Università degli Studi di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Il Problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace

Tesi di Laurea
in
Metodi matematici e statistici

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Presentata da:
Vittorio Martino

I Sessione
Anno Accademico 2000-2001

Indice

1 - Introduzione

Oggi con "Problema di Dirichlet" si indica un problema differenziale alle derivate parziali, in cui, dati un dominio Ω in $\mathbb{R}^N$, un operatore differenziale L alle derivate parziali del secondo ordine, e due funzioni, f e φ, la prima definita in Ω e la seconda sul bordo di Ω ($\partial\Omega$), si cerca una funzione u (di classe opportuna), tale che (formalmente)

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{in} \quad \Omega \\ \\ u = \varphi, & \text{su} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Quando, in particolare, come operatore differenziale si considera il Laplaciano, cioè la somma delle derivate parziali seconde pure (fatte due volte rispetto alla stessa variabile), il problema suddetto si chiama anche "Problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace" o , per ragioni storiche, "Problema classico di Dirichlet".
Qui viene presentato, appunto, il Problema classico di Dirichlet e viene trattato con i metodi della Teoria del Potenziale.

Le origini di questa teoria sono di natura fisica e possono essere datate intorno alla prima metà del diciannovesimo secolo. Iniziava infatti nel 1831 il sodalizio scientifico fra Carl Friedrich Gauss e Halle Wilhelm Weber, che insieme intrapresero lo studio matematico dei fenomeni magnetici: anche se quest'ultimo non era un campo nuovo di ricerche (già nel 1600 Gilbert pubblicava il De Magnete e numerose osservazioni erano state fatte in seguito, nel corso del Seicento e del Settecento), attorno al 1830 non c'era ancora una chiara comprensione delle relazioni legate al campo magnetico. Il grande contributo di Gauss fu proprio la trattazione rigorosa, che portò alla luce i profondi legami tra la forza newtoniana di attrazione universale e quella agente tra "particelle" elettriche e magnetiche. Le "proposizioni generali" che aveva in vista Gauss erano quelle fondamentali proprio della "Teoria del Potenziale", la teoria che avrebbe consentito di trattare in maniera matematicamente unitaria le teorie della gravitazione, dell'elettricità e del magnetismo. Precedentemente, nel 1773, J. Lagrange scoprì che la forza gravitazionale derivava da una "funzione potenziale" (poi chiamata semplicemente potenziale) e nel 1782 Laplace mostrò che la funzione potenziale verificava l'equazione che oggi porta il suo nome. Nel 1813 Simon-Denis Poisson dimostrò, però, che la funzione potenziale verificava l'equazione di Laplace, $\Delta u = 0$, solo esternamente ai corpi, in regioni non occupate dalla materia, mentre "se il punto attratto è parte della massa del corpo" la funzione potenziale u soddisfaceva l'equazione ("di Poisson") $\Delta u = -4\pi\rho$, dove ρ denota la densità del corpo. A questo punto Gauss si accorse che anche la forza elettrica derivava da una funzione potenziale con le stesse caratteristiche di quella legata alla gravitazione. Sviluppò così la teoria matematica dell'equazione di Laplace e studiò (usando metodi variazionali) il comportamento della funzione potenziale in diversi casi concreti, tra cui quello di una distribuzione di cariche elettriche su una superficie chiusa S, in modo che il corrispondente potenziale avesse un valore costante su S. Lo stesso argomento dimostrativo adottato da Gauss era già stato d'altra parte usato dal matematico inglese George Green in un lavoro del 1833, per determinare il potenziale gravitazionale di un ellissoide con densità variabile. Lo stesso Green aveva pubblicato nel 1828 un opuscolo che all'epoca passò inosservato, ma che fu poi riscoperto da William Thomson (Lord Kelvin): nel suo Essay, Green partì dall'equazione di Laplace e ottenne poi quella di Poisson; dimostrò il fatto sperimentalmente noto da tempo che in condizioni di equilibrio in un sistema di corpi perfettamente conduttori le cariche elettriche si distribuiscono sulla superficie dei corpi e in questo contesto enunciò e dimostrò la celebre "formula di Green". I metodi variazionali introdotti da Gauss ebbero un'importanza enorme per gli sviluppi della Teoria del Potenziale, ricondotta ad essere un ramo particolarmente significativo del più generale calcolo delle variazioni. Alle idee di Gauss si ispirò il tedesco Peter Gustav Lejeune Dirichlet nei corsi sulla teoria del potenziale che tenne a Gottingen dove venne chiamato alla morte di Gauss nel 1855. Dirichlet prese le mosse dalla legge newtoniana di gravitazione per introdurre poi il concetto di potenziale e le sue proprietà, le applicazioni al problema dell'attrazione degli ellissoidi e alla teoria dell'elettricità e del magnetismo terrestre. Affrontò poi, analogamente a Gauss, il problema di dimostrare che "esiste sempre una distribuzione di particelle su una superficie chiusa tale che il potenziale in ogni punto della superficie assume un valore prefissato". Egli tradusse esplicitamente la questione fisica in termini matematici: si trattava allora di provare che "c'è sempre una e una sola funzione u di x, y, z definita in un dominio chiuso arbitrario, continua assieme alle sue derivate di primo e secondo ordine, che internamente al dominio soddisfi l'equazione di Laplace (in generale quella di Poisson) e che assuma in ogni punto della superficie un valore dato". La via seguita per risolvere il "Problema di Dirichlet" fu analoga a quella suggerita da Gauss: "il compito di trovare quella funzione u non risolubile", osservava Dirichlet, si poteva "solo parlare di una dimostrazione di esistenza. Quest'ultima non presenta alcuna difficoltà". Infatti, dopo che S. Earnshaw nel 1839 provò il "principio del minimo", fu piuttosto facile per Dirichlet dimostrare l'esistenza e l'unicità della funzione potenziale. Questo procedimento dimostrativo, che ancora oggi è noto con il nome di "principio di Dirichlet" (attribuitogli da Bernhard Riemann), fu all'epoca largamente adottato nelle dimostrazioni di esistenza nella teoria dell'equazione di Laplace e nei campi ad essa intimamente collegati. Allo stesso principio ricorse Lord Kelvin nei suoi primi lavori, in cui dimostrava l'esistenza di una soluzione per l'equazione di Laplace, applicata a problemi di idrodinamica. Sempre quel "principio" svolse un ruolo essenziale nella teoria delle funzioni di variabile complessa, che in quegli stessi anni andava elaborando Riemann. Un altro importante contributo alla Teoria del Potenziale venne da A. Harnack, con la dimostrazione della disuguaglianza che oggi porta il suo nome, dalla quale dedusse la proprietà di convergenza delle successioni monotone (di funzioni potenziali). Alla fine del diciannovesimo secolo erano quindi noti i principi fondamentali della Teoria del Potenziale. Gradualmente, ci si accorse, tuttavia, che le proprietà emerse dallo studio dell'equazione di Laplace erano proprie anche di altre equazioni alle derivate parziali come quella del calore e, più in generale, delle equazioni del secondo ordine lineari, ellittiche o paraboliche. D'altro canto, si riuscì a dimostrare gran parte dei risultati della Teoria del Potenziale basandosi esclusivamente sullo studio del Problema di Dirichlet con operatori (opportuni) alle derivate parziali, sul principio del minimo e sulla disuguaglianza di Harnack. Fu quindi sviluppato, intorno agli anni cinquanta, un sistema assiomatico (da G. Tautz, J.L. Doob, M. Brelot e H. Bauer), che estese la Teoria del Potenziale allo studio di tutte le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine lineari, ellittiche o paraboliche. Questa costruzione ebbe inoltre il vantaggio di essere più elegante e più generale della iniziale Teoria del Potenziale introdotta da Gauss.

