\nabla_{X^d}Y^d, X^d) - g(\nabla_{X^d}X^d, Y^d))\} = \alpha_2^d + i\alpha_1^d \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} i\sqrt{2}g(\nabla_{Z^d}T, N) &= i\sqrt{2}g(\nabla_{\frac{1}{\sqrt{2}}(X^d-iY^d)}T, N) = \\ &= ig(\nabla_{X^d}T, N) + g(\nabla_{Y^d}T, N) = \gamma_2^d + i\gamma_1^d \end{aligned}$$

In coordinate, si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{2}g(\nabla_{Z^d}\bar{Z}^d, Z^d) &= \sqrt{2}g(\nabla_{Z^d}\sqrt{2}\bar{\mu}^k\partial_{\bar{z}_k}, \sqrt{2}\mu^j\partial_{z_j}) = \\ &= \sqrt{2}Z^d(\bar{\mu}^k)\mu_k = \sqrt{2}Z^d(\bar{\nu}^k)\nu_k \end{aligned}$$

e

$$i\sqrt{2}g(\nabla_{Z^d}T, N) = -\sqrt{2}g(\nabla_{Z^d}(\bar{\nu}^k\partial_{z_k} - \nu^k\partial_{\bar{z}_k}), \bar{\nu}^j\partial_{z_j} + \nu^j\partial_{\bar{z}_j}) =$$



$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(Z^d(\bar{\nu}^k)\nu_k - Z^d(\nu^k)\bar{\nu}_k) = -\sqrt{2}Z^d(\bar{\nu}^k)\nu_k$$

in quanto

$$0 = Z^d(1) = Z^d(\bar{\nu}^k\nu_k) = Z^d(\bar{\nu}^k)\nu_k + Z^d(\nu^k)\bar{\nu}_k$$

Così

$$\sqrt{2}g(\nabla_{Z^d}\bar{Z}^d, Z^d) = -i\sqrt{2}g(\nabla_{Z^d}T, N) \quad \#$$

Esiste anche la seguente relazione

**Proposizione 3.66.** *Si ha:*

$$\alpha_3^d = h_{00}$$

cioè

$$g(\nabla_T X^d, Y^d) = g(\nabla_T T, N)$$

o equivalentemente

$$g(\nabla_T T, N) = ig(\nabla_T \bar{Z}^d, Z^d)$$

### Dimostrazione

Prima di tutto

$$\begin{aligned} g(\nabla_T \bar{Z}^d, Z^d) &= g(\nabla_T \frac{1}{\sqrt{2}}(X^d + iY^d), \frac{1}{\sqrt{2}}(X^d - iY^d)) = \\ &= \frac{1}{2}\{g(\nabla_T X^d, X^d) + g(\nabla_T Y^d, Y^d) + i(g(\nabla_T Y^d, X^d) - g(\nabla_T X^d, Y^d))\} = ig(\nabla_T Y^d, X^d) \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} g(\nabla_T \bar{Z}^d, Z^d) &= g(\nabla_T \sqrt{2}\bar{\mu}^k \partial_{\bar{z}_k}, \sqrt{2}\mu^j \partial_{z_j}) = \\ &= T(\bar{\mu}^k)\mu_k = T(\bar{\nu}^k)\nu_k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(\nabla_T T, N) &= ig(\nabla_T(\bar{\nu}^k \partial_{z_k} - \nu^k \partial_{\bar{z}_k}), \bar{\nu}^j \partial_{z_j} + \nu^j \partial_{\bar{z}_j}) = \\ &= \frac{i}{2}(T(\bar{\nu}^k)\nu_k - T(\nu^k)\bar{\nu}_k) = iT(\bar{\nu}^k)\nu_k \quad \# \end{aligned}$$

Per questi campi le regole di derivazione e le formule per i commutatori diventano:

**Corollario 3.67.** *Regole di derivazione per i campi  $X^d, Y^d$ :*

$$\nabla_{X^d} X^d = h_{01}^d Y^d - h_{12}^d T + h_{11}^d N$$

$$\nabla_{Y^d} Y^d = -h_{02}^d X^d + h_{12}^d T + h_{22}^d N$$

$$\nabla_T T = h_{02}^d X^d - h_{01}^d Y^d + h_{00}^d N$$

$$\nabla_{X^d} Y^d = -h_{01}^d X^d + h_{11}^d T + h_{12}^d N$$

$$\nabla_{X^d} T = h_{12}^d X^d - h_{11}^d Y^d + h_{01}^d N$$

$$\nabla_{Y^d} X^d = h_{02}^d Y^d - h_{22}^d T + h_{12}^d N$$

$$\nabla_{Y^d} T = h_{22}^d X^d - h_{12}^d Y^d + h_{02}^d N$$

$$\nabla_T X^d = h_{00}^d Y^d - h_{02}^d T + h_{01}^d N$$

$$\nabla_T Y^d = -h_{00}^d X^d + h_{01}^d T + h_{02}^d N$$

Per quanto riguarda le regole di commutazione:

**Corollario 3.68.** *Regole di commutazione per i campi  $X^d, Y^d$ :*

$$[X^d, Y^d] = -h_{01}^d X^d - h_{02}^d Y^d + 2\mathcal{L}T$$

$$[X^d, T] = h_{12}^d X^d - (h_{11}^d + h_{00})Y^d + h_{02}^d T$$

$$[Y^d, T] = (h_{22}^d + h_{00})X^d - h_{12}^d Y^d - h_{01}^d T$$

**Osservazione 3.69.** *Mettendo insieme le precedenti formule con la definizione dell'operatore  $A$ , si ottengono le seguenti eleganti relazioni:*

$$A(X^d) + [Y^d, T] = 3\mathcal{H}X^d$$

$$A(Y^d) + [T, X^d] = 3\mathcal{H}Y^d$$

$$A(T) + [X^d, Y^d] = 3\mathcal{H}T$$

Dove  $\mathcal{H}$  è la curvatura media classica:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{3}tr(II) = \frac{1}{3}(h_{11} + h_{22} + h_{00}) = \frac{1}{3}(2\mathcal{L} + h_{00})$$

Sempre per questi campi riscriviamo le equazioni di Codazzi.

**Corollario 3.70.** *Equazioni di Codazzi per i campi  $X^d, Y^d$ :*

$$\begin{aligned}
Y^d(h_{11}^d) - X^d(h_{12}^d) &= 3h_{12}^d h_{02}^d - 3h_{22}^d h_{01}^d \\
X^d(h_{22}^d) - Y^d(h_{12}^d) &= 3h_{11}^d h_{02}^d - 3h_{12}^d h_{01}^d \\
X^d(h_{02}^d) - Y^d(h_{01}^d) &= (h_{11}^d + h_{22}^d)h_{00} - 2(h_{11}^d h_{22}^d - (h_{12}^d)^2) - (h_{01}^d)^2 - (h_{02}^d)^2 \\
X^d(h_{01}^d) - T(h_{11}^d) &= 3h_{02}^d h_{01}^d - 3h_{12}^d h_{00} \\
X^d(h_{02}^d) - T(h_{12}^d) &= 2h_{11}^d h_{00} - (h_{11}^d h_{22}^d - (h_{12}^d)^2) - h_{00} h_{22}^d + (h_{02}^d)^2 - 2(h_{01}^d)^2 \\
X^d(h_{00}) - T(h_{01}^d) &= 3h_{01}^d h_{12}^d - 3h_{02}^d h_{11}^d \\
Y^d(h_{01}^d) - T(h_{12}^d) &= (h_{11}^d h_{22}^d - (h_{12}^d)^2) - 2h_{22}^d h_{00} + h_{11}^d h_{00} - (h_{01}^d)^2 + 2(h_{02}^d)^2 \\
Y^d(h_{02}^d) - T(h_{22}^d) &= 3h_{12}^d h_{00} - 3h_{01}^d h_{02}^d \\
Y^d(h_{00}) - T(h_{02}^d) &= 3h_{01}^d h_{22}^d - 3h_{02}^d h_{12}^d
\end{aligned}$$

Vogliamo vedere ora cosa succede quando si passa dai campi  $X^d, Y^d$  a nuovi campi  $X, Y$ . Sia allora  $r = a + ib$ ,  $r\bar{r} = 1$  tale che  $Z = rZ^d$  cioè

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^d \\ Y^d \end{pmatrix}$$

**Lemma 3.71.** *Vale*

$$\begin{pmatrix} h_{01} \\ h_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{01}^d \\ h_{02}^d \end{pmatrix}$$

*In particolare la quantità  $\gamma^2 = h_{01}^2 + h_{02}^2$  non dipende dalla base scelta.*

**Dimostrazione**

Dimostriamo solo la prima:

$$\begin{aligned}
h_{01} &= g(\nabla_X T, N) = g(\nabla_{aX^d + bY^d} T, N) = \\
&= ag(\nabla_{X^d} T, N) + bg(\nabla_{Y^d} T, N) = ah_{01}^d + bh_{02}^d \quad \#
\end{aligned}$$

**Lemma 3.72.** *Vale*

$$\begin{aligned} h_{11} &= a^2 h_{11}^d + 2ab h_{12}^d + b^2 h_{22}^d \\ h_{22} &= b^2 h_{11}^d - 2ab h_{12}^d + a^2 h_{22}^d \\ h_{12} &= -ab(h_{11}^d - h_{22}^d) + (a^2 - b^2)h_{12}^d \end{aligned}$$

*cioè*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(h_{11}^d - h_{22}^d) \\ h_{12}^d \end{pmatrix}$$

**Dimostrazione**

Segue da calcoli diretti.  $\#$

**Lemma 3.73.** *Vale*

$$\alpha_3 = h_{00} + aT(b) - bT(a)$$

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= g(\nabla_T X, Y) = g(\nabla_T(aX^d + bY^d), -bX^d + aY^d) = \\ &= a^2 g(\nabla_T X^d, Y^d) - b^2 g(\nabla_T Y^d, X^d) + aT(b) - bT(a) = \\ &= (a^2 + b^2)g(\nabla_T Y^d, X^d) + aT(b) - bT(a) = h_{00} + aT(b) - bT(a) \quad \# \end{aligned}$$

### 3.8 Curvatura media e pseudocurvatura media

Sia ora  $M$  una ipersuperficie in  $\mathbb{C}^{N+1}$  e chiamiamo  $\nu$  la normale esterna unitaria. Abbiamo visto che la pseudocurvatura media, o curvatura media di Levi,  $H_L$  è la traccia pesata della forma di Levi normalizzata. La relazione con la curvatura media classica  $H$  è

$$H = \frac{1}{2N+1}(2NH_L + II(T, T))$$

Vogliamo mostrare che se sussiste una particolare condizione su  $H$  e  $H_L$  allora si ottiene un teorema di caratterizzazione per le sfere. Premettiamo alcuni lemmi.

**Lemma 3.74.** *Sia  $M$  una ipersuperficie in  $\mathbb{C}^{N+1}$ , bordo di un dominio  $\Omega$  limitato. Per ogni funzione definente  $f : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^2$ , si ha*

$$\int_{\Omega} \sigma^{(2)}(\partial\bar{\partial}f)dx = \frac{N}{4} \int_{M=\partial\Omega} H_L |\partial f|^2 d\sigma$$

dove  $\sigma^{(2)}(\partial\bar{\partial}f)$  è la seconda funzione simmetrica elementare degli autovalori della matrice hessiana complessa di  $f$ .

#### Dimostrazione

Ricordiamo da (3) che

$$H_L = -\frac{1}{N} \frac{1}{|\partial_p f|^3} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N+1} L_{i_1, i_2}(f)$$

dove

$$L_{i_1, i_2}(f) = \det \begin{pmatrix} 0 & f_{\bar{i}_1} & f_{\bar{i}_2} \\ f_{i_1} & f_{i_1 \bar{i}_1} & f_{i_1 \bar{i}_2} \\ f_{i_2} & f_{i_2 \bar{i}_1} & f_{i_2 \bar{i}_2} \end{pmatrix}$$

Adesso poichè  $\sigma^{(2)}$  è omogenea di grado 2, cioè per ogni  $t$  reale e per ogni matrice  $A$  hermitiana  $\sigma^{(2)}(tA) = t^2\sigma^{(2)}(A)$ , si ha

$$\sigma^{(2)}(\partial\bar{\partial}f) = \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^{N+1} \frac{\partial\sigma^{(2)}(\partial\bar{\partial}f)}{\partial r_{l\bar{k}}} f_{l\bar{k}}$$

dove  $r_{l\bar{k}}$  rappresenta l'elemento di posto  $l\bar{k}$ . Inoltre dalle proprietà delle funzioni simmetriche elementari della matrice hessiana complessa si ottiene

$$\sum_l \partial_l \left( \frac{\partial\sigma^{(2)}(\partial\bar{\partial}f)}{\partial r_{l\bar{k}}} \right) = 0 \quad \forall k$$

(si veda ad esempio ([21]) per le hessiane reali). Allora usando il teorema di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma^{(2)}(\partial\bar{\partial}f) dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{l,k=1}^{N+1} \partial_l \left( \frac{\partial\sigma^{(2)}(\partial\bar{\partial}f)}{\partial r_{l\bar{k}}} f_{l\bar{k}} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_M \sum_{l,k=1}^{N+1} \left( \frac{\partial\sigma^{(2)}(\partial\bar{\partial}f)}{\partial r_{l\bar{k}}} f_{l\bar{k}} \nu_l \right) d\sigma = \frac{1}{4} \int_M \frac{1}{|\partial f|} \sum_{l,k=1}^{N+1} \left( \frac{\partial\sigma^{(2)}(\partial\bar{\partial}f)}{\partial r_{l\bar{k}}} f_{l\bar{k}} f_l \right) d\sigma = \\ &= -\frac{1}{4} \int_M \frac{1}{|\partial f|} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N+1} L_{i_1, i_2}(f) d\sigma = \frac{N}{4} \int_M H_L |\partial f|^2 d\sigma \quad \# \end{aligned}$$

**Lemma 3.75.** (*Disuguaglianza di tipo Newton*) Per ogni matrice  $n \times n$  hermitiana  $A$ , vale

$$2\sigma^{(2)}(A) \leq \frac{n-1}{n} (\text{tra}(A))^2$$

Inoltre, l'uguaglianza vale se e solo se  $A$  è proporzionale alla matrice identità.