Per quanto riguarda la trattazione qui proposta, il modo di procedere adottato è il seguente.
Si è introdotta l'equazione di Laplace in $\mathbb{R}^N$

$$\Delta u = 0$$

con u di classe C^2, definita su Ω, aperto di $\mathbb{R}^N$, ed è stato studiato l'insieme delle funzioni soluzioni dell'equazione (armoniche), passando attraverso la "soluzione fondamentale" (la distribuzione Γ), la formula di Green, le formule di media (teorema di Gauss). (sezioni 2,3,4)
È stata poi dimostrata la disuguaglianza di Harnack, e la conseguente notevole proprietà di convergenza delle successioni di funzioni armoniche. Sono state trovate, inoltre, altre caratterizzazioni delle funzioni armoniche, come la proprietà di media, la regolarità C^∞ e l'analiticità. (sezioni 5,6,7)
Si è poi provato il lemma di Caccioppoli-Weyl (sezione 8), ed è stato "allargato" l'insieme delle funzioni armoniche a quello delle funzioni superarmoniche (sezione 9).
A questo punto, facendo uso della funzione di Green e del nucleo di Poisson, è stato risolto il Problema di Dirichlet (omogeneo) per gli aperti sferici B di $\mathbb{R}^N$, cioè

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in} \quad B \\ \\ u = \varphi, & \text{su} \quad \partial B \end{cases}$$

essendo φ una funzione definita sul bordo di B. (sezione 10)
Poi, utilizzando Il metodo di Perron per la risolubilità del problema di Dirichlet (per gli aperti limitati di $\mathbb{R}^N$) e le funzioni barriera, sono stati studiati due criteri , il primo della palla tangente esternamente e il secondo di cono, per dare delle condizioni sufficienti per la risolubilità del Problema. (sezione 11)
Infine, con l'introduzione dei potenziali newtoniani, è stato risolto il Problema (classico) di Dirichlet (non omogeneo) per gli aperti sferici B di $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{in} \quad B \\ \\ u = \varphi, & \text{su} \quad \partial B \end{cases}$$

con f definita su B. (sezione 12)

2 - L'operatore di Laplace

Definizione 2.1
Sia Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^N$ *e* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *,si dice Laplaciano di* u *:*

$$\Delta u(x) = \sum_{k=1}^{N} \partial_k^2 u(x) = \operatorname{div}(\nabla u(x)),$$

dove $\partial_k^2 u(x) = \dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2}$ *.*

Se $\Delta u(x) = 0$ *per ogni* $x \in \Omega$ *, si dice che* u *è armonica in* Ω *.*

Osservazione 2.2
Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *e se* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *è olomorfa in* Ω *, allora* $u = \operatorname{Re}(f)$ *e* $v = \operatorname{Im}(f)$ *sono armoniche in* Ω*.*
Infatti $u, v \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ *e per l'equazione di Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}(u + iv) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Da qui usando un teorema di Schwarz:

$$\partial_x^2 u = \partial_{xy}^2 v = \partial_{yx}^2 v = -\partial_y^2 u \Longrightarrow \Delta u = 0$$
$$\partial_x^2 v = -\partial_{xy}^2 u = -\partial_{yx}^2 u = -\partial_y^2 v \Longrightarrow \Delta v = 0$$

Osservazione 2.3
Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *è semplicemente connesso e se* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *è armonica in* Ω*, allora esiste* $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *armonica in* Ω*, tale che posto* $f = u + iv$*, risulta* f *olomorfa in* Ω*.*
Infatti la forma differenziale

$$-\partial_y u dx + \partial_x u dy \tag{1}$$

è chiusa in Ω, in quanto $\partial_y(-\partial_y u) = \partial_x(\partial_x u)$.
Quindi (1) è anche esatta. Esiste allora $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tale che

$$\partial_x v = -\partial_y u$$

$$\partial_y v = \partial_x u \tag{2}$$

Di qui segue che $v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ e

$$\partial_x^2 v = -\partial_{xy}^2 u = -\partial_{yx}^2 u = -\partial_y^2 v$$

quindi $\Delta v = 0$ in Ω.
Posto poi $f = u + iv$ risulta f differenziabile in senso reale in Ω.
Inoltre per (2) f verifica le condizioni di Cauchy-Riemann, così ne viene che f è olomorfa in Ω.

Definizione 2.4
Data una funzione u armonica in Ω, Ω aperto di $\mathbb{R}^2$, si chiama coniugata armonica di u, ogni funzione v armonica in Ω tale che $f = u + iv$ è olomorfa in Ω.

Osservazione 2.5
Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ e sia u armonica in Ω. Sia poi v una coniugata armonica di u. Allora ogni altra coniugata armonica di u è del tipo v+c, con $c \in \mathbb{R}$.
Infatti, sia w un'altra coniugata armonica di u. Allora sia $f = u + iv$, sia $g = u + iw$ sono armoniche in Ω. Risulta:

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \partial_x u = \partial_y w \\ \partial_y u = -\partial_x w \end{cases}$$

Ciò implica che $\partial_x(v - w) = \partial_y(v - w) = 0$, *quindi*

$$d(v - w) = 0 \quad in \quad \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad v - w = c$$

3 - Soluzione fondamentale per Δ in $\mathbb{R}^N$

Sia $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ e sia $u(x) = \varphi(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Per $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vale:

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_j} = \frac{x_j}{|x|}, \quad j = 1, ..., N$$

Allora:

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 \varphi(|x|)}{\partial x_j^2}$$

ma

$$\frac{\partial^2 \varphi(|x|)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi(|x|)}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi^{'}(|x|) \frac{x_j}{|x|} \right) =$$

$$= \varphi^{''}(|x|) \frac{x_j^2}{|x|^2} + \varphi^{'}(|x|) \frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3}$$

Così, posto $|x| = r$, risulta:

$$\Delta u(x) = \varphi^{''}(r) + \varphi^{'}(r) \frac{N-1}{r} = r^{1-N} \frac{d}{dr} (r^{N-1} \varphi^{'}(r))$$

Quindi u è armonica $\Longleftrightarrow r^{N-1}\varphi^{'}(r) =$costante.
Questo significa

$$\varphi(r) = \frac{c_0}{r^{N-2}} + c_1 \qquad \text{se} \qquad N \geq 3$$

$$\varphi(r) = c_0 \log r + c_1 \qquad \text{se} \qquad N = 2$$

con $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

Definizione 3.1
Una distribuzione $\Gamma \in D^1(\mathbb{R}^N)$ si dice soluzione fondamentale per Δ in $\mathbb{R}^N$ se risulta:

$$\Delta \Gamma = -\delta$$

Osservazione 3.2
Se Γ *è una soluzione fondamentale di* Δ *in* $\mathbb{R}^N$*, allora* $\Gamma + u$ *è ancora una soluzione fondamentale di* Δ *in* $\mathbb{R}^N$*, per ogni funzione armonica* u *in* $\mathbb{R}^N$*.*
Inoltre, nota una soluzione fondamentale di Δ *in* $\mathbb{R}^N$*, tutte le altre si ottengono da questa aggiungendo ad essa una funzione armonica in* $\mathbb{R}^N$*.*

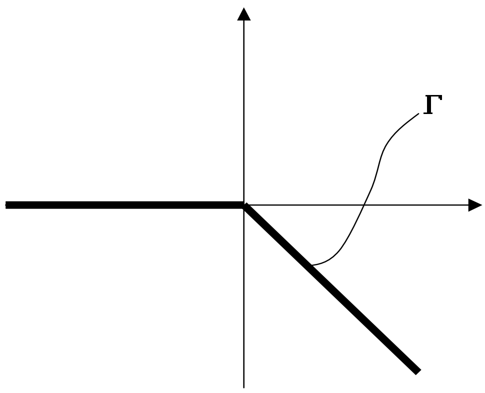
Osservazione 3.3
Sia $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, con*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se} \quad x > 0 \\ 0 & \textit{se} \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad \textit{(funzione di Heaviside)}$$

allora $\theta'(x) = \delta$*, nel senso delle distribuzioni.*
D'altra parte $(\max\{0, x\})' = \theta(x)$*, quindi*

$$\Gamma(x) = -\max\{0, x\}$$

è una soluzione fondamentale di Δ *in* $\mathbb{R}$*.*



Proposizione 3.4
La distribuzione

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log |x| & \textit{se} \quad N = 2 \\[2ex] \dfrac{1}{N(N-2)\omega_N} |x|^{2-N} & \textit{se} \quad N \geq 3 \end{cases}$$

(dove $\omega_N = \text{mis}\{x \in \mathbb{R}^N / \quad |x| \leq 1\}$*),*
è una soluzione fondamentale di Δ *in* $\mathbb{R}^N$*.*

Dimostrazione
Innanzitutto $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e quindi $\Gamma \in D^1(\mathbb{R}^N)$. Si ha poi, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$< \Delta\Gamma, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^N} \Delta\Gamma(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial^2\Gamma(x)}{\partial x_1^2}\varphi(x) + \frac{\partial^2\Gamma(x)}{\partial x_2^2}\varphi(x) + ... + \frac{\partial^2\Gamma(x)}{\partial x_N^2}\varphi(x) \right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2\Gamma(x)}{\partial x_i^2}\varphi(x)dx$$

ma per ogni i=1,...,N

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2\Gamma(x)}{\partial x_i^2}\varphi(x)dx_i = \left[\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_i}\varphi(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx_i$$

ma $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ pertanto $\left[\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_i}\varphi(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$, ora

$$- \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}dx_i = - \left[\Gamma(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i^2}dx_i$$

e visto che $\mathrm{supp}(\varphi'(x)) \subseteq \mathrm{supp}(\varphi(x))$, $\left[\Gamma(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$, allora

$$< \Delta\Gamma, \varphi >=< \Gamma, \Delta\varphi > .$$

Adesso:

$$\mathrm{div}(\Gamma(x)\nabla\varphi(x)) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} + \Gamma(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i^2} \right) =$$

$$=< \nabla\Gamma(x), \nabla\varphi(x) > +\Gamma(x)\Delta\varphi(x)$$

Allora, se $B(0, \varepsilon)$ è un disco di centro l'origine e raggio ε:

$$< \Gamma, \Delta\varphi >= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x)\Delta\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{|x|\geq\varepsilon} \Gamma(x)\Delta\varphi(x)dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|\geq\varepsilon} \operatorname{div}(\Gamma(x)\nabla\varphi(x))dx - \int_{|x|\geq\varepsilon} < \nabla\Gamma(x), \nabla\varphi(x) > dx\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c}\text{per il teorema}\\ \text{della divergenza}\end{array}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{|x|=\varepsilon} \Gamma(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu}d\sigma(x) - \int_{|x|\geq\varepsilon} < \nabla\Gamma(x), \nabla\varphi(x) > dx\right)$$

con ν versore normale esterno a $B(0,\varepsilon)$.

✓**Nota**

Essendo $\operatorname{div}(x) = N$, si ha:

$\omega_N = \int_{|x|\leq 1} \frac{\operatorname{div}(x)}{N}dx = \frac{1}{N}\int_{|x|=1} < x, \frac{x}{|x|} > d\sigma(x) = \frac{1}{N}\int_{|x|=1} d\sigma(x)$

$\Longrightarrow \int_{|x|=1} d\sigma(x) = N\omega_N \qquad \text{e} \qquad \int_{|x|=\varepsilon} d\sigma(x) = \varepsilon^{N-1}N\omega_N$ ✓

Così:

$$\left|\int_{|x|=\varepsilon} \Gamma(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu}d\sigma(x)\right| = \Gamma(\varepsilon)\sup_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi(x)|\int_{|x|=\varepsilon} d\sigma(x) =$$

$$= \varepsilon^{N-1}N\omega_N\Gamma(\varepsilon)\sup_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi(x)| \longrightarrow 0 \qquad \text{per} \qquad \varepsilon\to 0.$$

Ora, utilizzando sempre il teorema della divergenza:

$$< \Gamma, \Delta\varphi >= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} < \nabla\Gamma(x), \nabla\varphi(x) > dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|\geq\varepsilon} \operatorname{div}(\Gamma(x)\nabla\varphi(x))dx - \int_{|x|\geq\varepsilon} \Gamma(x)\Delta\varphi(x)dx\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial\nu}d\sigma(x) - \int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x)\Delta\Gamma(x)dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial\nu}d\sigma(x)$$

in quanto $\Delta\Gamma = 0$ in $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$.

Ora:

$$\int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x)\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial\nu}d\sigma(x) = \varphi(0)\int_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial\nu}d\sigma(x) + \int_{|x|=\varepsilon} (\varphi(x)-\varphi(0))\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial\nu}d\sigma(x)$$

e poichè:

$$\frac{\partial\Gamma(x)}{\partial\nu} =< \nabla\Gamma(x), \frac{x}{|x|} >= \Gamma^{'}(|x|)$$

si ha

$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial\nu} d\sigma(x) = \Gamma^{'}(\varepsilon)\int_{|x|=\varepsilon} d\sigma(x) = \Gamma^{'}(\varepsilon) N\omega_N \varepsilon^{N-1} = -1$$

e

$$\left| \int_{|x|=\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) \frac{\partial\Gamma(x)}{\partial\nu} d\sigma(x) \right| \leq \sup_{|x|\leq\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| \longrightarrow 0$$

per $\varepsilon \to 0$. In definitiva :

$$< \Delta\Gamma, \varphi >= -\varphi(0) = - < \delta, \varphi > \qquad , \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \qquad \sharp$$

4 - Formula di Green. Formule di media

Sia Ω_0 un aperto di $\mathbb{R}^N$ e siano $u, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Poichè risulta :

$$v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x) = v(x)\mathrm{div}(\nabla u(x)) - u(x)\mathrm{div}(\nabla v(x)) =$$

$$= \mathrm{div}(v(x)\nabla u(x) - u(x)\nabla v(x))$$

per ogni aperto regolare $\Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq \Omega_0$, si ha :

$$\int_\Omega (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x))dx = \int_{\partial\Omega} \left(v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} \right) d\sigma(x)$$

con ν versore normale esterno a Ω . Questa è la formula di Green per Δ .
Ponendo in particolare $v \equiv 1$, si ottiene:

$$\int_\Omega \Delta u(x)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} d\sigma(x)$$

cioè, il flusso del gradiente di u attraverso $\partial\Omega$ è l'integrale su Ω di Δu.
Sia ora $x_0 \in \Omega_0$ e $r > 0$ un numero reale tale che $\overline{B(x_0, r)} \in \Omega_0$. Fissato poi $0 < \varepsilon < r$, siano

$$\Omega_\varepsilon = B(x_0, r) \setminus B(x_0, \varepsilon)$$

$$v(x) = \Gamma(x - x_0)$$

e $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Si ottiene allora: $(\Delta v(x) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\varepsilon)$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v(x)\Delta u(x)dx =$$

$$= \int_{\partial B(x_0,r)} \left(v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} \right) d\sigma(x) - \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} \left(v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} - u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} \right) d\sigma(x)$$

Ora poichè $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, si ha:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} v(x)\Delta u(x)dx \right) = \int_{B(x_0,r)} \Gamma(x - x_0)\Delta u(x)dx$$

D'altra parte :

$$\int_{\partial B(x_0,r)} v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}d\sigma(x) = \Gamma(r)\int_{\partial B(x_0,r)} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}d\sigma(x) = \Gamma(r)\int_{B(x_0,r)} \Delta u(x)dx$$

Analogamente :

$$\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}d\sigma(x) = \Gamma(\varepsilon)\int_{B(x_0,\varepsilon)} \Delta u(x)dx = \Gamma(\varepsilon)O(\varepsilon^N) \longrightarrow 0$$

per $\varepsilon \to 0$.
Inoltre :

$$\int_{\partial B(x_0,r)} u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}d\sigma(x) = \Gamma^{'}(r)\int_{\partial B(x_0,r)} u(x)d\sigma(x) = -\fint_{\partial B(x_0,r)} u(x)d\sigma(x)$$

e ancora :

$$\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}d\sigma(x) = -\fint_{\partial B(x_0,\varepsilon)} u(x)d\sigma(x) =$$

$$= -u(x_0) + \fint_{\partial B(x_0,\varepsilon)} (u(x) - u(x_0))d\sigma(x) \longrightarrow -u(x_0)$$

per $\varepsilon \to 0$.