### Dimostrazione

Poichè  $\sigma^{(2)}(A)$  e  $\text{tra}(A) = \sigma^{(1)}(A)$  sono invarianti ortogonali per  $A$ , assumiamo  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Dalla disuguaglianza di Newton

$$\|A\|^2 \geq \frac{1}{n} (\text{tra}(A))^2$$

si ha:

$$2\sigma^{(2)}(A) = (\text{tra}(A))^2 - \sum_j \lambda_j^2 \leq (\text{tra}(A))^2 - \frac{1}{n}(\text{tra}(A))^2 = \frac{n-1}{n}(\text{tra}(A))^2 \quad \#$$

A questo punto possiamo dimostrare il seguente

**Teorema 3.76.** *Sia  $M$  una ipersuperficie in  $\mathbb{C}^{N+1}$ , bordo di un dominio  $\Omega$  limitato e stellato. Se  $M$  ha curvatura media di Levi  $H_L$  costante e vale*

$$H \leq H_L$$

*allora  $M$  è una sfera.*

### Dimostrazione

Prima di tutto ricordiamo la formula di Minkowski per la curvatura media classica

$$\int_M d\sigma = \int_M H \langle \nu, x \rangle d\sigma$$

dalla quale ricaviamo

$$mis(\partial\Omega) = \int_M d\sigma \leq H_L \int_M \langle \nu, x \rangle d\sigma = H_L \int_\Omega \text{div}(x) dx = 2(N+1)H_L mis(\Omega)$$

(si noti che abbiamo  $\langle \nu, x \rangle \geq 0$  in virtù dell'ipotesi di dominio stellato).

Procedendo secondo un'argomentazione usata in ([20]), scegliamo come funzione definente, l'unica soluzione del Problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \text{tra}(\partial\bar{\partial}f) = 1 & \text{in } \bar{\Omega} \\ f = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove  $4\text{tra}(\partial\bar{\partial}f) = \Delta f$ . Dalla disuguaglianza di tipo Newton si ha

$$\int_\Omega \sigma^{(2)}(\partial\bar{\partial}f) dx \leq \frac{N}{2(N+1)} \int_\Omega (\text{tra}(\partial\bar{\partial}f))^2 dx = \frac{N}{2(N+1)} mis(\Omega)$$

Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e il teorema della divergenza si ha

$$\frac{N}{4} H_L \int_M |\partial f|^2 d\sigma \geq \frac{N mis(\partial\Omega)}{8(N+1) mis(\Omega)} \int_M |\partial f|^2 d\sigma \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{N}{8(N+1)mis(\Omega)} \left( \int_M |\partial f| d\sigma \right)^2 = \frac{N}{32(N+1)mis(\Omega)} \left( \int_M \langle \nabla f, \nu \rangle d\sigma \right)^2 = \\ &= \frac{N}{32(N+1)mis(\Omega)} \left( \int_\Omega \Delta f dx \right)^2 = \frac{Nmis(\Omega)}{2(N+1)} \end{aligned}$$

Dalla formula ottenuta nel primo lemma allora si ottiene

$$\frac{Nmis(\Omega)}{2(N+1)} \geq \int_\Omega \sigma^{(2)}(\partial\bar{\partial}f) dx = \frac{N}{4} \int_{M=\partial\Omega} H_L |\partial f|^2 d\sigma \geq \frac{Nmis(\Omega)}{2(N+1)}$$

Questo significa che tutte le precedenti disuguaglianze sono in realtà uguaglianze; in particolare si trova che

$$\partial\bar{\partial}f = \frac{1}{(N+1)} I_{N+1}, \quad |\partial f| = \frac{1}{(N+1)} \frac{1}{H_L}$$

ma su  $\partial\Omega = M$  si ha  $H_L$  costante per ipotesi, quindi il Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} tra(\partial\bar{\partial}f) = 1 & in \bar{\Omega} \\ f = 0 & su \partial\Omega \\ |\partial f| = c & su \partial\Omega \end{cases}$$

è sovradeterminato. Da un risultato di Serrin ([23]) si ha che  $\Omega$  è una palla e quindi  $M$  è una sfera.  $\sharp$



## 4 L'equazione di pseudocurvatura media

### 4.1 La traccia per i grafici cartesiani

Vogliamo scrivere la formula per il calcolo della pseudocurvatura media per domini di  $\mathbb{C}^{N+1}$ , che possono essere visti come grafici in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Facciamo la seguente identificazione:

$$\begin{aligned} z = (z_1, \dots, z_{N+1}) &= (x_1 + iy_1, \dots, x_N + iy_N, t + is) \approx \\ &\approx (x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, t, s) = (x, y, t, s) \end{aligned}$$

#### ✓Nota

Per comodità, si è scelto di chiamare  $t, s$  le coordinate che precedentemente erano state chiamate rispettivamente  $x_{N+1}, y_{N+1}$  ✓

**Definizione 4.1.** *Chiamiamo dominio di tipo grafico (relativo a  $s$ ) un dominio di  $\mathbb{C}^{N+1}$ , tale che una funzione deficiente si scriva*

$$f(z) = u(x, y, t) - s$$

con  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Quindi l'epigrafico di  $u$  sarà il dominio  $D \subseteq \mathbb{C}^{N+1}$  e il grafico di  $u$  la varietà:

$$D = \{(x, y, t, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : u(x, y, t) < s\}$$

$$M = \partial D = \{(x, y, t, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : u(x, y, t) = s\}$$

**Osservazione 4.2.** Vale

$$\begin{aligned}\partial f &= \frac{1}{2}(f_{x_1} - if_{y_1}, \dots, f_{x_N} - if_{y_N}, f_t - if_s) = \\ &= \frac{1}{2}(u_{x_1} - iu_{y_1}, \dots, u_{x_N} - iu_{y_N}, u_t + i) \\ |\partial f| &= \frac{1}{2}(u_{x_1}^2 + u_{y_1}^2 + \dots + u_{x_N}^2 + u_{y_N}^2 + u_t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(|Du|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

**Proposizione 4.3.** Sia

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad \alpha_j := \frac{f_j}{f_{N+1}}$$

e siano  $P, Q$  due matrici reali  $N \times N$  tali che

$$\alpha^T \bar{\alpha} = P + iQ$$

Definiamo ora

$$c = 1 + |\alpha|^2$$

e

$$A(Du) := \begin{pmatrix} cI_N - P & -Q & a^T \\ Q & cI_N - P & b^T \\ a & b & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

La traccia della forma di Levi per  $M$  è:

$$K(M) = \frac{1}{2N} \frac{u_t^2 + 1}{(|Du|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \text{tr}(A(Du) D^2 u)$$

### Dimostrazione

Ricordando la formula (2), si ha (se  $f_{N+1}(p) \neq 0$ )

$$K(M) := \frac{1}{N} \text{tr}(H(f)A(f))$$

Sia ora

$$J_1 = \begin{pmatrix} I_N \\ -\bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

allora

$$A(f) = \frac{1}{2|\partial f|} \bar{J}_1^T \text{Hess}(f) J_1,$$

se poi

$$D^2u = \text{Hess}(u) \quad \text{e} \quad J_2 = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ iI_N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vale:

$$\text{Hess}(f) = \frac{1}{4} \bar{J}_2^T D^2u J_2$$

infine ponendo:

$$J = J_2 J_1 = \begin{pmatrix} I_N \\ iI_N \\ -\bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

si ha:

$$A(f) = \frac{1}{8|\partial f|} \bar{J}_1^T \bar{J}_2^T D^2u J_2 J_1 = \frac{1}{8|\partial f|} \bar{J}^T D^2u J$$

e

$$K(M) = \frac{1}{N} \frac{1}{8} \frac{2}{(|Du|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \text{tr}(H(f) \bar{J}^T D^2u J) = \frac{1}{4N} \frac{1}{(|Du|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \text{tra}(J H(f) \bar{J}^T D^2u)$$

Ora:

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \left( \frac{f_1}{f_{N+1}}, \dots, \frac{f_N}{f_{N+1}} \right) = \left( \frac{u_{x_1} - iu_{y_1}}{u_t + i}, \dots, \frac{u_{x_N} - iu_{y_N}}{u_t + i} \right) = \\ &= \left( \frac{(u_{x_1} - iu_{y_1})(u_t - i)}{u_t^2 + 1}, \dots, \frac{(u_{x_N} - iu_{y_N})(u_t - i)}{u_t^2 + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{u_t^2 + 1} ((u_{x_1}u_t - u_{y_1}) + i(-u_{y_1}u_t - u_{x_1}), \dots, (u_{x_N}u_t - u_{y_N}) + i(-u_{y_N}u_t - u_{x_N})) = -a + ib \end{aligned}$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} a &= (a_1, \dots, a_N), \quad a_j = \frac{-u_{x_j}u_t + u_{y_j}}{(u_t^2 + 1)} \\ b &= (b_1, \dots, b_N), \quad b_j = \frac{-u_{y_j}u_t - u_{x_j}}{(u_t^2 + 1)} \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
1 + |\alpha|^2 &= 1 + |a|^2 + |b|^2 = 1 + \frac{\sum_{j=1}^N (-u_{x_j} u_t + u_{y_j})^2}{(u_t^2 + 1)^2} + \frac{\sum_{j=1}^N (-u_{y_j} u_t - u_{x_j})^2}{(u_t^2 + 1)^2} = \\
&= \frac{u_t^4 + 2u_t^2 + 1 + u_t \sum_{j=1}^n u_{x_j}^2 + u_t \sum_{j=1}^N u_{y_j}^2 + \sum_{j=1}^N u_{x_j}^2 + \sum_{j=1}^N u_{y_j}^2}{(u_t^2 + 1)^2} = \\
&= \frac{u_t^2(u_t^2 + \sum_{j=1}^N u_{x_j}^2 + \sum_{j=1}^N u_{y_j}^2) + (u_t^2 + \sum_{j=1}^N u_{x_j}^2 + \sum_{j=1}^N u_{y_j}^2) + u_t^2 + 1}{(u_t^2 + 1)^2} = \\
&= \frac{u_t^2(|Du|^2) + (|Du|^2) + u_t^2 + 1}{(u_t^2 + 1)^2} = \frac{(u_t^2 + 1)(|Du|^2 + 1)}{(u_t^2 + 1)^2} = \frac{|Du|^2 + 1}{u_t^2 + 1}
\end{aligned}$$

Ora

$$\alpha^T \bar{\alpha} = (-a + ib)^T (-a - ib) = a^T a + b^T b + i(a^T b - b^T a) = P + iQ$$

dove si è posto

$$P = a^T a + b^T b, \quad Q = a^T b - b^T a$$

due matrici reali  $N \times N$  rispettivamente simmetrica e antisimmetrica. Quindi, chiamando per comodità  $c = 1 + |\alpha|^2$ , si ha:

$$H(f) = 2 \frac{cI_N - \alpha^T \bar{\alpha}}{c}$$

e

$$\begin{aligned}
J H(f) \bar{J}^T &= \frac{2}{c} \begin{pmatrix} I_N \\ iI_N \\ -\bar{\alpha} \end{pmatrix} \left( cI_N - \alpha^T \bar{\alpha} \right) \begin{pmatrix} I_N & -iI_N & -\alpha^T \end{pmatrix} = \\
&= \frac{2}{c} \begin{pmatrix} cI_N - \alpha^T \bar{\alpha} & -icI_N + i\alpha^T \bar{\alpha} & -cI_N \alpha^T + \alpha^T \bar{\alpha} \alpha^T \\ icI_N - i\alpha^T \bar{\alpha} & cI_N - \alpha^T \bar{\alpha} & -icI_N \alpha^T + i\alpha^T \bar{\alpha} \alpha^T \\ -c\bar{\alpha} I_N + \bar{\alpha} \alpha^T \bar{\alpha} & ic\bar{\alpha} I_N - i\bar{\alpha} \alpha^T \bar{\alpha} & c\bar{\alpha} I_N \alpha^T - \bar{\alpha} \alpha^T \bar{\alpha} \alpha^T \end{pmatrix} = \frac{2}{c} \Theta
\end{aligned}$$

Poichè si vuole calcolare la traccia di  $\Theta D^2u$  ed essendo  $\Theta$  hermitiana e  $D^2u$  simmetrica, si può sostituire  $\Theta$  con  $Re(\Theta) := A$ , così:

$$A = \begin{pmatrix} cI_N - P & -Q & a^T \\ Q & cI_N - P & b^T \\ a & b & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix}$$

Si noti che la matrice  $A$  dipende solo dalle derivate prime della funzione  $f$ , cioè dal gradiente di  $u$ , quindi  $A = A(Du)$ . Infine, ricordando che  $c = 1 + |\alpha|^2$ , si può scrivere:

$$K(M) = \frac{1}{2N} \frac{u_t^2 + 1}{(|Du|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} tr(A(Du) D^2u) \quad \#$$

**✓Nota**

Per comodità, in alcuni casi invece della precedente espressione si scriverà semplicemente

$$K(M) = tr(\tilde{A}(Du) D^2u) \quad (5)$$

con  $\tilde{A}(Du) = \beta A(Du)$ , e

$$\beta := \beta(Du) = \frac{1}{2N} \frac{u_t^2 + 1}{(|Du|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad \checkmark$$

## 4.2 Grafici e cilindri

Nella sezione precedente si è assunto che il dominio  $D$  possa essere scritto come grafico di una certa funzione  $u(x, y, t)$ : supponiamo adesso che questo non sia possibile.