✓**Nota**
Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$\fint_{\Omega} u(x)dx = \frac{1}{\text{mis}\{\Omega\}}\int_{\Omega} u(x)dx \qquad \checkmark$$

In definitiva :

$$\int_{B(x_0,r)} v(x)\Delta u(x)dx = \Gamma(r)\int_{B(x_0,r)} \Delta u(x)dx + \fint_{\partial B(x_0,r)} u(x)d\sigma(x) - u(x_0)$$

od anche :

$$u(x_0) = \fint_{\partial B(x_0,r)} u(x)d\sigma(x) - \int_{B(x_0,r)} (\Gamma(x - x_0) - \Gamma(r))\Delta u(x)dx$$

Ora moltiplicando ambo i membri di quest'ultima identità per r^{N-1} e integrando su $[0, R]$, si ottiene:

$$\int_0^R r^{N-1}u(x_0)dr = \int_0^R r^{N-1}\left(\frac{r^{1-N}}{N\omega_N}\int_{|x|=r} u(x)d\sigma(x)\right)dr+$$

$$-\int_0^R r^{N-1}\left(\int_{B(x_0,r)}(\Gamma(x-x_0)-\Gamma(r))\Delta u(x)dx\right)dr$$

cioè :

$$\frac{R^N}{N}u(x_0) = \frac{1}{N\omega_N}\int_0^R\left(\int_{|x|=r} u(x)d\sigma(x)\right)dr+$$

$$-\int_0^R r^{N-1}\left(\int_{|x-x_0|\leq r}(\Gamma(x-x_0)-\Gamma(r))\Delta u(x)dx\right)dr$$

quindi

$$u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u(x)dx - \frac{N}{R^N}\int_0^R r^{N-1}\left(\int_{|x-x_0|\leq r}(\Gamma(x-x_0)-\Gamma(r))\Delta u(x)dx\right)dr$$

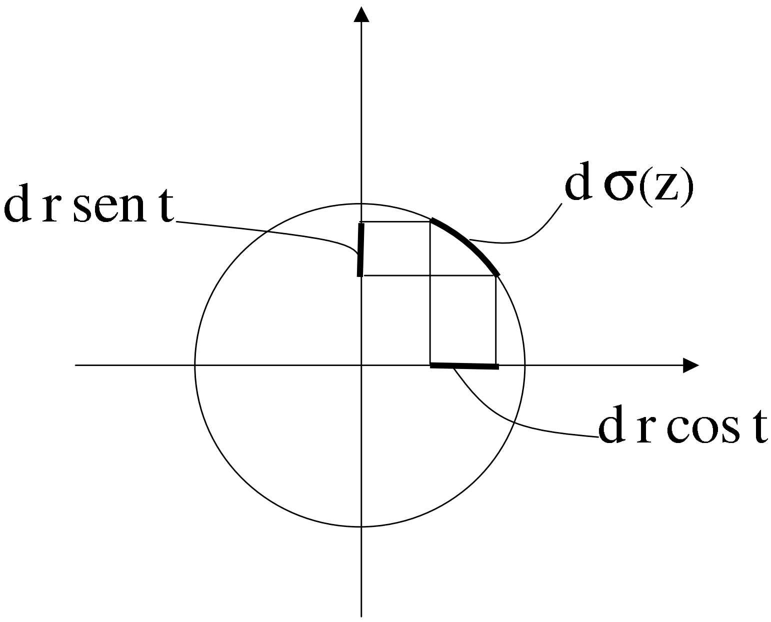
In particolare, se u è armonica in Ω_0, si ottengono le formule di media:

$$\begin{array}{l} \text{Teorema} \\ \text{di Gauss} \end{array}\begin{cases} u(x_0) = \fint_{\partial B(x_0,r)} u(x)d\sigma(x) & \text{media sferica} \\ \\ u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u(x)dx & \text{media di volume} \end{cases}$$

Osservazione 4.1
Sia $\Omega_0 \subseteq \mathbb{C}$ e $f : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, f olomorfa. Siano poi $z_0 \in \Omega_0$ e $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tali che $\overline{B(z_0, r)} \subseteq \Omega_0$. Allora la formula di media sferica si può dedurre dalla formula di Cauchy per f, infatti:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{z_0+re^{it}-z_0}d(z_0+re^{it}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{re^{it}}ire^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)dt$$



essendo ora

$$(d\sigma(z))^2 = (dr\cos t)^2 + (dr\cos t)^2 = r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)(dt)^2 = r^2(dt)^2$$

si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(z) r dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B(z_0,r)} f(z) d\sigma(z) = \fint_{\partial B(z_0,r)} f(z) d\sigma(z)$$

5 - Disuguaglianza di Harnack

Definizione 5.1
Per ogni aperto Ω *di* $\mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{H}(\Omega)$$

è l'insieme delle funzione di classe $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ *e armoniche in* Ω *.*

Teorema 5.2
Disuguaglianza di Harnack
Sia $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ *,* $u \geq 0$ *. Siano poi* $x_0 \in \Omega$ *e* $r \in \mathbb{R}$*,* $r > 0$*, tali che* $\overline{B(x_0, 4r)} \subseteq \Omega$*. Allora :*

$$\sup_{B(x_0,r)} u(x) \leq c \inf_{B(x_0,r)} u(x)$$

dove $c = 3^N$ *.*
(si noti che c *è indipendente sia da* u *sia da* r*)*

Dimostrazione
Siano $x, y \in B(x_0, r)$, allora per la formula di media (di volume):

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(z)dz = \frac{1}{r^N \omega_N} \int_{B(x,r)} u(z)dz$$

Ora:

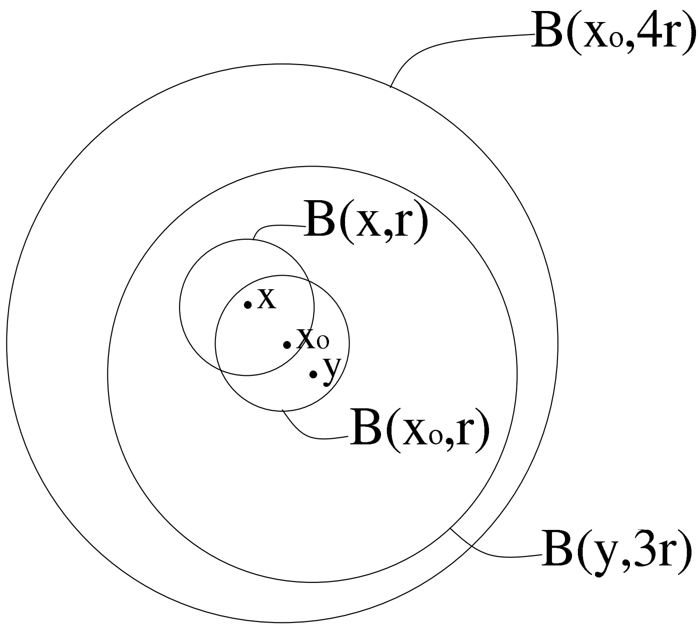
$$B(x,r) \subseteq B(y,3r) \subseteq B(x_0,4r) \subseteq\subseteq \Omega$$

✓Nota
Se $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$, $A \subseteq\subseteq B$ indica che $\overline{A} \subseteq B$ ✓

Allora poichè $u \geq 0$, risulta :

$$u(x) \leq \frac{1}{r^N \omega_N} \int_{B(y,3r)} u(z)dz =$$

$$= \frac{3^N}{(3r)^N \omega_N} \int_{B(y,3r)} u(z)dz = 3^N \fint_{B(y,3r)} u(z)dz = 3^N u(y)$$



Data l'arbitrarietà di x e y , ciò prova l'asserto. $\sharp$

Lemma 5.3
Sia $u : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $A \cap B \neq \emptyset$ *e* $u \geq 0$ *. Si supponga :*

$$\begin{array}{rl} i) & \sup_A u \leq c_A \inf_A u \\ ii) & \sup_B u \leq c_B \inf_B u \end{array}$$

con c_A , $c_B \geq 1$ *, costanti. Allora :*

$$\sup_{A \cup B} u \leq c_A c_B \inf_{A \cup B} u$$

Dimostrazione
Siano $x \in A$, $y \in B$ e $z \in A \cap B$. Si ha :

$$\begin{array}{ll} u(x) \leq c_A u(z) & \text{per} \quad (i) \\ u(z) \leq c_B u(y) & \text{per} \quad (ii) \end{array}$$

allora $u(x) \leq c_A c_B u(y), \quad \forall x \in A$ e $\forall y \in B$, ma poichè $c_A c_B \geq c_A$ e $c_A c_B \geq c_B$,

$$u(x) \leq c_A c_B u(y) \qquad \forall x, y \in A \cup B$$

Questo prova il lemma. $\sharp$

Corollario 5.4
Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e sia K un compatto contenuto in Ω. Esiste allora $c = c(K, \Omega) \geq 0$ tale che :

$$\sup_K u \leq c \inf_K u, \qquad \forall u \in \mathcal{H}(\Omega), \qquad u \geq 0$$