**Definizione 4.4.** *Chiamiamo dominio di tipo cilindro (relativo a  $s$ ) un dominio di  $\mathbb{C}^{N+1}$ , tale che una funzione definente non dipenda da  $s$ , cioè  $f(x, y, t, s) = u(x, y, t)$*

**Osservazione 4.5.** *Per scrivere la formula (5) si è supposto che  $f_{N+1} \neq 0$ ; in questa situazione però, visto che  $f_s = 0$ , per usare la (5) bisogna supporre  $f_t \neq 0$ . Si ha, per ogni  $j = 1, \dots, N$*

$$\alpha_j(f) = \frac{f_j}{f_{N+1}} = \frac{u_{x_j} - iu_{y_j}}{u_t} := \widehat{\alpha}_j(f)$$

e

$$a_j(Du) = \frac{-u_{x_j}}{u_t} := \widehat{a}_j(Du), \quad b_j(Du) = \frac{-u_{y_j}}{u_t} := \widehat{b}_j(Du)$$

Inoltre

$$\beta(Du) = \frac{1}{2N} \frac{u_t^2}{(|Du|)^{\frac{3}{2}}} := \widehat{\beta}(Du)$$

infine, poichè la matrice  $A$  dipende da  $a$  e  $b$ , sia

$$\widehat{A}(Du) = A(\widehat{a}, \widehat{b})$$

Con questa notazioni la (5) diventa:

$$\widehat{K}(M) = \widehat{\beta} \operatorname{tr}(\widehat{A}(Du) D^2u)$$

Inoltre,  $\widehat{K}(M)$  in un punto  $p \in M$  non dipende dalla quota  $s$ .

Come applicazione di questa ossevazione dimostriamo il seguente fatto:

**Proposizione 4.6.** *Se  $\rho$  è una funzione definente un dominio  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ , e  $p \in \partial\Omega$ , si ha che la traccia della forma di Levi (in  $p$ ) del cilindro di base  $\partial\Omega$  si può ottenere come limite, per  $\lambda \rightarrow +\infty$ , della traccia della forma di Levi (nel punto  $p$ ) del grafico della funzione  $\lambda\rho$ .*

### Dimostrazione

Sia allora  $\Omega$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ , definito mediante una funzione reale, cioè, sia  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho \in C^\infty$  tale che

$$\Omega = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^n : \rho(x, y, t) < 0\}$$

e

$$\partial\Omega = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^n : \rho(x, y, t) = 0\}$$

Il cilindro  $C$  di base  $\partial\Omega$  è il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \approx \mathbb{C}^{N+1}$  dato da

$$C := \partial\Omega \times \mathbb{R}$$

e definito dalla funzione  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, t, s) = \rho(x, y, t)$ . Ovviamente, con queste assunzioni, non si può vedere  $C$  come grafico (relativamente ad  $s$ ). Sia ora  $\lambda > 0$ , e sia

$$\tilde{f}(z) = u(x, y, t) - s$$

con  $u = \lambda\rho$ . Quindi

$$D = \{(x, y, t, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \lambda\rho(x, y, t) < s\}$$

$$M = \partial D = \{(x, y, t, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \lambda\rho(x, y, t) = s\}$$

Adesso si scriva la (5) con  $u = \lambda\rho$  in un punto di  $p \in \partial\Omega$  (si noti che  $\lambda\rho$  è ancora una funzione definente per  $\Omega$ ):

$$K(M) = \beta(\lambda D\rho) \text{tr}(A(\lambda D\rho) \lambda D^2\rho) = \lambda\beta(\lambda D\rho) \text{tr}(A(\lambda D\rho) D^2\rho)$$

Ora

$$\lambda\beta(\lambda D\rho) = \lambda \frac{1}{2N} \frac{\lambda^2 \rho_t^2 + 1}{(\lambda^2 |D\rho|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2N} \frac{\rho_t^2 + \frac{1}{\lambda^2}}{(|D\rho|^2 + \frac{1}{\lambda^2})^{\frac{3}{2}}}$$

e, per ogni  $j = 1, \dots, N$

$$a_j(\lambda D\rho) = \frac{-\lambda^2 u_{x_j} u_t + \lambda u_{y_j}}{(\lambda^2 u_t^2 + 1)} = \frac{-u_{x_j} u_t + \frac{u_{y_j}}{\lambda}}{(u_t^2 + \frac{1}{\lambda^2})}$$

$$b_j(\lambda D\rho) = \frac{-\lambda^2 u_{y_j} u_t - \lambda u_{x_j}}{(\lambda^2 u_t^2 + 1)} = \frac{-u_{y_j} u_t + \frac{u_{x_j}}{\lambda}}{(u_t^2 + \frac{1}{\lambda^2})}$$

Quindi, per  $\lambda \rightarrow +\infty$ , si ottiene

$$\lambda\beta(\lambda D\rho) \longrightarrow \widehat{\beta}(D\rho)$$

$$a_j(\lambda D\rho) \longrightarrow \widehat{a}_j(D\rho), \quad b_j(\lambda D\rho) \longrightarrow \widehat{b}_j(D\rho)$$

e di conseguenza

$$A(\lambda D\rho) \longrightarrow \widehat{A}(D\rho)$$

Cioè

$$K(M) \longrightarrow \widehat{K}(C) \tag{6}$$

per ogni  $p \in \partial\Omega$  ‡



### 4.3 Struttura dell'operatore di traccia

In vista di studiare un problema alle derivate parziali di assegnata pseudocurvatura media, vogliamo studiare le proprietà dell'operatore di traccia della forma di Levi.

**Definizione 4.7.** Poniamo  $n = 2N + 1$ , per qualche  $N$  positivo. Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ . Chiamiamo operatore di traccia della forma di Levi (o di pseudocurvatura media)  $K$ , l'operatore del secondo ordine che agisce su una funzione, nel seguente modo:

$$K(u) := \frac{1}{2N} \frac{u_n^2 + 1}{(|Du|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \text{tr}(A(Du) D^2u) = \text{tr}(\tilde{A}(Du) D^2u)$$

Si vede, dalla definizione, che, poichè la matrice  $A$  dipende dal gradiente della  $u$ ,  $K$  è un operatore quasilineare. Inoltre  $K$  è ellittico degenere, infatti:

**Proposizione 4.8.** Sia  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . La matrice  $A(\xi)$  è semidefinita positiva, per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . In particolare  $\det(A(\xi)) \equiv 0$  e  $\text{tr}(A(\xi)) > 0$ .

#### Dimostrazione

Sia

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & I_N \\ a & b \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(\xi) = \begin{pmatrix} cI_N - P & -Q \\ Q & cI_N - P \end{pmatrix}$$

Si ha, ricordando (4)

$$A = MBM^T$$

Sia  $\xi \in \mathbb{R}^n$  e si ponga  $M^T \xi = \eta \in \mathbb{R}^{2N}$ . Allora

$$\langle A\xi, \xi \rangle = \langle MBM^T \xi, \xi \rangle = \langle B\eta, \eta \rangle$$

Adesso, per ogni  $\eta \in \mathbb{R}^{2N}$ ,  $\eta \neq 0$  e ponendo  $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , si ha

$$\begin{aligned} \langle B\eta, \eta \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} cI_N - P & -Q \\ Q & cI_N - P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \langle (cI_N - P)\eta_1, \eta_1 \rangle - \langle Q\eta_2, \eta_1 \rangle + \langle Q\eta_1, \eta_2 \rangle + \langle (cI_N - P)\eta_2, \eta_2 \rangle = \\ &= c|\eta_1|^2 - |a\eta_1|^2 - |b\eta_1|^2 - 2\langle b\eta_2, a\eta_1 \rangle + 2\langle a\eta_2, b\eta_1 \rangle + c|\eta_2|^2 - |a\eta_2|^2 - |b\eta_2|^2 \geq \\ &\geq (1 + |a|^2 + |b|^2)|\eta|^2 - |a|^2|\eta|^2 - |b\eta|^2 = 1 \end{aligned}$$

avendo usato la definizione di  $P$  e  $Q$

$$P = a^T a + b^T b, \quad Q = a^T b - b^T a$$

Quindi  $B$  è una matrice  $2N \times 2N$  strettamente definita positiva. Poichè per  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \neq 0$ , si può avere  $M^T \xi = \eta = 0$ , allora  $A$  è soltanto semidefinita positiva, in particolare ha un autovalore identicamente nullo: quindi ha determinante nullo e traccia positiva. Un calcolo diretto mostra inoltre che

$$\text{tr}(A(Du)) = 2N + (2N - 1)(|a|^2 + |b|^2) > 0$$

e

$$\begin{aligned} \text{tr}(\tilde{A}(Du)) &= \frac{1}{2N} \frac{u_n^2 + 1}{(|Du|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} (2N + (2N - 1)(|a|^2 + |b|^2)) \geq \\ &\geq \frac{1}{(|Du|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad \# \end{aligned}$$

Dalla precedente dimostrazione si è capito che  $B(\xi)$  è una matrice simmetrica strettamente definita positiva, quindi ammette una radice: esiste cioè una matrice simmetrica  $C(\xi)$ , con la stessa regolarità di  $B$ , tale che

$$B(\xi) = C(\xi)C(\xi)^T = C(\xi)C(\xi) = C(\xi)^2$$

Una tale matrice è ad esempio

$$C(\xi) = \sqrt{c} \begin{pmatrix} I_n - \gamma P & -\gamma Q \\ -\gamma Q & I_n - \gamma P \end{pmatrix}$$

con  $\gamma = \gamma(\xi) = \frac{\sqrt{c} - 1}{\sqrt{c}(|a|^2 + |b|^2)}$  Vale quindi:

**Proposizione 4.9.** *Esiste una matrice  $\sigma(\xi)$  con la stessa regolarità di  $A$ , tale che*

$$A(\xi) = \sigma(\xi)\sigma(\xi)^T$$

**Dimostrazione**

Poichè  $A = MBM^T$ , sia  $\sigma(\xi) = M(\xi)C(\xi)$  ( $\sigma$  è  $n \times 2N$ ), con  $C(\xi)$  una radice di  $B(\xi)$ . In questo modo

$$A = MCC^T M^T = MC(MC)^T = \sigma\sigma^T \quad \#$$

**Osservazione 4.10.** *Ovviamente esiste una matrice  $\tilde{\sigma}(\xi)$ , tale che*

$$\tilde{A}(\xi) = \tilde{\sigma}(\xi)\tilde{\sigma}(\xi)^T$$

## 4.4 Soluzione viscosa

In questa sezione studiamo l'esistenza e l'unicità di soluzioni viscose dell'equazione di assegnata pseudocurvatura media (per le notazioni e i risultati principali sulla teoria delle soluzioni viscose che qui useremo, rimandiamo all'appendice finale). Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2N + 1$ ,  $N \geq 1$ , e sia  $k(x, u)$  una assegnata funzione su  $\Omega \times \mathbb{R}$ ; l'equazione è:

$$K(u)(x) = k(x, u(x)) \quad (7)$$

Per studiare la precedente equazione nel senso debole (viscoso) procederemo nel modo seguente. Si consideri  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$F(x, u, \xi, \Lambda) := -tr(\tilde{A}(\xi)\Lambda) + k(x, u) \quad (8)$$

dove  $S(n)$  denota l'insieme delle matrici simmetriche  $n \times n$ , e sia

$$F(x, u, \xi, \Lambda) = -tr(\tilde{A}(\xi)\Lambda) + k(x, u) = 0 \quad (9)$$

l'equazione associata. Se  $k : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una assegnata funzione continua, non negativa e strettamente crescente rispetto alla seconda variabile, allora  $F$  risulta continua e propria secondo la definizione (A.1) e vale il teorema del confronto (A.5), quindi si può applicare il metodo di Perron (A.6) per la risoluzione del Problema di Dirichlet (28). Se, però,  $k$  è non negativa e monotona crescente ma non strettamente,  $F$  risulta ancora continua e propria, ma non soddisfa l'ipotesi (27) del teorema del confronto (A.5): si riesce però a dimostrare che quest'ultimo vale anche in questo caso. Per fare ciò sono necessari i seguenti lemmi di cui si omette la dimostrazione (si veda [6])

**Lemma 4.11.** *Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $u$  s.s.c.,  $v$  i.s.c. da  $\Omega$  in  $\mathbb{R}$ . Si definisca*

$$M_\alpha = \sup_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \left( u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2} |x - y|^2 \right)$$

per  $\alpha > 0$ . Si supponga ora che esistano  $(x_\alpha, y_\alpha) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ , tali che:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left( M_\alpha - (u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2) \right) = 0$$

Allora valgono:

$$i) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha |x_\alpha - y_\alpha|^2 = 0$$

$$ii) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} M_\alpha = u(\hat{x}) - v(\hat{x}) = \sup_{\bar{\Omega}} (u(x) - v(x))$$

dove  $\hat{x}$  è il limite di  $x_\alpha$  per  $\alpha \rightarrow +\infty$  (o di una sua sottosuccessione).