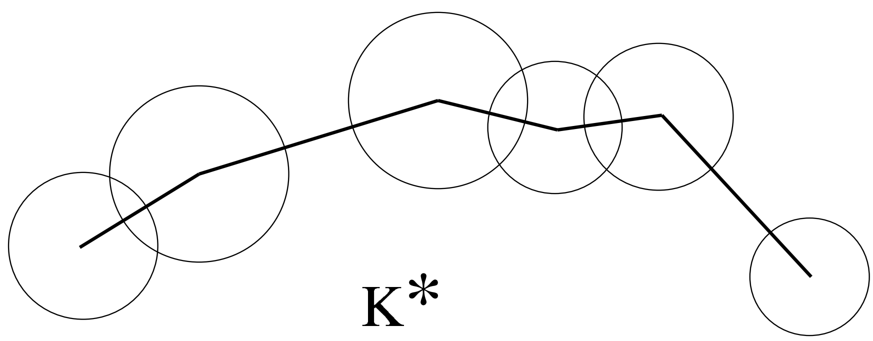
Dimostrazione
Si osservi anzitutto che esiste un insieme connesso e compatto $K^* \subseteq \Omega$ tale che $K \subseteq K^*$.
Infatti, per la proprietà del ricoprimento finito, è possibile ricoprire K con un numero finito di palle

$$B(x_j, r_j), \qquad j = 1, ..., p$$

tali che $\overline{B(x_j, r_j)} \subseteq \Omega$, per ogni $j = 1, ..., p$ (si supponga $p \geq 2$ il che non è restrittivo). D'altra parte, poichè Ω è aperto e connesso, per ogni $j = 1, ..., p-1$, esiste una poligonale $P_j \subseteq \Omega$ tale che $x_j, x_{j+1} \in P_j$. Allora

$$K^* = \left(\bigcup_{j=1}^{p} \overline{B(x_j, r_j)} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p-1} P_j \right)$$

è un compatto connesso contenuto in Ω.



Ancora per la proprietà del ricoprimento finito, esiste $r \geq 0$ tale che :

$$K^* \subseteq \bigcup_{j=1}^{q} B(z_j, r) \qquad \text{e} \qquad \overline{B(z_j, 4r)} \subseteq \Omega, \qquad \forall j = 1, ..., q$$

Poichè K^* è connesso, non è restrittivo supporre

$$\left(\bigcup_{j \leq k} B(z_j, r) \right) \cap B(z_{k+1}, r) \neq \emptyset \qquad (\clubsuit)$$

per $k = 1, ..., q-1$, (supponendo $q \geq 2$). Infatti, posto $B_j = B(z_j, r)$, risulta

$$B_1 \cap B_j \neq \emptyset \qquad \text{per un opportuno} \qquad j \geq 2$$

altrimenti, B_1 e $\bigcup_{j=2}^{q} B_j$, sarebbero due aperti che spezzerebbero K^* .
Così, rinumerando eventualmente le B_j , si può supporre $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$.
Ora, come prima sarà

$$(B_1 \cup B_2) \cap B_j \neq \emptyset \qquad \text{per un opportuno} \qquad j \geq 3$$

Riordinando nuovamente le B_j , si ha $(B_1 \cup B_2) \cap B_3 \neq \emptyset$.
Iterando questo procedimento si prova ($\clubsuit$).
A questo punto, per la disuguaglianza di Harnack, risulta :

$$\sup_{B_j} u \leq 3^N \inf_{B_j} u, \qquad \forall u \in \mathcal{H}(\Omega), \quad u \geq 0, \qquad \forall j = 1, ..., q$$

Ora, applicando ripetutamente il lemma precedente, si ottiene :

$$\sup_{\bigcup_{j=1}^{q} Bj} u \leq 3^{qN} \inf_{\bigcup_{j=1}^{q} Bj} u \qquad \forall u \in \mathcal{H}(\Omega), \quad u \geq 0$$

e quindi poichè $K \subseteq K^* \subseteq \bigcup_{j=1}^{q} Bj$,

$$\sup_K u \leq \sup_{\bigcup_{j=1}^{q} Bj} u \leq 3^{qN} \inf_{\bigcup_{j=1}^{q} Bj} u \leq 3^{qN} \inf_K u$$

e ciò dimostra l'asserto . $\sharp$

Corollario 5.5
Teorema di Harnack
Sia $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni armoniche in Ω, Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$, tale che :

$$i) \quad u_k \leq u_{k+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$ii) \quad \exists x_0 \in \Omega : \sup_{\Omega}(u_k(x_0)) < +\infty$$
$$(\textit{cioè} \iff (u_k(x_0)) \textit{ è convergente})$$

Allora la successione $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su ogni compatto di Ω.

Dimostrazione
Sia K un compatto di Ω. Posto $K_{x_0} = K \cup \{x_0\}$, per il corollario precedente si ha :

$$\sup_{K_{x_0}} |u_n - u_m| = (\text{se } n \geq m) = \sup_{K_{x_0}}(u_n - u_m) \leq c \inf_{K_{x_0}}(u_n - u_m) \leq$$

$$\leq c(u_n(x_0) - u_m(x_0)) = c|u_n(x_0) - u_m(x_0)| \longrightarrow 0 \qquad \text{per} \quad n, m \to +\infty$$

(si noti che c è indipendente sia da n sia da m). ♯

Osservazione 5.6
Sia $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$, $\quad u \geq 0$. Allora u è costante.
Infatti siano $x, y \in \mathbb{R}^N, x \neq y$, posto $r = |x - y|$ e per ogni $R > 0$, si ha:

$$u(x) = \fint_{B(x,R)} u(z)dz = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B(x,R)} u(z)dz \leq$$

$$\leq \frac{(R+r)^N}{(R+r)^N} \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B(y,R+r)} u(z)dz = \frac{(R+r)^N}{R^N} \fint_{B(y,R+r)} u(z)dz = \left(\frac{R+r}{R}\right)^N u(y)$$

Allora per $R \longrightarrow +\infty$, si ha

$$u(x) \leq u(y) \quad , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Quindi u è costante.

Osservazione 5.7
Teorema di Liouville per le funzioni armoniche
Ogni funzione $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$ limitata superiormente (inferiormente) è costante.
Infatti, supponendo f limitata superiormente, si ha:

$$\sup_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f \geq f \Longrightarrow \sup_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(x) - f(x) \geq 0$$

Considerando ora l'osservazione precedente con $u(x) = \sup_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(x) - f(x)$ è provata la tesi.
Nel caso sia f limitata inferiormente, basta prendere $-f$ e ragionare come prima.

Osservazione 5.8
Teorema di Liouville
Se f è una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ e limitata, allora è costante.
Infatti $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, quindi $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ e sono limitate. Applicando il risultato precedente si ottiene l'asserto.

Osservazione 5.9
Teorema fondamentale dell'algebra
Se f è una funzione polinomiale su $\mathbb{C}$ di grado $n \geq 1$, allora esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $f(\alpha) = 0$.
Infatti f sarà del tipo

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z^1 + ... + \alpha_n z^n$$

quindi $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Ora, se per assurdo non esistesse $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $f(\alpha) = 0$, allora la funzione $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ sarà ancora olomorfa su $\mathbb{C}$. Ma g sarà anche limitata su $\mathbb{C}$ in quanto

$$g(z) \longrightarrow 0 \qquad \textit{per} \qquad |z| \to \infty$$

ne verrebbe, allora, $g(z) = costante$, che è assurdo.

Corollario 5.10
Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e siano $u, v \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tali che $u \geq v$ in Ω. Allora se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = v(x_0)$, si ha $u \equiv v$ in Ω.

Dimostrazione
La funzione $w = u - v$ è armonica in Ω e $w \geq 0$. Allora per la disuguaglianza di Harnack, per ogni $x \in \Omega$ esiste $c_x > 0$ tale che:

$$0 \leq w(x) \leq \sup_{\{x,x_0\}} w \leq c_x \inf_{\{x,x_0\}} w \leq c_x w(x_0) = 0$$

quindi $w(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$. $\sharp$

Corollario 5.11
Principio di max forte
Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x) \leq u(x_0)$ allora $u \equiv u(x_0)$.

Dimostrazione
Segue dal corollario precedente con $v = u(x)$, (ovviamente $u(x_0) \in \mathcal{H}(\Omega)$ perchè costante). $\sharp$

6 - Superposizione degli operatori di media. Mollificatori. Regolarità C^∞ delle funzioni armoniche

Sia $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Per ogni $r > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ponga:

$$M_r(u)(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy$$

Osservazione 6.1
Per ogni $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, la funzione

$$(x, r) \longrightarrow M_r(u)(x)$$

è continua su $\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$.
Infatti, fissando $x \in \mathbb{R}^N$, si ha

$$M_{r+\varepsilon}(u)(x) = \fint_{B(x,r+\varepsilon)} u(y)dy = \frac{1}{(r+\varepsilon)^N \omega_N} \int_{B(x,r+\varepsilon)} u(y)dy =$$

$$= \frac{1}{(r+\varepsilon)^N \omega_N} \left(\int_{B(x,r)} u(y)dy + \int_{B(x,r+\varepsilon)} \chi_{C_{x(r,r+\varepsilon)}} u(y)dy \right)$$

con $C_{x(r,r+\varepsilon)}$ corona circolare di centro x e raggi r e $r+\varepsilon$
e

$$\chi_{C_{x(r,r+\varepsilon)}} = \begin{cases} 1 & se \quad y \in C_{x(r,r+\varepsilon)} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Allora essendo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \chi_{C_{x(r,r+\varepsilon)}} = 0 \quad q.d.$$

si ha

$$M_{r+\varepsilon}(u)(x) \longrightarrow \frac{1}{r^N \omega_N} \int_{B(x,r)} u(y)dy = M_r(u)(x) \quad per \quad \varepsilon \to 0$$

Adesso invece, fissando r, si ha:

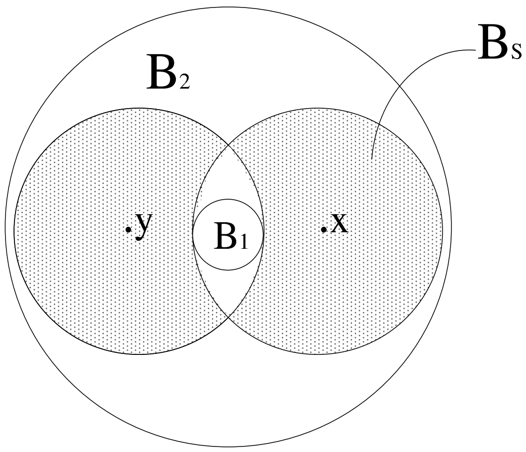
$$|M_r(u)(x) - M_r(u)(y)| = \frac{1}{r^N \omega_N} \left| \int_{B(x,r)} u(s)ds - \int_{B(y,r)} u(t)dt \right|$$

e questo significa integrare sulla differenza simmetrica di $B(x,r)$ e $B(y,r)$. Si supponga ora $|x-y| < 2r$, il che non è restrittivo se $y \to x$ e sia

$$B_1 := B\left(\frac{x+y}{2}, 2r - |x-y|\right)$$

$$B_2 := B\left(\frac{x+y}{2}, 2r + |x-y|\right)$$

$$B_s := (B(x,r)\backslash B(y,r)) \cup (B(y,r)\backslash B(x,r)) \quad \textit{(differenza simmetrica)}$$



Allora

$$B_1 \subseteq B(x,r) \cap B(y,r) \subseteq B_2$$

e

$$\text{mis}\{B_s\} \leq \text{mis}\{B_2 \backslash B_1\}$$

Infine, sfruttando la locale assoluta continuità della funzione

$$E \longrightarrow \int_E |u(s)|ds$$

risulta:
$$\left|\int_{B_s} u(s)ds\right| \leq \int_{B_s} |u(s)|ds \leq \int_{B_2\setminus B_1} |u(s)|ds \longrightarrow 0$$
per $y \to x$, in quanto B_1 e B_2 tendono a diventare uguali. Resta così provata l'osservazione.

Sia ora $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ una funzione tale che $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \subseteq]0,\varepsilon[$ e $\int_0^\infty \varphi_\varepsilon(r)dr = 1$, con $\varepsilon > 0$ fissato. Si ponga per ogni $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$:
$$u_\varepsilon(x) = \int_0^\infty M_r(u)(x)\varphi_\varepsilon(r)dr$$
Così:
$$u_\varepsilon(x) = \int_0^\infty \frac{\varphi_\varepsilon(r)}{r^N\omega_N}\left(\int_{|x-y|<r} u(y)dy\right)dr = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\left(\int_{|x-y|}^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(r)}{r^N\omega_N}dr\right)dy$$
e ponendo
$$\Phi_\varepsilon(x) = \int_{|x|}^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(r)}{r^N\omega_N}dr$$
risulta
$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\Phi_\varepsilon(x-y)dy$$
con $(x-y) \in B(0,\varepsilon)$.
Si osservi che $\Phi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\mathrm{supp}(\Phi_\varepsilon) \subseteq B(0,\varepsilon)$.
Inoltre
$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi_\varepsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{|x|}^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(r)}{r^N\omega_N}dr\right)dx = (|x| = \rho) =$$
$$= N\omega_N \int_0^{+\infty} \rho^{N-1}\left(\int_\rho^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(r)}{r^N\omega_N}dr\right)d\rho = N\int_0^{+\infty} \rho^{N-1}\left(\int_\rho^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(r)}{r^N}dr\right)d\rho =$$
$$= N\int_0^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(r)}{r^N}\left(\int_0^r \rho^{N-1}d\rho\right)dr = \int_0^\infty \varphi_\varepsilon(r)dr = 1$$

✓**Nota**
Se $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(\frac{t}{\varepsilon})\frac{1}{\varepsilon}$ con $\int_0^\infty \varphi(r)dr = 1$ e $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq]0,1[$, allora
$$\Phi(x) = \int_{|x|}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^N\omega_N}dt = \int_{\varepsilon|x|}^{+\infty} \frac{\varphi(\frac{r}{\varepsilon})\varepsilon^N}{r^N\omega_N\varepsilon}dr = \varepsilon^N\int_{\varepsilon|x|}^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(r)}{r^N\omega_N}dr = \varepsilon^N\Phi_\varepsilon(\varepsilon x)$$

Quindi si può anche scrivere:

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\Phi(x-y)dy$$

con $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp}(\Phi) \subseteq B(0,1)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x)dx = 1$ $\quad\checkmark$

Più in generale, se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, si può definire:

$$M_r(u)(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy \qquad \forall x \in \Omega^r$$

con $\Omega^r = \{z \in \Omega \backslash \text{dist}(z, \partial\Omega) > r\}$, e

$$u_\varepsilon(x) = \int_0^{+\infty} M_r(u)(x)\varphi_\varepsilon(r)dr = \int_\Omega u(y)\Phi_\varepsilon(x-y)dy \qquad \forall x \in \Omega(\varepsilon)$$

Teorema 6.2
Sia $u \in C(\Omega, \mathbb{R}), \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^N$, tale che:

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy \tag{3}$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tali che $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$. Allora:

$$u(x) = \int_\Omega u(y)\Phi_\varepsilon(x-y)dy \tag{4}$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\varepsilon > 0$ tali che $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \Omega$.

Dimostrazione
Da (3) segue che

$$u(x) = M_r(u)(x) \qquad \forall x \in \Omega^r$$

quindi moltiplicando ambo i membri per $\varphi_\varepsilon(r)$ ed integrando in r, si ha:

$$u(x) = \int_0^{+\infty} u(x)\varphi_\varepsilon(r)dr = \int_0^{+\infty} M_r(u)(x)\varphi_\varepsilon(r)dr =$$

$$= \int_\Omega u(y)\Phi_\varepsilon(x-y)dy \qquad \forall x \in \Omega(\varepsilon)\sharp$$

Corollario 6.3
Ogni funzione armonica in Ω, Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, è di classe C^∞.