**Lemma 4.12.** Sia  $\Sigma_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$  un insieme localmente compatto e  $u_i$  s.s.c. da  $\Sigma_i$  in  $\mathbb{R}$ , per  $i = 1, \dots, k$ . Si definiscano:

$$\Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_k$$

$$w(x) = u_1(x_1) + \dots + u_k(x_k), \quad \text{con } x = (x_1, \dots, x_k) \in \Sigma$$

$$n = n_1 + \dots + n_k$$

Si supponga che  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k)$  sia un massimo locale di  $w(x) - \varphi(x)$ , dove  $\varphi \in C^2$  in un intorno di  $\hat{x}$ . Allora, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\Lambda_i \in S(n_i)$  tale che

$$(D_{x_i} \varphi(\hat{x}), \Lambda_i) \in \bar{J}_{\Sigma_i}^{2,+} u_i(\hat{x}_i), \quad \text{per } i = 1, \dots, k$$

e la matrice diagonale a blocchi costruita con  $\Lambda_i$  soddisfa

$$-\left( \frac{1}{\varepsilon} + \|\Phi\| \right) I_n \leq \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Lambda_k \end{pmatrix} \leq \Phi + \varepsilon \Phi^2$$

dove  $\Phi = D^2 \varphi(\hat{x}) \in S(n)$  e la norma usata per  $\Phi$  è:

$$\|\Phi\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ è un autovalore di } \Phi\} = \sup\{|\langle \Phi \xi, \xi \rangle| : |\xi| \leq 1\}$$

Vale allora

**Proposizione 4.13.** *(principio del confronto per l'equazione di traccia)*

*Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  aperto limitato, e sia  $k : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una assegnata funzione continua e non negativa; crescente rispetto a  $u$ , allora vale per (9) il teorema del confronto, cioè: se  $\underline{u}$  e  $\bar{u}$  sono rispettivamente subsoluzione e supersoluzione viscosa di (9) in  $\Omega$  tali che valga  $\underline{u}(y) \leq \bar{u}(y)$  per ogni  $y \in \partial\Omega$ , allora  $\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x)$  per ogni  $x \in \bar{\Omega}$ .*

### Dimostrazione

Si considera solo il caso  $k$  crescente non strettamente. Siano  $\underline{u}$  e  $\bar{u}$  rispettivamente una subsoluzione e una supersoluzione viscosa di (9) e si definisca, per  $m \in \mathbb{N}$ ,  $u_m(x) = \underline{u}(x) + \frac{1}{m}z(x)$  dove  $z$  è data da

$$z(x) = \exp\left(a\frac{|x|^2}{2} - b\right)$$

con  $a$  e  $b$  da determinare in seguito. Si chiami ora

$$g(s) = \exp(as - b)$$

in modo che si abbia

$$Dz(x) = g'(x)$$

e

$$D^2z(x) = g''(x)x^T + g'(x)I_n$$

con  $g'$  e  $g''$  positive. Poichè

$$\text{tra}(\tilde{A}(\xi)) \geq \frac{1}{(|\xi|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

vale:

$$\psi(\xi)\text{tra}(A(\xi) D^2z) \geq \psi(\xi)g' \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} (\text{tra}(A(\xi))) = g' > 0$$

dove si è indicato con

$$\psi(\xi) = (|\xi|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

Ora se  $(\xi_1, \Lambda_1) \in \overline{J_\Omega^{2,+}} u_m(x)$ , allora

$$\left( \xi_1 - \frac{1}{m} Dz(x), \Lambda_1 - \frac{1}{m} D^2 z(x) \right) \in \overline{J_\Omega^{2,+}} (u_m(x) - \frac{1}{m} z(x)) = \overline{J_\Omega^{2,+}} \underline{u}(x)$$

Ora, visto che  $\underline{u}$  è subsoluzione, si ha:

$$\begin{aligned} 0 &\geq F(x, \underline{u}, \xi_1 - \frac{1}{m} Dz(x), \Lambda_1 - \frac{1}{m} D^2 z(x)) = \\ &= -tr(\tilde{A}(\xi_1 - \frac{1}{m} Dz(x))\Lambda_1) + \frac{1}{m} tr(\tilde{A}(\xi_1 - \frac{1}{m} Dz(x))D^2 z(x)) + k(x, \underline{u}) \geq \\ &\geq -tr(\tilde{A}(\xi_1 - \frac{1}{m} Dz(x))\Lambda_1) + \frac{g'}{\psi(\xi_1 - \frac{1}{m} Dz(x))m} + k(x, \underline{u}), \quad \forall (\xi_1, \Lambda_1) \in \overline{J_\Omega^{2,+}} u_m(x) \end{aligned}$$

D'altra parte, essendo  $v$  supersoluzione, vale:

$$0 \leq F(y, \bar{u}, \xi_2, \Lambda_2) = -tr(\tilde{A}(\xi_2)\Lambda_2) + k(x, \bar{u}), \quad \forall (\xi_2, \Lambda_2) \in \overline{J_\Omega^{2,-}} \bar{u}(y)$$

Quindi:

$$\frac{g'}{\psi(\xi_1 - \frac{1}{m} Dz(x))m} \leq tr(\tilde{A}(\xi_1 - \frac{1}{m} Dz(x))\Lambda_1) - tr(\tilde{A}(\xi_2)\Lambda_2) + k(x, \bar{u}) - k(x, \underline{u}) \quad (10)$$

per ogni  $(\xi_1, \Lambda_1) \in \overline{J_\Omega^{2,+}} u_m(x)$  e  $(\xi_2, \Lambda_2) \in \overline{J_\Omega^{2,-}} \bar{u}(y)$ , con  $\beta_2 = \beta(\xi_2)$ . Si proceda ora per assurdo e si neghi la tesi del teorema del confronto, cioè si supponga che valga  $\underline{u}(x) - \bar{u}(x) \leq 0$  per ogni  $x \in \partial\Omega$  ma

$$\overline{M} = \sup_{\overline{\Omega}} (\underline{u}(x) - \bar{u}(x)) > 0$$

cioè

$$\overline{M} = \sup_{\overline{\Omega}} (u_m(x) - \frac{1}{m} z(x) - \bar{u}(x)) > 0$$

Sarà quindi

$$M = \sup_{\overline{\Omega}} (u_m(x) - \bar{u}(x)) = u_m(\hat{x}) - \bar{u}(\hat{x}) \geq \frac{1}{m} \|z\|_\infty > 0$$

per qualche  $m$  abbastanza grande e per qualche  $\hat{x} \in \Omega$  ( $z \in L^\infty(\Omega)$  in quanto  $z$  è continua su  $\overline{\Omega}$  e  $\Omega$  è limitato). Adesso si usi il lemma (4.12) con  $\Sigma_1 =$

$\Sigma_2 = \bar{\Omega}$ ,  $\Sigma = \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ ,  $(x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ ,  $u_1(x) = u_m(x)$ ,  $u_2(y) = -\bar{u}(x)$ ,  
 $w(x, y) = u_m(x) - \bar{u}(y)$ ,  $\varphi(x, y) = \frac{\alpha}{2}|x - y|^2$ , con  $\alpha > 0$ . Sia inoltre  $(x_\alpha, y_\alpha)$   
un punto di massimo di

$$w(x, y) - \varphi(x, y) = u_m(x) - \bar{u}(y) - \frac{\alpha}{2}|x - y|^2$$

cioè

$$M_\alpha = \max_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \left( u_m(x) - \bar{u}(y) - \frac{\alpha}{2}|x - y|^2 \right) = u_m(x_\alpha) - \bar{u}(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2$$

Allora, esistono  $(\xi_1, \Lambda_1), (-\xi_2, -\Lambda_2) \in \mathbb{R}^n \times S(n)$ , con

$$\xi_1 = D_x \varphi(x_\alpha, y_\alpha) = \alpha(x_\alpha - y_\alpha), \quad -\xi_2 = D_y \varphi(x_\alpha, y_\alpha) = -\alpha(x_\alpha - y_\alpha)$$

e

$$(\xi_1, \Lambda_1) \in \bar{J}_{\bar{\Omega}}^{2,+} u_m(x_\alpha), \quad (-\xi_2, -\Lambda_2) \in \bar{J}_{\bar{\Omega}}^{2,+} (-\bar{u})(y_\alpha)$$

od anche  $(\xi_2, \Lambda_2) \in \bar{J}_{\bar{\Omega}}^{2,-} (\bar{u})(y_\alpha)$ . In più, per ogni  $\varepsilon > 0$ , vale la relazione

$$-\left( \frac{1}{\varepsilon} + \|\Phi\| \right) I_{2n} \leq \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_2 \end{pmatrix} \leq \Phi + \varepsilon \Phi^2$$

ed essendo

$$\Phi = D^2 \varphi(x_\alpha, y_\alpha) = \alpha \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}, \quad \Phi^2 = 2\alpha \Phi, \quad \|\Phi\| = 2\alpha$$

ponendo  $\varepsilon = 1/\alpha$ , si ha:

$$-3\alpha \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_2 \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

Allora

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}(\tilde{A}(\xi_1 - \frac{1}{m}Dz(x))\Lambda_1) - \operatorname{tr}(\tilde{A}(\xi_2)\Lambda_2) = \\ & = \operatorname{tr} \left( \tilde{\sigma}(\xi_1 - \frac{1}{m}Dz(x_\alpha))\Lambda_1 \tilde{\sigma}(\xi_1 - \frac{1}{m}Dz(x_\alpha))^T \right) - \operatorname{tr}(\tilde{\sigma}(\xi_2)\Lambda_2 \tilde{\sigma}(q)^T) = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \operatorname{tr} \left( \tilde{\sigma}(\xi_1 - \frac{1}{m}Dz(x_\alpha))\Lambda_1\tilde{\sigma}(\xi_1 - \frac{1}{m}Dz(x_\alpha))^T - \tilde{\sigma}(\xi_2)\Lambda_2\tilde{\sigma}(\xi_2)^T \right) \leq \text{(per la (11))} \\
&\leq 3\alpha \operatorname{tr} \left( (\tilde{\sigma}(\xi_1 - \frac{1}{m}Dz(x_\alpha)) - \tilde{\sigma}(\xi_2))(\tilde{\sigma}(\xi_1 - \frac{1}{m}Dz(x_\alpha)) - \tilde{\sigma}(\xi_2))^T \right) \leq \\
&\leq 3\alpha \operatorname{tr} \left( L_{\tilde{\sigma}}^2 |\xi_1 - \frac{1}{m}Dz(x_\alpha) - \xi_2|^2 I_n \right) = (\xi_1 = \xi_2) = \frac{3n\alpha L_{\tilde{\sigma}}^2 |Dz(x_\alpha)|^2}{m^2} = \\
&= \frac{L\alpha(g')^2|x_\alpha|^2}{m^2}
\end{aligned}$$

avendo posto  $3nL_{\tilde{\sigma}}^2 = L$ . Ora visto che in  $x_\alpha$  si ha per ipotesi  $\bar{u} < \underline{u}$ , per la monotonia di  $k$ , vale

$$k(x, \bar{u}) - k(x, \underline{u}) \leq 0$$

La (10) si può allora riscrivere:

$$\frac{g'}{\psi(\xi_1 - \frac{1}{m}Dz(x))m} \leq \frac{L\alpha(g')^2|x_\alpha|^2}{m}$$

e, tenendo conto della definizione di  $z$ :

$$\nu \leq \frac{L\alpha a g|x_\alpha|^2}{m} + \frac{km}{a} \frac{1}{g} \left( \frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1} \right)$$

così, facendo tendere  $\alpha$  ad infinito, per il lemma (4.11) e tenendo conto che  $\beta_1 \rightarrow \beta_2$ , si ha un assurdo.  $\sharp$

Si può allora applicare ora il metodo di Perron (A.6), cioè:

**Corollario 4.14.** *(del teorema di Perron)*

*Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e si consideri il seguente Problema di Dirichlet:*

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(\tilde{A}(\xi)\Lambda) = k(x, u) & \forall x \in \Omega \\ u(y) = \varphi(y) & \forall y \in \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

*con  $\varphi$  continua su  $\partial\Omega$ . Se esistono una subsoluzione viscosa  $\underline{u}$  e una supersoluzione viscosa  $\bar{u}$  per (12) tali che valga  $\underline{u} = \bar{u} = \varphi$  su  $\partial\Omega$ . Allora esiste un'unica soluzione viscosa di (12)*

A questo punto ci si domanda se esistono delle condizioni che assicurano l'esistenza di subsoluzioni e supersoluzioni viscosi. Basandosi sul metodo della costruzione di funzioni barriera, la risposta è affermativa. Vale infatti:

**Proposizione 4.15.** *Sia  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho \in C^2$  tale che  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\}$  e  $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}$ . Se vale*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} k(x, s) < K_{\partial\Omega}(x) \quad (13)$$

per ogni  $x$  in un intorno di  $\partial\Omega$  allora esistono  $\underline{u}$  e  $\bar{u}$  rispettivamente subsoluzione e supersoluzione viscosi di (12) tali che valga  $\underline{u} = \bar{u} = \varphi$  su  $\partial\Omega$ .

### Dimostrazione

Sia  $V_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : -\gamma_0 < \rho(x) < 0\}$ ,  $\gamma_0 > 0$  tale che per ogni  $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$  il cilindro  $\{\rho = -\gamma\}$  soddisfi ancora la (13). Sia  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  una successione di funzioni regolari che converge uniformemente a  $\varphi$  su  $\partial\Omega$  e sia  $\tilde{\varphi}_\varepsilon$  un'estensione regolare di  $\varphi_\varepsilon$  a tutto  $\Omega$ . Si definiscano ora  $\underline{u}_\varepsilon(x) = \tilde{\varphi}_\varepsilon(x) + \lambda\rho(x)$  e  $\bar{u}_\varepsilon(x) = \tilde{\varphi}_\varepsilon(x) - \lambda\rho(x)$ , per  $\lambda > 0$ . Ovviamente  $\underline{u}_\varepsilon = \bar{u}_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$  su  $\partial\Omega$  e  $\underline{u}_\varepsilon \leq \bar{u}_\varepsilon$  in  $\Omega$ . Ora, per ogni  $x \in V_0$ :

$$-tr(\tilde{A}(D\underline{u}_\varepsilon)D^2\underline{u}_\varepsilon) + k(x, \underline{u}_\varepsilon) = -tr(\tilde{A}(D^2\tilde{\varphi}_\varepsilon + \lambda D^2\rho)(D^2\tilde{\varphi}_\varepsilon + \lambda D^2\rho)) + k(x, \underline{u}_\varepsilon) \leq 0$$

e

$$-tr(\tilde{A}(D\bar{u}_\varepsilon)D^2\bar{u}_\varepsilon) + k(x, \bar{u}_\varepsilon) = -tr(\tilde{A}(D^2\tilde{\varphi}_\varepsilon - \lambda D^2\rho)(D^2\tilde{\varphi}_\varepsilon - \lambda D^2\rho)) + k(x, \bar{u}_\varepsilon) \geq 0$$

per  $\lambda$  abbastanza grande, in virtù di (6) e (13). Ora sia  $c > \frac{\sup_{\bar{\Omega} \times \mathbb{R}} k}{2(n-1)}$ ,

$M_1 \geq \sup_{V_0} (c|x|^2 - \underline{u}_\varepsilon)$ ,  $M_2 \geq \sup_{V_0} \bar{u}_\varepsilon$  e si definiscano

$$\underline{v}_\varepsilon = \begin{cases} \underline{u}_\varepsilon(x) & \forall x \in V_0 \\ c|x|^2 - M_1 & \forall x \in \Omega \setminus V_0 \end{cases}$$

e

$$\bar{v}_\varepsilon = \begin{cases} \bar{u}_\varepsilon(x) & \forall x \in V_0 \\ M_2 & \forall x \in \Omega \setminus V_0 \end{cases}$$

Con questa scelta,  $\underline{v}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon$  risultano rispettivamente subsoluzione (i.s.c.) e supersoluzione (s.s.c.). Esiste allora una soluzione viscosa (continua)  $u_\varepsilon$  tale che  $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$  su  $\partial\Omega$ . Adesso dal principio del confronto

$$\sup_{\Omega} |u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}| = \sup_{\partial\Omega} |u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}| = \sup_{\partial\Omega} |\varphi_\varepsilon - \varphi_{\varepsilon'}|$$

quindi, per la uniforme convergenza di  $\varphi_\varepsilon$ , anche  $u_\varepsilon$  converge uniformemente, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , all'unica soluzione viscosa di (12).  $\#$

## 4.5 Lipschitzianità della soluzione viscosa

Si vuole mostrare che la soluzione viscosa di (12) è in realtà una funzione lipschitziana e non solo continua. Per fare ciò si procederà nel seguente modo: si regolarizzerà in maniera ellittica l'equazione (9) in modo da ottenere una soluzione regolare; si dimostrerà un principio del massimo per il gradiente di questa soluzione e infine con un procedimento di passaggio al limite si arriverà alla conclusione.

Sia allora  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho \in C^{2,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  tale che  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\}$  e  $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}$ . Si ponga poi, per  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,  $\tilde{A}^\varepsilon(\xi) := \tilde{A}(\xi) + \varepsilon I_n$ , in modo tale che  $\tilde{A}^\varepsilon$  risulti definita positiva e

$$F^\varepsilon(x, u, \xi, \Lambda) := -tr(\tilde{A}^\varepsilon(\xi)\Lambda) + k(x, u)$$

sia ellittica. Si consideri ora il seguente Problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} tr(\tilde{A}^\varepsilon(\xi)\Lambda) = k(x, u) & \forall x \in \Omega \\ u(y) = \varphi(y) & \forall y \in \partial\Omega \end{cases} \quad (14)$$

con  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ . Vale:

**Proposizione 4.16.** *Sia  $k \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ . Se*

$$i) \frac{\partial k}{\partial u} \geq 0 \quad (15)$$

$$ii) k^2 - (n-1) \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial k}{\partial x_k} \right| \geq 0 \quad (16)$$

*allora (14) ammette una soluzione  $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tale che*

$$\max_{\bar{\Omega}} |Du^\varepsilon| = \max_{\partial\Omega} |Du^\varepsilon| \quad (17)$$

### Dimostrazione

La prima affermazione segue direttamente dal fatto che  $F^\varepsilon$  è ellittica e  $k \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  ([10]). Adesso siano  $\tilde{a}_{ij}^\varepsilon$  i coefficienti di  $\tilde{A}^\varepsilon$ ; l'equazione  $F^\varepsilon = 0$  si può allora scrivere

$$-\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}^\varepsilon (Du^\varepsilon) \partial_{ij} u^\varepsilon + k(x, u^\varepsilon) = 0 \quad (18)$$

Derivando la (18) rispetto a  $x_k$  e omettendo gli argomenti, si ha:

$$-\sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial \tilde{a}_{ij}^\varepsilon}{\partial u^\varepsilon} \partial_{lk} u^\varepsilon \right) \partial_{ij} u^\varepsilon - \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}^\varepsilon \partial_{ijk} u^\varepsilon + \frac{\partial k}{\partial x_k} + \frac{\partial k}{\partial u^\varepsilon} \partial_k u^\varepsilon = 0$$

adesso moltiplicando per  $\partial_k u^\varepsilon$  e sommando in  $k$

$$-\sum_{i,j,l,k=1}^n \frac{\partial \tilde{a}_{ij}^\varepsilon}{\partial u^\varepsilon} \partial_{kl} u^\varepsilon \partial_{ij} u^\varepsilon \partial_k u^\varepsilon - \sum_{i,j,k=1}^n \tilde{a}_{ij}^\varepsilon \partial_{ijk} u^\varepsilon \partial_k u^\varepsilon + \sum_{k=1}^n \frac{\partial k}{\partial x_k} \partial_k u^\varepsilon + \frac{\partial k}{\partial u^\varepsilon} |Du^\varepsilon|^2 = 0 \quad (19)$$

Se adesso si pone

$$v^\varepsilon = |Du^\varepsilon|^2 = \sum_{k=1}^n \partial_k u^\varepsilon$$

$$\partial_i v^\varepsilon = 2 \sum_{k=1}^n \partial_k u^\varepsilon \partial_{ik} u^\varepsilon$$

$$\partial_{ij} v^\varepsilon = 2 \sum_{k=1}^n (\partial_{jk} u^\varepsilon \partial_{ik} u^\varepsilon + \partial_k u^\varepsilon \partial_{ijk} u^\varepsilon)$$

e si sostituisce nella (19), si ottiene

$$-\sum_{i,j,l=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{a}_{ij}^\varepsilon}{\partial u^\varepsilon} \partial_{ij} u^\varepsilon \partial_l v^\varepsilon - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \tilde{a}_{ij}^\varepsilon \partial_{ij} v^\varepsilon + \sum_{i,j,k=1}^n \tilde{a}_{ij}^\varepsilon \partial_{ijk} u^\varepsilon \partial_{ik} u^\varepsilon + \sum_{k=1}^n \frac{\partial k}{\partial x_k} \partial_k u^\varepsilon + \frac{\partial k}{\partial u^\varepsilon} v^\varepsilon = 0 \quad (20)$$

A questo punto, per il teorema di Schwarz e per la (18), vale

$$\sum_{i,j,k=1}^n \tilde{a}_{ij}^\varepsilon \partial_{jk} u^\varepsilon \partial_{ik} u^\varepsilon \geq \frac{(\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}^\varepsilon \partial_{ij} u^\varepsilon)^2}{tr \tilde{A}^\varepsilon} \geq \frac{(1 + v^\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{(n-1)} k^2$$

quindi sostituendo nella (20)

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \tilde{a}_{ij}^\varepsilon \partial_{ij} v^\varepsilon + \sum_{i,j,l=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{a}_{ij}^\varepsilon}{\partial_l u^\varepsilon} \partial_{ij} u^\varepsilon \partial_l v^\varepsilon - \frac{\partial k}{\partial u^\varepsilon} v^\varepsilon &= \sum_{i,j,k=1}^n \tilde{a}_{ij}^\varepsilon \partial_{jk} u^\varepsilon \partial_{ik} u^\varepsilon + \sum_{k=1}^n \frac{\partial k}{\partial x_k} \partial_k u^\varepsilon \geq \\ &\geq \frac{(1+v^\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{(n-1)} k^2 - \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial k}{\partial x_k} \right| v^{\varepsilon \frac{1}{2}} \geq v^{\varepsilon \frac{1}{2}} \left( \frac{k^2}{n-1} - \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial k}{\partial x_k} \right| \right) \geq 0 \end{aligned}$$

in virtù dell'ipotesi (16). Quindi per la (15) si può applicare il principio del massimo debole classico per operatori ellittici ([10]) e si conclude che

$$\max_{\Omega} |v^\varepsilon| = \max_{\partial\Omega} |v^\varepsilon|$$

e da qui la (17).  $\#$

A questo punto si scriva

$$Du^\varepsilon = (Du^\varepsilon)^\tau + (Du^\varepsilon)^\nu$$

dove  $(Du^\varepsilon)^\tau$  e  $(Du^\varepsilon)^\nu$  indicano rispettivamente la componente del gradiente tangente e normale a  $\partial\Omega$ : visto che  $(Du^\varepsilon)^\tau = D\varphi$ , resta da stimare la componente normale, cioè la derivata normale  $\langle Du^\varepsilon, \nu \rangle = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}$ , con  $\nu$  normale esterna a  $\partial\Omega$ . Vale

**Proposizione 4.17.** *Sia  $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  soluzione di (14). Se*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} k(x, s) < K_{\partial\Omega}(x) \tag{21}$$

per ogni  $x$  in un intorno di  $\partial\Omega$  allora

$$\sup_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \right| \leq C_0 \tag{22}$$

con  $C_0$  dipendente da  $u^\varepsilon, D\varphi, D^2\varphi$ .

### Dimostrazione

Si proceda come nella dimostrazione della proposizione (4.15). Sia  $V_0 =$

$\{x \in \mathbb{R}^n : -\gamma_0 < \rho(x) < 0\}$ ,  $\gamma_0 > 0$  tale che per ogni  $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$  il cilindro  $\{\rho = -\gamma\}$  soddisfi ancora la (21). Sia  $\tilde{\varphi}$  un'estensione regolare di  $\varphi$  su  $\bar{\Omega}$  e si definiscano  $\underline{u}(x) = \tilde{\varphi}(x) + \lambda\rho(x)$  e  $\bar{u}(x) = \tilde{\varphi}(x) - \lambda\rho(x)$ , per  $\lambda > 0$ . Ovviamente  $\underline{u} = \bar{u} = \varphi_\varepsilon$  su  $\partial\Omega$  e  $\underline{u} \leq u^\varepsilon \leq \bar{u}$  su  $\{\rho = -\gamma_0\}$  per

$$\lambda > \max\left\{\frac{1}{\gamma_0}\left(\max_{\bar{\Omega}} \tilde{\varphi} + \max_{\bar{\Omega}} |u^\varepsilon|\right), \frac{1}{\gamma_0}\left(\min_{\bar{\Omega}} \tilde{\varphi} - \max_{\bar{\Omega}} |u^\varepsilon|\right)\right\}$$

Quindi  $\underline{u} \leq u^\varepsilon \leq \bar{u}$  su  $\partial V_0$ . Ora, poichè  $\Delta\rho > 0$  in un intorno di  $\partial\Omega$  ( $\rho$  è strettamente plurisubarmonica vicino a  $\partial\Omega$  perchè il cilindro  $\partial\Omega \times \mathbb{R}$  è strettamente pseudoconvesso per ipotesi), si ha

$$-tr(\tilde{A}^\varepsilon(D\underline{u})D^2\underline{u}) + k(x, \underline{u}) = -tr(\tilde{A}(D\underline{u})D^2\underline{u}) + k(x, \underline{u}) - \varepsilon(\Delta\tilde{\varphi} + \lambda\Delta\rho) \leq 0$$

e

$$-tr(\tilde{A}^\varepsilon(D\bar{u})D^2\bar{u}) + k(x, \bar{u}) = -tr(\tilde{A}(D\bar{u})D^2\bar{u}) + k(x, \bar{u}) - \varepsilon(\Delta\tilde{\varphi} - \lambda\Delta\rho) \geq 0$$

per  $\lambda$  abbastanza grande, in virtù di (6). Dal principio del confronto segue che  $\underline{u} \leq u^\varepsilon \leq \bar{u}$  su  $V_0$  e di conseguenza