Dimostrazione
Se $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, allora verifica, per le formule di media, la condizione (3) del teorema precedente e quindi anche la (4). $\sharp$

Corollario 6.4
Teorema di Koebe
Se $u \in C(\Omega)$ e ha la proprietà di media (3) allora $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Dimostrazione
Anzitutto $u \in C^\infty(\Omega)$, e per la formula di media di volume

$$u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy - \frac{N}{r^N}\int_0^r \rho^{N-1}\left(\int_{|x-y|<\rho}(\Gamma(x-y)-\Gamma(\rho))\Delta u(y)dy\right)d\rho$$

quindi per (3)

$$\int_0^r \rho^{N-1}\left(\int_{|x-y|<\rho}(\Gamma(x-y)-\Gamma(\rho))\Delta u(y)dy\right)d\rho = 0$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tali che $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$. Derivando ora rispetto a r, si ha:

$$\int_{|x-y|<\rho}(\Gamma(x-y)-\Gamma(\rho))\Delta u(y)dy = 0$$

Ma

$$|x-y| < \rho \quad \Longrightarrow \quad \Gamma(x-y)-\Gamma(\rho) > 0$$

quindi deve essere $\Delta u = 0$, $\forall x \in \Omega$.
($\Gamma(\rho) \searrow$ su $\mathbb{R}^+$ se $N \geq 3$, $\quad \Gamma(\rho) \searrow$ su $]0,1[$ se $N = 2$) $\sharp$

Osservazione 6.5
Se $u \in C^2(\Omega)$ ha la proprietà di media di superficie

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dy$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tali che $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$, allora $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Infatti per la formula di media (sferica)

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dy - \int_{B(x,r)}(\Gamma(x-y)-\Gamma(r))\Delta u(y)dy \quad ,$$

quindi ragionando come nel corollario precedente, si ottiene l'asserto.

Corollario 6.6
Sia $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni armoniche in Ω, uniformemente convergente su ogni compatto di Ω ad una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Dimostrazione
Siano $x \in \Omega$ e $r > 0$ tali che $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$. Allora, poichè ogni $u_k \in \mathcal{H}(\Omega)$:

$$u_k(x) = \fint_{B(x,r)} u_k(y)dy \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ora per $k \longrightarrow +\infty$, si ha:

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dy$$

ed essendo ovviamente $u \in C(\Omega)$, per il teorema di Koebe $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. $\sharp$

Corollario 6.7
Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e sia $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{H}(\Omega)$ tale che $u_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x_0) < +\infty$$

allora

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$$

è convergente in ogni punto di Ω e la sua somma è una funzione armonica in Ω.

Dimostrazione
Sia

$$p_s(x) = \sum_{k=1}^{s} u_k(x)$$

allora $p_s < p_{s+1}$ ed esiste $x_0 \in \Omega$ tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x_0) = \sup_{\Omega}(p_s(x_0)) < +\infty$$

Allora per il teorema di Harnack $(p_s)_{s\in\mathbb{N}}$ è una successione uniformemente convergente su ogni compatto di Ω, di funzioni armoniche in Ω (la somma di funzioni armoniche è ancora una funzione armonica). Quindi per il corollario precedente

$$\lim_{s\to+\infty} p_s(x) = \lim_{s\to+\infty} \sum_{k=1}^{s} u_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$$

è una funzione armonica in Ω. $\sharp$

7 - Analiticità delle funzioni armoniche

Osservazione 7.1
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Risulta:

$$u \in \mathcal{H}(\Omega) \Longrightarrow D^\alpha u \in \mathcal{H}(\Omega)$$

per ogni α multiindice intero non negativo. Infatti

$$u \in \mathcal{H}(\Omega) \Longrightarrow u \in C^\infty(\Omega)$$

e

$$\Delta u = 0 \Longrightarrow D^\alpha(\Delta u) = 0$$

allora

$$\Delta(D^\alpha u) = 0$$

Osservazione 7.2
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $x \in \Omega$ e $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$, $\forall r > 0$, allora, denotando $\partial_j u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_j}$, si ha:

$$|\partial_j u(x)| \leq \frac{N}{r} \sup_{\partial B(x,r)} |u| \qquad \textit{per} \quad j = 1, ..., N$$

Infatti, poichè $\partial_j u \in \mathcal{H}(\Omega)$, verifica la formula di media (di volume)

$$\partial_j u(x) = \frac{1}{r^N \omega_N} \int_{B(x,r)} \partial_j u(y) dy = \left(\begin{array}{c} \textit{per il teorema} \\ \textit{della divergenza} \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{r^N \omega_N} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \nu_j(y) d\sigma(y)$$

(ν_j j-esima componente del versore normale esterno a $B(x,r)$), quindi

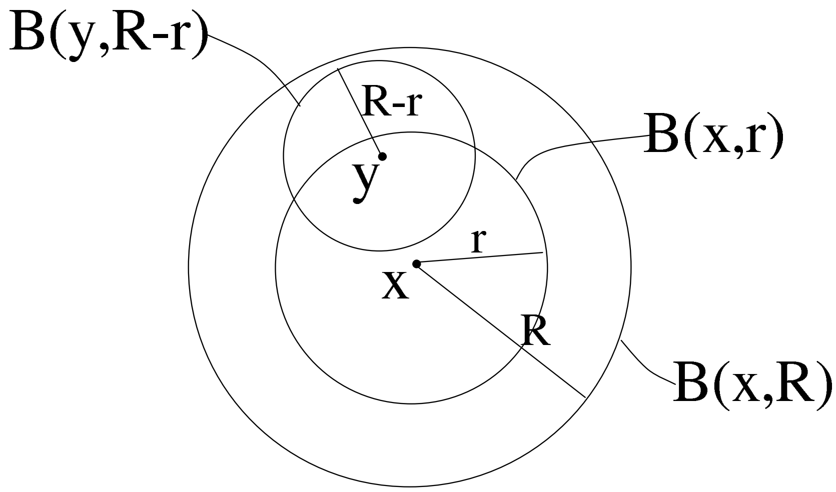
$$|\partial_j u(x)| \leq \frac{1}{r^N \omega_N} \sup_{\partial B(x,r)} |u| \int_{\partial B(x,r)} d\sigma(y) = \frac{N}{r} \sup_{\partial B(x,r)} |u|$$

Osservazione 7.3
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $x \in \Omega$ e $\overline{B(x,R)} \subseteq \Omega$ con $0 < r < R$, si ha:

$$\sup_{B(x,r)} |\partial_j u(x)| \leq \frac{N}{R-r} \sup_{B(x,R)} |u| \qquad per \quad j = 1, ..., N$$

Infatti $\forall y \in B(x,r)$, per l'osservazione precedente risulta

$$|\partial_j u(y)| \leq \frac{N}{R-r} \sup_{\partial B(y,R-r)} |u| \qquad per \quad j = 1, ..., N$$



Ma, poichè

$$\bigcup_{y \in B(x,r)} \partial B(y, R-r) \subseteq B(x,R)$$

allora

$$|\partial_j u(y)| \leq \frac{N}{R-r} \sup_{B(x,R)} |u|$$

per $j = 1, ..., N$ e $\forall y \in B(x,r)$, cioè

$$\sup_{B(x,r)} |\partial_j u(x)| \leq \frac{N}{R-r} \sup_{B(x,R)} |u| \qquad per \quad j = 1, ..., N$$

Corollario 7.4
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Per ogni α multiindice intero non negativo, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tali che $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$, si ha:

$$\sup_{B(x,\frac{r}{2})} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{2N}{r}|\alpha|\right)^{|\alpha|} \sup_{B(x,r)} |u|$$

Dimostrazione
Sia $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ e $p = |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$. Si ponga poi $r_k = \frac{r}{2} + \frac{k}{p}\frac{r}{2}$ con $k = 0, 1, ...p$. Sia ora $(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p)$ una famiglia di multiindici interi non negativi con:

$$\begin{array}{ll} i) & \beta_0 = \alpha \\ ii) & |\beta_k| = |\beta_{k-1}| - 1 \qquad \text{per} \quad k = 1, ..., p) \end{array}$$

Allora, tenendo conto che

$$D^{\beta_{k-1}} u = \partial_j D^{\beta_k} u \qquad \text{per un qualche} \quad j = 1, ..., N$$

per la precedente osservazione, risulta:

$$(r_k - r_{k-1} = \frac{1}{p}\frac{r}{2} \qquad \text{per} \quad k = 1, ..., p)$$

$$(\clubsuit) \qquad \sup_{B(x,r_{k-1})} |D^{\beta_{k-1}} u| \leq \frac{2pN}{r} \sup_{B(x,r_k)} |D^{\beta_k} u| \qquad \text{per} \quad k = 1, ..., p$$

Ora applicando ripetutamente $(\clubsuit)$ partendo da $k = 1$ fino a $k = p = |\alpha|$ si ottiene:

$$(r_0 = \frac{r}{2}, \quad r_p = r, \quad D^{\beta_0} u = D^\alpha u, \quad D^{\beta_p} u = u)$$

$$\sup_{B(x,\frac{r}{2})} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{2N}{r}|\alpha|\right)^{|\alpha|} \sup_{B(x,r)} |u| \qquad \sharp$$

Corollario 7.5
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Allora u è analitica reale.