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} \leq \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \leq \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}$$

su  $\partial\Omega$ .  $\#$

L'ultima cosa che resta da fare adesso è stimare  $u_\varepsilon$  su  $\bar{\Omega}$ :

**Proposizione 4.18.** *Sia  $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  soluzione di  $F^\varepsilon = 0$ , con  $k \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  allora*

$$\sup_{\bar{\Omega}} |u^\varepsilon| \leq \sup_{\partial\Omega} |u^\varepsilon| + C_1 \tag{23}$$

### Dimostrazione

Sia  $c > \frac{\sup_{\bar{\Omega} \times \mathbb{R}} k}{2(n-1)}$  e sia  $v(x) = c|x|^2$ . Risulta

$$F^\varepsilon(v) = -2ctr(\tilde{A}(Dv)I_n) + k(x, v) - 2\varepsilon n \leq -2c(n-1) + k(x, v) \leq 0$$

e

$$F^\varepsilon(-v) = 2ctr(\tilde{A}(Dv)I_n) + k(x, v) + 2\varepsilon n \geq 0$$

Quindi  $F^\varepsilon(v) \leq F^\varepsilon(u^\varepsilon)$  e

$$\sup_{\Omega} (v - u^\varepsilon) \leq \sup_{\partial\Omega} (v - u^\varepsilon)$$

cioè

$$\inf_{\Omega} (u^\varepsilon - v) \geq \inf_{\partial\Omega} (u^\varepsilon - v)$$

analogamente,  $F^\varepsilon(u^\varepsilon) \leq F^\varepsilon(-v)$  e

$$\sup_{\Omega} (u^\varepsilon + v) \leq \sup_{\partial\Omega} (u^\varepsilon + v)$$

Da questo, tenendo conto che  $v \geq 0$ , segue la tesi.  $\#$

Riassumendo: se valgono le ipotesi di (4.16) e (4.17), il problema di Dirichlet (14) ammette una soluzione  $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tale che  $\max_{\bar{\Omega}} |Du^\varepsilon| \leq C$ , con  $C$  dipendente da  $\varphi, D\varphi, D^2\varphi$ . Ora si vuole provare che per  $\varepsilon \rightarrow 0$  la successione delle  $u^\varepsilon$  tende alla soluzione viscosa del problema di Dirichlet non regolarizzato.

**Proposizione 4.19.** *Sia  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\}$  e  $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}$  con  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\rho \in C^{2,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ; e sia  $k \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ . Si consideri il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} tr(\tilde{A}(\xi)\Lambda) = k(x, u) & \forall x \in \Omega \\ u(y) = \varphi(y) & \forall y \in \partial\Omega \end{cases} \quad (24)$$

con  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ . Se valgono (15), (16) e (21), allora (24) ammette un'unica soluzione viscosa lipschitziana.

### Dimostrazione

Se valgono le ipotesi allora il problema di Dirichlet (14) ammette una soluzione  $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tale che  $\max_{\bar{\Omega}} |Du^\varepsilon| \leq C$ , con  $C$  indipendente da  $\varepsilon$ . Quindi



$\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  è una famiglia di funzioni uniformemente limitata in  $C^1(\overline{\Omega})$ : per il teorema di Ascoli-Arzelà  $u^\varepsilon$  o una sua sottosuccessione converge uniformemente ad una funzione  $u \in Lip(\overline{\Omega})$ . Sia ora  $\phi \in C^2$  e  $x_0$  un punto in cui  $u - \phi$  abbia un minimo locale stretto (che non è restrittivo). Per la uniforme convergenza di  $u^\varepsilon$  esisterà, in un intorno di  $x_0$ , una successione di punti  $x_\varepsilon$  tali che  $x_\varepsilon \rightarrow x_0$ , per  $\varepsilon \rightarrow 0$  e tali che  $u^\varepsilon - \phi$  abbia un minimo locale in  $x_\varepsilon$ . Adesso, poichè  $u^\varepsilon$  è una soluzione classica, è anche una soluzione viscosa, quindi, in particolare, una supersoluzione viscosa. Allora in  $x_\varepsilon$  vale

$$F^\varepsilon = -tr(\tilde{A}^\varepsilon(D\phi(x_\varepsilon))D^2\phi(x_\varepsilon)) + k(x_\varepsilon, u^\varepsilon(x_\varepsilon)) \geq 0$$

Ora, visto che  $\tilde{A}^\varepsilon \rightrightarrows \tilde{A}$ ,  $F^\varepsilon \rightrightarrows F$  e  $u^\varepsilon \rightrightarrows u$ , passando al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , risulta

$$F = -tr(\tilde{A}(D\phi(x_0))D^2\phi(x_0)) + k(x_0, u(x_0)) \geq 0$$

Quindi  $u$  è supersoluzione viscosa di  $F = 0$ . Allo stesso modo si prova che è subsoluzione viscosa. Per quanto riguarda il bordo, vale  $u^\varepsilon = \varphi = u$ . È così provato che  $u$  è (l'unica) soluzione viscosa lipschitziana di (24).  $\#$

## 4.6 Lipschitzianità locale

In questa sezione si vuole provare, sotto un'opportuna condizione sulla funzione  $k$ , la lipschitzianità locale delle soluzioni viscosse dell'equazione (9), indipendentemente dal dato al bordo. Per fare ciò dimostriamo alcune disuguaglianze strutturali che verifica l'operatore di pseudocurvatura media. Prima di tutto si scriva la traccia della forma di Levi usando la formula (3):

$$K(f) = \frac{1}{N} \frac{1}{|\partial_p f|^3} \sum_{1 \leq i < j \leq N+1} L_{i,j}(f)$$

dove

$$L_{i,j}(f) = -\det \begin{pmatrix} 0 & f_{\bar{i}} & f_{\bar{j}} \\ f_i & f_{\bar{i}\bar{i}} & f_{\bar{i}\bar{j}} \\ f_j & f_{\bar{j}\bar{i}} & f_{\bar{j}\bar{j}} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Si definisca

$$L(f) := \sum_{1 \leq i < j \leq N+1} L_{i,j}(f)$$

e si noti che  $L(f)$  dipende solo dalle derivate (complesse) prime e seconde della funzione definente. Inoltre per ogni  $p \in M$  l'equazione di traccia si può scrivere

$$L(f) = N |\partial_p f|^3 k(p)$$

dove  $k : M \rightarrow \mathbb{R}$  è un'assegnata funzione. Si usino ora le seguenti notazioni

$$\begin{aligned} \zeta &= (\zeta_1, \dots, \zeta_{N+1}) := (f_1, \dots, f_{N+1}) = \partial f \\ \varrho &= \left( \varrho_{j\bar{k}} \right)_{j,k=1,\dots,N+1} := \left( f_{j\bar{k}} \right)_{j,k=1,\dots,N+1} = \text{Hess}(f) \end{aligned}$$

**Proposizione 4.20.** *Sia  $N = 1$ , allora:*

$$\left| \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right|^2 = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial L}{\partial \varrho_{j\bar{k}}} f_{j\bar{l}} f_{l\bar{k}}$$

$$\text{dove } \left| \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right|^2 := \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\partial L}{\partial \zeta_j} \frac{\partial L}{\partial \bar{\zeta}_j}$$

### Dimostrazione

Se  $N = 1$  allora

$$L(f) = L_{1,2}(f) = -\det \begin{pmatrix} 0 & f_{\bar{1}} & f_{\bar{2}} \\ f_1 & f_{1\bar{1}} & f_{1\bar{2}} \\ f_2 & f_{2\bar{1}} & f_{2\bar{2}} \end{pmatrix}$$

Con un calcolo diretto

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta_1} = f_{\bar{1}} f_{2\bar{2}} - f_{\bar{2}} f_{2\bar{1}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta_2} = f_{\bar{2}} f_{1\bar{1}} - f_{\bar{1}} f_{1\bar{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_{1\bar{1}}} = f_{\bar{2}} f_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \rho_{1\bar{2}}} = -f_{\bar{1}} f_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \rho_{2\bar{1}}} = -f_{\bar{2}} f_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \rho_{2\bar{2}}} = f_{\bar{1}} f_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta_1} \frac{\partial L}{\partial \bar{\zeta}_1} = f_{\bar{2}} f_2 f_{2\bar{1}} f_{1\bar{2}} + f_{\bar{1}} f_1 f_{2\bar{2}} f_{2\bar{2}} - f_{\bar{2}} f_1 f_{2\bar{1}} f_{2\bar{2}} - f_{\bar{1}} f_2 f_{2\bar{2}} f_{1\bar{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta_2} \frac{\partial L}{\partial \bar{\zeta}_2} = f_{\bar{1}} f_1 f_{1\bar{2}} f_{2\bar{1}} + f_{\bar{2}} f_2 f_{1\bar{1}} f_{1\bar{1}} - f_{\bar{1}} f_2 f_{1\bar{2}} f_{1\bar{1}} - f_{\bar{2}} f_1 f_{1\bar{1}} f_{2\bar{1}}$$

$$\left| \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right|^2 = f_{\bar{2}} f_2 (f_{1\bar{1}} f_{1\bar{1}} + f_{1\bar{2}} f_{2\bar{1}}) - f_{\bar{1}} f_2 (f_{1\bar{1}} f_{1\bar{2}} + f_{1\bar{2}} f_{2\bar{2}}) - f_{\bar{2}} f_1 (f_{2\bar{1}} f_{1\bar{1}} + f_{2\bar{2}} f_{2\bar{1}}) +$$

$$+ f_{\bar{1}} f_1 (f_{2\bar{1}} f_{1\bar{2}} + f_{2\bar{2}} f_{2\bar{2}}) = \frac{\partial L}{\partial \rho_{1\bar{1}}} (f_{1\bar{1}} f_{1\bar{1}} + f_{1\bar{2}} f_{2\bar{1}}) + \frac{\partial L}{\partial \rho_{1\bar{2}}} (f_{1\bar{1}} f_{1\bar{2}} + f_{1\bar{2}} f_{2\bar{2}})$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial \rho_{2\bar{1}}} (f_{2\bar{1}} f_{1\bar{1}} + f_{2\bar{2}} f_{2\bar{1}}) + \frac{\partial L}{\partial \rho_{2\bar{2}}} (f_{2\bar{1}} f_{1\bar{2}} + f_{2\bar{2}} f_{2\bar{2}}) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial L}{\partial \rho_{j\bar{k}}} f_{j\bar{l}} f_{l\bar{k}} \quad \#$$

Usando questa proprietà, per  $N$  qualsiasi vale:

### Proposizione 4.21.

$$\left| \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right|^2 \leq \sum_{m,q,t=1}^{N+1} \frac{\partial L}{\partial \rho_{m\bar{q}}} f_{m\bar{t}} f_{t\bar{q}}$$

### Dimostrazione

Poichè

$$L(f) := \sum_{1 \leq i < j \leq N+1} L_{i,j}(f)$$

per  $1 \leq l \leq N+1$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta_l} = \sum_{1 \leq i < l} \frac{\partial L_{i,l}}{\partial \zeta_l} + \sum_{l < j \leq N+1} \frac{\partial L_{l,j}}{\partial \zeta_l}$$

quindi

$$\left| \frac{\partial L}{\partial \zeta_l} \right| \leq \sum_{1 \leq i < l} \left| \frac{\partial L_{i,l}}{\partial \zeta_l} \right| + \sum_{l < j \leq N+1} \left| \frac{\partial L_{l,j}}{\partial \zeta_l} \right|$$

e

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial L}{\partial \zeta_l} \right|^2 &= \sum_{l=1}^{N+1} \left| \frac{\partial L}{\partial \zeta_l} \right|^2 \leq \sum_{l=1}^{N+1} \left( \sum_{1 \leq i < l} \left| \frac{\partial L_{i,l}}{\partial \zeta_l} \right| + \sum_{l < j \leq N+1} \left| \frac{\partial L_{l,j}}{\partial \zeta_l} \right| \right)^2 \leq \\ &\leq 2 \sum_{l=1}^{N+1} \left( \sum_{1 \leq i < l} \left| \frac{\partial L_{i,l}}{\partial \zeta_l} \right|^2 + \sum_{l < j \leq N+1} \left| \frac{\partial L_{l,j}}{\partial \zeta_l} \right|^2 \right) = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{l \neq i} \left| \frac{\partial L_{i,l}}{\partial \zeta_l} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{l \neq i} \left( \left| \frac{\partial L_{i,l}}{\partial \zeta_l} \right|^2 + \left| \frac{\partial L_{i,l}}{\partial \zeta_i} \right|^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{l \neq i} \sum_{m,q,t \in \{i,l\}} \frac{\partial L_{i,l}}{\partial \varrho_{m\bar{q}}} f_{m\bar{i}} f_{t\bar{q}} = \\ &= \sum_{m,q,t=1}^{N+1} \frac{\partial L}{\partial \varrho_{m\bar{q}}} f_{m\bar{i}} f_{t\bar{q}} \quad \# \end{aligned}$$

Si vuole mostrare ora le versione reale della precedente diuguaglianza. Prima di tutto, poichè  $L(f)$  dipende solo dalle derivate (complesse) prime e seconde della funzione definente, si scriva

$$L(f) = L(\partial f, \bar{\partial} f, Hess(f)) = L(\zeta, \bar{\zeta}, \varrho)$$

Adesso, identificando come al solito

$$\begin{aligned} z &= (z_1, \dots, z_{N+1}) = (x_1 + iy_1, \dots, x_N + iy_N, t + is) \approx \\ &\approx (x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, t, s) = (x, y, t, s) \end{aligned}$$

e  $f(z) = u(x, y, t) - s$ , sia

$$F(u) = F(Du, D^2u) = F(\xi, \rho)$$

la scrittura in forma reale di  $L(f)$ , dove  $\xi = Du$  e  $\rho = D^2u$ . Vale

**Proposizione 4.22.**

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \xi} \right|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \rho_{ij}} u_{ik} u_{kj}$$

con  $n = 2N + 1$

**Dimostrazione**

Partendo da  $f(z) = u(x, y, t) - s$  si ha per  $1 \leq j \leq N$

$$\partial f_{z_j} = \frac{1}{2} (\partial u_{x_j} - i \partial u_{y_j})$$

$$\partial f_{\bar{z}_j} = \frac{1}{2} (\partial u_{x_j} + i \partial u_{y_j})$$

mentre per l'ultima componente

$$\partial f_{z_{N+1}} = \frac{1}{2} (\partial u_t + i)$$

$$\partial f_{\bar{z}_{N+1}} = \frac{1}{2} (\partial u_t - i)$$

Ora considerando l'uguaglianza

$$F(Du, D^2u) = L(\partial f, \bar{\partial} f, Hess(f))$$

e scrivendo

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_N, \xi_{1+N}, \dots, \xi_{2N}, \xi_{2N+1}) = \\ &= (\partial u_{x_1}, \dots, \partial u_{x_N}, \partial u_{y_1}, \dots, \partial u_{y_N}, \partial u_t) \end{aligned}$$

si ottiene per  $1 \leq j \leq N$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial L}{\partial \zeta_j} + \frac{\partial L}{\partial \bar{\zeta}_j} \right) = \operatorname{Re} \frac{\partial L}{\partial \zeta_j}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_{j+N}} = -\frac{i}{2} \left( \frac{\partial L}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial L}{\partial \bar{\zeta}_j} \right) = \operatorname{Im} \frac{\partial L}{\partial \zeta_j}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial L}{\partial \zeta_N} + \frac{\partial L}{\partial \bar{\zeta}_N} \right) = \operatorname{Re} \frac{\partial L}{\partial \zeta_N}$$

così

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \xi} \right|^2 = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \right)^2 = \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial L}{\partial \zeta_j} \right|^2 + \left( \operatorname{Re} \frac{\partial L}{\partial \zeta_N} \right)^2 \leq \left| \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right|^2$$

Per la proposizione precedente

$$\left| \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right|^2 \leq \sum_{m,q,t=1}^{N+1} \frac{\partial L}{\partial \varrho_{m\bar{q}}} f_{m\bar{t}} f_{t\bar{q}} = \operatorname{tr} \left( \frac{\partial L}{\partial \varrho} \operatorname{Hess}(f) \operatorname{Hess}(f) \right)$$

e

$$\operatorname{Hess}(f) = \frac{1}{4} \bar{J}^T D^2 u J$$

dove

$$J = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ iI_N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora, poichè

$$0 \leq J \bar{J}^T = \begin{pmatrix} I_N & -iI_N & 0 \\ iI_N & I_N & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq 2I_n$$

si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial L}{\partial \zeta} \right|^2 &\leq \frac{1}{16} \operatorname{tr} \left( \frac{\partial L}{\partial \varrho} \bar{J}^T D^2 u J \bar{J}^T D^2 u J \right) = \frac{1}{16} \operatorname{tr} \left( D^2 u J \frac{\partial L}{\partial \varrho} \bar{J}^T D^2 u J \bar{J}^T \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{8} \operatorname{tr} \left( D^2 u J \frac{\partial L}{\partial \varrho} \bar{J}^T D^2 u \right) \end{aligned}$$

in quanto

$$D^2 u J \frac{\partial L}{\partial \varrho} \bar{J}^T D^2 u \geq 0$$

A questo punto

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial \varrho_{l\bar{p}}} \frac{\partial Hess(f)_{l\bar{p}}}{\partial \rho_{ij}} = \frac{1}{4} \frac{\partial L}{\partial \varrho_{l\bar{p}}} \bar{J}_{li}^T J_{jp}$$

così

$$\begin{aligned} tr\left(\frac{\partial F}{\partial \rho} D^2 u D^2 u\right) &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \rho_{ij}} u_{ik} u_{kj} = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l,p=1}^n \frac{\partial L}{\partial \varrho_{l\bar{p}}} \bar{J}_{li}^T J_{jp} u_{ik} u_{kj} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l,p=1}^n u_{kj} J_{jp} \frac{\partial L}{\partial \varrho_{l\bar{p}}} \bar{J}_{li}^T u_{ik} = \frac{1}{4} tr\left(D^2 u J \frac{\partial L}{\partial \varrho} \bar{J}^T D^2 u\right) \end{aligned}$$

In conclusione

$$\left| \frac{\partial F}{\partial \xi} \right|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \rho_{ij}} u_{ik} u_{kj} \quad \#$$

Adesso, si scriva l'equazione

$$\frac{1}{2N} \frac{u_n^2 + 1}{(|Du|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} tr(A(Du) D^2 u) = k(x, u)$$

nel seguente modo

$$F(Du, D^2 u) = 2N(|Du|^2 + 1)^{\frac{3}{2}} k(x, u) \quad (26)$$

dove

$$F(Du, D^2 u) := (u_n^2 + 1) tr(A(Du) D^2 u)$$

è quella che compare nella proposizione (4.22).

**Proposizione 4.23.** *Sia  $u$  una soluzione viscosa di (26). Se  $k \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$  e  $\frac{\partial k}{\partial u} > 0$  allora  $u$  è localmente lipschitziana.*

### Dimostrazione

Sia  $u^\varepsilon$  una soluzione regolare dell'equazione (26) regolarizzata (analogamente al caso della proposizione (4.16)) e si ponga

$$w := \frac{|Du^\varepsilon|^2}{2}$$

Derivando ora l'identità

$$F^\varepsilon(Du^\varepsilon, D^2u^\varepsilon) = 2N(|Du^\varepsilon|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}k(x, u^\varepsilon)$$

rispetto alla variabile  $x_l$ , si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} u_{ijl}^\varepsilon + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \zeta_i} u_{il}^\varepsilon &= 3N(2w+1)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n 2u_i^\varepsilon u_{il}^\varepsilon k(x, u^\varepsilon) + \\ &+ 2N(2w+1)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\partial k}{\partial x_l} + \frac{\partial k}{\partial s} u_l^\varepsilon \right) \end{aligned}$$

avendo pensato  $k(\cdot, u^\varepsilon) = k(\cdot, s)$ . Adesso moltiplicando tutto per  $u_l^\varepsilon$  e sommando in  $l$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,l=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} u_{ijl}^\varepsilon u_l^\varepsilon + \sum_{i,l=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \zeta_i} u_{il}^\varepsilon u_l^\varepsilon &= 3N(2w+1)^{\frac{1}{2}} k(x, u^\varepsilon) \sum_{i,l=1}^n 2u_i^\varepsilon u_{il}^\varepsilon u_l^\varepsilon + \\ &+ 2N(2w+1)^{\frac{3}{2}} \left( 2 \frac{\partial k}{\partial s} w + \sum_{l=1}^n \frac{\partial k}{\partial x_l} u_l^\varepsilon \right) \end{aligned}$$

Considerando che:

$$\begin{aligned} w_i &= \sum_{l=1}^n u_l^\varepsilon u_{il}^\varepsilon \\ w_{ij} &= \sum_{l=1}^n (u_{ijl}^\varepsilon u_l^\varepsilon + u_l^\varepsilon u_{ijl}^\varepsilon) \end{aligned}$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} w_{ij} - \sum_{i,j,l=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} u_{il}^\varepsilon u_{ij}^\varepsilon + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \zeta_i} w_i &= 3N(2w+1)^{\frac{1}{2}} k(x, u^\varepsilon) \sum_{i,l=1}^n 2u_i^\varepsilon w_i + \\ &+ 2N(2w+1)^{\frac{3}{2}} \left( 2 \frac{\partial k}{\partial s} w + \sum_{l=1}^n \frac{\partial k}{\partial x_l} u_l^\varepsilon \right) \end{aligned}$$

Sia  $L$  l'operatore differenziale così definito

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \partial_{ij} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \zeta_i} \partial_i - 3N(2w+1)^{\frac{1}{2}} k(x, u^\varepsilon) \sum_{i,l=1}^n 2u_i^\varepsilon \partial_i$$



allora

$$L(w) = \sum_{i,j,l=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} u_{il}^\varepsilon u_{lj}^\varepsilon + 2N(2w+1)^{\frac{3}{2}} \left( 2 \frac{\partial k}{\partial s} w + \sum_{l=1}^n \frac{\partial k}{\partial x_l} u_l^\varepsilon \right)$$

Per  $x \in \Omega$  si prenda  $R > 0$  tale che  $B(x, R) \subseteq \Omega$  e si consideri la funzione test

$$\varphi = (R^2 - |x|^2)^4$$

e la si moltiplichi per  $w$

$$v = w\varphi$$

$$v_i = w_i\varphi + w\varphi_i$$

$$v_{ij} = w_{ij}\varphi + w_i\varphi_j + w_j\varphi_i + w\varphi_{ij}$$

Adesso si applichi  $L$  a  $v$ , notando che la matrice  $\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}}$  è simmetrica:

$$L(v) = L(w)\varphi + wL(\varphi) + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \varphi_j w_i$$

Si definisca ora l'operatore

$$H = L - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \frac{\varphi_j}{\varphi} \partial_i$$

in modo tale che

$$\begin{aligned} H(v) = & \varphi \left( \sum_{i,j,l=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} u_{il}^\varepsilon u_{lj}^\varepsilon + 2N(2w+1)^{\frac{3}{2}} \left( 2 \frac{\partial k}{\partial s} w + \sum_{l=1}^n \frac{\partial k}{\partial x_l} u_l^\varepsilon \right) \right) + \\ & + L(\varphi)w - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi} w \end{aligned}$$

Supponendo ora che  $v$  abbia un massimo locale in  $x$ , si avrà:

$$0 \geq H(v(x)) = \varphi \left( \sum_{i,j,l=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} u_{il}^\varepsilon u_{lj}^\varepsilon + 2N(2w+1)^{\frac{3}{2}} \left( 2 \frac{\partial k}{\partial s} w + \sum_{l=1}^n \frac{\partial k}{\partial x_l} u_l^\varepsilon \right) \right) +$$

$$+L(\varphi)w - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi} w$$

e visto che

$$L(\varphi) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \varphi_{ij} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \zeta_i} \varphi_i - 3N(2w+1)^{\frac{1}{2}} k(x, u^\varepsilon) \sum_{i,l=1}^n 2u_i^\varepsilon \varphi_i$$

allora

$$\begin{aligned} 0 &\geq \varphi \left( \sum_{i,j,l=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} u_{il}^\varepsilon u_{lj}^\varepsilon + 2N(2w+1)^{\frac{3}{2}} \left( 2 \frac{\partial k}{\partial s} w + \sum_{l=1}^n \frac{\partial k}{\partial x_l} u_l^\varepsilon \right) \right) + \\ &+ w \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \varphi_{ij} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \zeta_i} \varphi_i - 3N(2w+1)^{\frac{1}{2}} k(x, u^\varepsilon) \sum_{i,l=1}^n 2u_i^\varepsilon \varphi_i - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi} \right) \end{aligned}$$

Si chiami per comodità

$$E = \sum_{i,j,l=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} u_{il}^\varepsilon u_{lj}^\varepsilon$$

allora per la proposizione (4.22)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \zeta_i} \varphi_i \geq -|\nabla \varphi| \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \zeta_i} \right| \geq -\sqrt{2} |\nabla \varphi| \left| \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \zeta} \right| \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} |\nabla \varphi| \sqrt{E}$$

quindi

$$\begin{aligned} 0 &\geq \varphi E - \frac{1}{\sqrt{2}} |\nabla \varphi| \sqrt{E} w + \varphi \left( 2N(2w+1)^{\frac{3}{2}} \left( 2 \frac{\partial k}{\partial s} w + \sum_{l=1}^n \frac{\partial k}{\partial x_l} u_l^\varepsilon \right) \right) + \\ &+ w \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \varphi_{ij} - 3N(2w+1)^{\frac{1}{2}} k(x, u^\varepsilon) \sum_{i,l=1}^n 2u_i^\varepsilon \varphi_i - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi} \right) \geq \\ &\geq -\frac{w^2 |\nabla \varphi|^2}{8\varphi} + \varphi \left( 2N(2w+1)^{\frac{3}{2}} \left( 2 \frac{\partial k}{\partial s} w + \sum_{l=1}^n \frac{\partial k}{\partial x_l} u_l^\varepsilon \right) \right) + \\ &+ w \left( \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \varphi_{ij} - 3N(2w+1)^{\frac{1}{2}} k(x, u^\varepsilon) \sum_{i,l=1}^n 2u_i^\varepsilon \varphi_i - 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}} \frac{\varphi_i \varphi_j}{\varphi} \right) \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned}
4N\varphi(2w+1)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial k}{\partial s}w &\leq \frac{w^2|\nabla\varphi|^2}{8\varphi} - 2N\varphi(2w+1)^{\frac{3}{2}}\sum_{l=1}^n\frac{\partial k}{\partial x_l}u_l^\varepsilon + \\
+6Nw(2w+1)^{\frac{1}{2}}k(x,u^\varepsilon)\sum_{i,l=1}^nu_i^\varepsilon\varphi_i + w\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial\rho_{ij}}\left(2\frac{\varphi_i\varphi_j}{\varphi} - \varphi_{ij}\right)\right) &\leq \\
\leq \frac{w^2|\nabla\varphi|^2}{8\varphi} + 2N\varphi(2w+1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{w}M_2 + 6Nw(2w+1)^{\frac{1}{2}}M_1|\nabla\varphi|\sqrt{w} + \\
+w\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial\rho_{ij}}\left(2\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} - \varphi_{ij}\right)\right) &
\end{aligned}$$

dove  $M_1, M_2$  sono costanti che dipendono da  $k$ . Chiamando

$$\alpha := \frac{\partial k}{\partial s} > 0$$

e dividendo tutto per  $4N\sqrt{\varphi}(2w+1)^{\frac{3}{2}}\alpha\sqrt{w}$  si ha

$$\sqrt{\varphi w} \leq C_1\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^{\frac{3}{2}}} + C_2\varphi^{\frac{1}{2}} + C_3\frac{|\nabla\varphi|}{\varphi^{\frac{1}{2}}} + C_4\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial\rho_{ij}}\left(2\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^{\frac{3}{2}}} - \frac{\varphi_{ij}}{\varphi^{\frac{1}{2}}}\right)\right)$$

con  $C_1, C_2, C_3, C_4$  opportune costanti non negative. A questo punto si devono calcolare le derivate della  $\varphi$

$$\varphi = (R^2 - |x|^2)^4$$

$$\varphi_i = -8(R^2 - |x|^2)^3x_i$$

$$|\nabla\varphi| = 8(R^2 - |x|^2)^3|x|$$

$$\varphi_{ij} = 48(R^2 - |x|^2)^2x_jx_i - 8(R^2 - |x|^2)^3\delta_{ij}$$

così

$$\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^{\frac{3}{2}}} = \frac{64(R^2 - |x|^2)^6|x|^2}{(R^2 - |x|^2)^6} \leq 64R^2$$

$$\begin{aligned}\varphi^{\frac{1}{2}} &= (R^2 - |x|^2)^2 \leq R^4 \\ \frac{|\nabla\varphi|}{\varphi^{\frac{1}{2}}} &= \frac{8(R^2 - |x|^2)^3|x|}{(R^2 - |x|^2)^2} \leq 8R^3 \\ \frac{\varphi_{ij}}{\varphi^{\frac{1}{2}}} &= \frac{48(R^2 - |x|^2)^2x_jx_i - 8(R^2 - |x|^2)^3\delta_{ij}}{(R^2 - |x|^2)^2} = 48x_jx_i - 8(R^2 - |x|^2)\delta_{ij} \geq -40R^2\end{aligned}$$

Adesso ricordando che la matrice  $\frac{\partial F^\varepsilon}{\partial \rho_{ij}}$  è definita positiva, e riscalandolo le costanti, si ha

$$\sqrt{\varphi w} \leq C_1R^2 + C_2R^4 + C_3R^3 + C_4R^2 \leq C_0$$

dove  $C_0$  dipende dalle altre costanti e dal diametro di  $\Omega$ , che è limitato. Questa disuguaglianza vale in un punto  $x$  di massimo della  $v$ , ma per ogni  $x_0 \in B(x, R)$  vale  $v(x_0) \leq v(x)$  e quindi

$$\sqrt{\varphi(x_0)w(x_0)} \leq \sqrt{\varphi(x)w(x)} \leq C_0$$

cioè

$$\frac{|Du^\varepsilon(x_0)|}{\sqrt{2}} \sqrt{w(x_0)} \leq \frac{C_0}{\sqrt{\varphi(x_0)}} = \frac{C_0}{(R^2 - |x_0|^2)^2} = \frac{C_0}{(R - |x_0|)^2(R + |x_0|)^2}$$

oppure

$$|Du^\varepsilon(x_0)| \leq \frac{C}{d^2(x_0, \partial B)}$$

avendo indicato con  $d(\cdot, \partial B)$  la distanza dal bordo di  $B(x, R)$ . Mandando  $\varepsilon$  a 0,  $u^\varepsilon$  tende uniformemente ad una soluzione viscosa, localmente lipschitziana, dell'equazione non regolarizzata.  $\#$

# Appendice

## A Cenni sulle soluzioni viscosse

In questa sezione si dà la definizione di soluzione viscosa e si enunciano i principali risultati omettendo le dimostrazioni (si veda [6], [12]).

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $S(n)$  l'insieme delle matrici simmetriche reali  $n \times n$  con l'ordinamento:

$$\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \quad \text{se} \quad \langle \Lambda_1 x, x \rangle \leq \langle \Lambda_2 x, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

con  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in S(n)$ . Si consideri una funzione  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \rightarrow \mathbb{R}$ , e l'equazione associata

$$F(x, u, \xi, \Lambda) = 0$$

Ad esempio se si scegliesse  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $\xi = Du = \text{grad}(u)$ ,  $X = D^2u = \text{Hess}(u)$ , allora  $F(x, u, Du, D^2u) = 0$  rappresenterebbe un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine.

**Definizione A.1.** *Se  $F$  soddisfa la condizione*

$$F(x, r, p, \Lambda_1) \leq F(x, s, p, \Lambda_2) \quad \text{se} \quad r \leq s, \quad \text{e} \quad \Lambda_1 \geq \Lambda_2,$$

*allora  $F$  si dice propria.*

**Definizione A.2.** *Sia  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , superiormente semicontinua (s.s.c.).*

*Se, fissato  $x_0 \in \Omega$ , vale:*

$$u(x) \leq u(x_0) + \langle \xi, (x - x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle \Lambda (x - x_0), (x - x_0) \rangle + o(|x - x_0|^2)$$

per  $x \rightarrow x_0$ , si dice che la coppia  $(\xi, \Lambda)$  appartiene al sopradifferenziale del secondo ordine di  $u$  in  $x_0$ , e si scrive  $(\xi, \Lambda) \in J_{\Omega}^{2,+}u(x_0)$

Questo definisce una mappa  $J_{\Omega}^{2,+}u$  che va da  $\Omega$  ai sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n \times S(n)$ . Ovviamente  $J_{\Omega}^{2,+}u(x)$  dipende da  $\Omega$ , ma si dimostra che è lo stesso per tutti gli insiemi  $\Omega$  che hanno  $x$  come punto interno: sia  $J^{2,+}u$  questo comune valore.

Si definiscono equivalentemente per le funzioni inferiormente semicontinue (i.s.c.)  $J_{\Omega}^{2,-}u$  e  $J^{2,-}u$ ; vale  $J_{\Omega}^{2,-}u(x) = -J_{\Omega}^{2,+}(-u)(x)$ .

**Definizione A.3.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \rightarrow \mathbb{R}$ , continua e propria. Una subsoluzione viscosa di  $F = 0$  in  $\Omega$  è una funzione  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , s.s.c., tale che

$$F(x, u(x), \xi, \Lambda) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad e \quad (\xi, \Lambda) \in J_{\Omega}^{2,+}u(x)$$

Allo stesso modo, una supersoluzione viscosa di  $F = 0$  in  $\Omega$ , è una funzione  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , i.s.c., tale che

$$F(x, u(x), \xi, \Lambda) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad e \quad (\xi, \Lambda) \in J_{\Omega}^{2,+}u(x)$$

Infine, una soluzione viscosa di  $F = 0$  in  $\Omega$  è una funzione  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , continua tale che sia contemporaneamente subsoluzione e supersoluzione viscosa di  $F = 0$  in  $\Omega$ .

**Osservazione A.4.** Se  $x_0 \in \Omega$ , vale:

$$J_{\Omega}^{2,+}u(x_0) = \{(D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) : \varphi \in C^2 \quad e \quad u - \varphi \quad \text{ha un massimo locale in } x_0\}$$

( $\varphi \in C^2$  su un intorno di  $x_0$  contenuto in  $\Omega$ )

Quindi una subsoluzione viscosa di  $F = 0$  è una funzione  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , s.s.c., tale che

$$F(x, u(x), D\varphi(x), D^2\varphi(x)) \leq 0, \quad \forall \varphi \in C^2$$

e tale che  $u - \varphi$  ha un massimo locale in  $x$ .

Lo stesso vale per le supersoluzioni con le giuste modifiche dei segni.

**Teorema A.5.** *(del confronto)*

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  aperto limitato,  $F$  continua, propria e che soddisfi:

$$\begin{aligned} \exists \gamma > 0 : \gamma(r - s) &\leq F(x, r, \xi, \Lambda) - F(x, s, \xi, \Lambda) \\ \text{con } r &\geq s, \quad (x, \xi, \Lambda) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \end{aligned} \quad (27)$$

Siano ora  $\underline{u}$  e  $\bar{u}$  rispettivamente subsoluzione e supersoluzione viscosa di  $F = 0$  in  $\Omega$  tali che valga  $\underline{u}(y) \leq \bar{u}(y)$  per ogni  $y \in \partial\Omega$ .

Allora  $\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x)$  per ogni  $x \in \bar{\Omega}$ .

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $F$  continua e propria,  $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Il Problema di Dirichlet per  $F$  è:

$$\begin{cases} F(x, u, \xi, \Lambda) = 0 & \forall x \in \Omega \\ u(y) = \varphi(y) & \forall y \in \partial\Omega \end{cases} \quad (28)$$

Una subsoluzione viscosa per (28) è una funzione  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che sia subsoluzione viscosa di  $F = 0$  in  $\Omega$  e valga  $u \leq \varphi$  su  $\partial\Omega$ .

In modo analogo si definiscono le supersoluzioni e le soluzioni.

**Teorema A.6.** *(di Perron)*

Sia valido il teorema del confronto per  $F=0$ . Si supponga inoltre che esistano una subsoluzione viscosa  $\underline{u}$  e una supersoluzione viscosa  $\bar{u}$  per (28) tale che valga  $\underline{u} = \bar{u} = \varphi$  su  $\partial\Omega$ . Allora esiste un'unica soluzione viscosa di (28)

## Riferimenti bibliografici

- [1] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large*, Vestnik Leningrad Univ. Math., 11, 5-17, 1956
- [2] A.D. Alexandrov, *A characteristic property of spheres*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 58, 303-315, 1962
- [3] E. Bedford, B. Gaveau, *Hypersurfaces with bounded Levi form*, Indiana Univ. Math. J., 27, 5, 867-873, 1978
- [4] A. Bogges, *CR Manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex*, Studies in Advanced Mathematics, 1991
- [5] G. Citti, E. Lanconelli, A. Montanari, *Smoothness of Lipschitz-continuous graphs with nonvanishing Levi curvature*, Acta Math., 188, 87-128, 2002
- [6] M.G. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions, *User's guide to viscosity solution of second order partial differential equations*, Bulletin of the American mathematical society, volume 27, number 1, July 1992
- [7] J.P. D'Angelo, *Several Complex Variables and the Geometry of Real Hypersurfaces*, Studies in Advanced Mathematics, 1993
- [8] M.P. Do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, 1992
- [9] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov, *Modern geometry - methods and applications*, Springer - Verlag, 1984
- [10] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second edition, Springer-Verlag, 1983
- [11] J. Hounie, E. Lanconelli, *An Alexandrov type theorem for Reinhardt domains of  $\mathbb{C}^2$* , Contemporary Math, to appear.



- [12] H. Ishii, P.L. Lions, *Viscosity solution of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*, Journal of differential equations 83, 26-78, 1990
- [13] D. Jerison, J.M. Lee, *The Yamabe problem on CR manifolds*, J. Diff. Geometry, 25,167-197, 1987
- [14] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Wiley, 1969
- [15] S. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, Wiley, New York, 1982
- [16] J.M. Lee, *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, Springer, 1997
- [17] V. Martino, A. Montanari, *Graphs with prescribed the trace of the Levi Form*, Preprint ams acta
- [18] V. Martino, A. Montanari, *Local Lipschitz Continuity of Graphs with prescribed Levi mean curvature*, Preprint
- [19] A. Montanari, E. Lanconelli, *Pseudoconvex fully nonlinear partial differential operators: strong comparison theorems*, Journal of differential equations, 202, 306-331, 2004
- [20] R.C. Relly, *Mean curvature, the Laplacian, and Soap Bubbles*, Amer. Math. Monthly 89, no. 3, 180-188, 197-198, 1982
- [21] R.C. Relly, *On the hessian of a function and the curvatures of its graph*, Michigan Math. J., 20, 373-383, 1973
- [22] B. Segre, *Famiglie di superficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un numero qualunque di dimensioni* , Atti Accad. Naz. Lincei Rend. VI Ser., 23, 203-207, 1938

- [23] J. Serrin, *A symmetry problem in potential Theory*, Arch. Rational Mech. Anal., 43, 304-318, 1971
- [24] Z. Slodkowski, G. Tomassini, *Weak solutions for the Levi equation and Envelope of holomorphy*, J. Funct. Anal., 101, 4, 392-407, 1991
- [25] Z. Slodkowski, G. Tomassini, *The Levi equation in higher dimension and relationships to the envelope of holomorphy*, Amer. J. Math., 116, 479-499, 1994
- [26] N. Tanaka, *A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds*, Kinokuniya Book Store Co., Ltd., Kyoto, 1975
- [27] G. Tomassini, *Geometric properties of solutions of the Levi equation*, Ann. Mat. Pura Appl., 4, 152, 331-344, 1988
- [28] S.M. Webster, *Pseudohermitian structures on a real hypersurfaces*, J. Diff. Geometry, 13, 25-41, 1978