Dimostrazione
Siano $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tali che $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \Omega$. $\forall x \in B(x_0, \frac{r}{2})$, per la formula di Taylor:

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = p+1} \frac{D^\alpha u(y)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha$$

con α multiindice intero non negativo e y appartenente al segmento $[x_0, x]$. Ora per il corollario precedente

$$\left|\sum_{|\alpha|=p+1} \frac{D^\alpha u(y)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha\right| \le \left(\frac{2N}{r}(p+1)\right)^{p+1} \sup_{B(x_0,r)} |u| \sum_{|\alpha|=p+1} \left|\frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}\right| \le$$

$$\le \sup_{B(x_0,r)} |u| \left(\frac{2N}{r}(p+1)\right)^{p+1} N^{p+1} \frac{|x-x_0|^{p+1}}{(p+1)!} =$$

$$= \sup_{B(x_0,r)} |u| \frac{\left(\frac{2|x-x_0|N^2}{r}\right)^{p+1} (p+1)^{p+1}}{(p+1)!}$$

Si osservi adesso che

$$\frac{a^s s^s}{s!} \longrightarrow 0 \qquad \text{per} \quad s \to +\infty$$

se $a < \dfrac{1}{e}$. Infatti, usando il criterio del rapporto

$$\frac{a^{s+1}(s+1)^{s+1}}{(s+1)!} \frac{s!}{a^s s^s} = a\left(1+\frac{1}{s}\right)^s \longrightarrow ae \qquad \text{per} \quad s \to +\infty$$

Perciò il resto della formula di Taylor tende a zero, per $p \to +\infty$, se

$$\left(\frac{2|x-x_0|N^2}{r}\right) < \frac{1}{e} \qquad \sharp$$

Corollario 7.6

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sia $x_0 \in \Omega$ tale che

$$(i) \qquad u(x) = O(|x-x_0|^k) \qquad \text{per} \quad x \to x_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Allora se Ω è connesso, $u \equiv 0$ in Ω.

Dimostrazione

Da (i) segue subito che $D^\alpha(u(x_0)) = 0$, per ogni α multiindice intero non negativo. Di conseguenza, per l'analiticità di u, esiste un intorno V_0 di x_0 tale che $u|_{V_0} \equiv 0$. Sia ora

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega / \exists V \quad \text{intorno di } x \text{ tale che} \quad u|_V \equiv 0\}$$

Allora $\Omega_0 \neq \emptyset$ ($x_0 \in \Omega_0$), è aperto (in quanto è unione di aperti) ed è chiuso: infatti per ogni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in Ω_0, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ è ancopra un elemento di Ω_0, perchè $D^\alpha u(x_n) \longrightarrow D^\alpha u(x)$ per $n \to +\infty$ e $\forall \alpha$, ma $D^\alpha u(x_n) \equiv 0$ su un opportunu intorno V_n di x_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall \alpha$.
Quindi, se Ω è connesso, $\Omega_0 \equiv \Omega$ e $u \equiv 0$ in Ω. $\sharp$

Osservazione 7.7
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sia $x_0 \in \Omega$ un punto estremante relativo di u. Allora su Ω è connesso

$$u(x) = u(x_0) \qquad \forall x \in \Omega$$

cioè u è costante. Infatti, basta applicare il corollario precedente alla funzione $w(x) = u(x) - u(x_0)$ e si prova l'affermazione.

8 - Il lemma di Caccioppoli-Weyl

Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r \in]0, r_x[$, $r_x = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, si ponga:

$$m_r(u)(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y)$$

Osservazione 8.1
Se $r \longrightarrow m_r(u)(x)$ è costante q.d. su $]0, r_x[$, allora la funzione (continua) $r \longrightarrow M_r(u)(x)$ è costante q.d. su $]0, r_x[$.
Infatti, se $m_r(u)(x) = m(u)(x)$ q.d. su $]0, r_x[$, si ha:

$$M_r(u)(x) = \fint_{B(x,r)} u(y) dy = \frac{1}{r^N \omega_N} \int_{B(x,r)} u(y) dy =$$

$$= \frac{1}{r^N \omega_N} \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,\rho)} u(y) d\sigma(y) \right) d\rho = \frac{1}{r^N \omega_N} \int_0^r N \omega_N \rho^{N-1} m(u)(x) d\rho = m(u)(x)$$

Lemma 8.2
Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che $r \longrightarrow m_r(u)(x)$ è costante q.d. su $]0, r_x[$, $\forall x \in \Omega$. Allora u coincide q.d. con una funzione armonica in Ω.

Dimostrazione
Dall'ipotesi segue che $r \longrightarrow M_r(u)(x)$ è costante q.d. su $]0, r_x[$, $\forall x \in \Omega$. Ora, per un teorema di Lebesgue

$$\lim_{r \to 0} M_r(u)(x) = u(x) \qquad \text{q.d. in} \quad \Omega$$

✓Nota
Il teorema di Lebesgue prima citato.
Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^N$. Si chiama punto di Lebesgue di u un punto $x_0 \in \Omega$ tale che

$$(i) \qquad \lim_{r \to 0} \fint_{B(x_0,r)} |u(y) - u(x_0)| dy = 0$$

Riesce che l'insieme

$$\{x \in \Omega / \quad x \quad \text{non è punto di Lebesgue di } u\}$$

ha misura nulla.
Così, da (i) segue subito che

$$u(x) = \lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} u(y)dy$$

in ogni punto di Lebesgue di u, quindi q.d. ✓
Si ponga ora $v(x) = M_r(u)(x)$ se $r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. La definizione di v non è ambigua, in quanto $M_r(u)(x)$ è costante rispetto a r. Inoltre per un'osservazione precedente v è continua in Ω. Allora si ha:

$$v(x) = u(x) \qquad \text{q.d. in} \quad \Omega$$

e, di conseguenza

$$v(x) = M_r(u)(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy = \fint_{B(x,r)} v(y)dy$$

$\forall x \in \Omega$ e per ogni $r \in]0, r_x[$. La funzione v è dunque continua in Ω e ha la proprietà di media, dunque $v \in \mathcal{H}(\Omega)$ $\quad \sharp$

Lemma 8.3
Sia $u \in C(I, \mathbb{R})$, I intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Se u è C^1 a tratti e se $u' \in L^1_{loc}(I)$, allora

$$\int_I u(t)\varphi'(t)dt = -\int_I u'(t)\varphi(t)dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I)$$

Dimostrazione
Fissata $\varphi \in C_0^\infty(I)$ esistono $a_0, a_1, ..., a_p \in I$ tali che

$$\begin{array}{ll} i) & a_0 < a_1 < ... < a_p \\ ii) & \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq]a_0, a_p[\\ iii) & \varphi \in C^1(]a_{n-1}, a_n[), \quad n = 1, ..., p \end{array}$$

Allora:

$$\int_I u(t)\varphi'(t)dt = \sum_{k=1}^{p} \int_{a_{k-1}}^{a_k} u(t)\varphi'(t)dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (u(a_k)\varphi(a_k) - u(a_{k-1})\varphi(a_{k-1})) - \sum_{k=1}^{p} \int_{a_{k-1}}^{a_k} u'(t)\varphi(t)dt =$$

$$= - \int_I u'(t)\varphi(t)dt \qquad \sharp$$

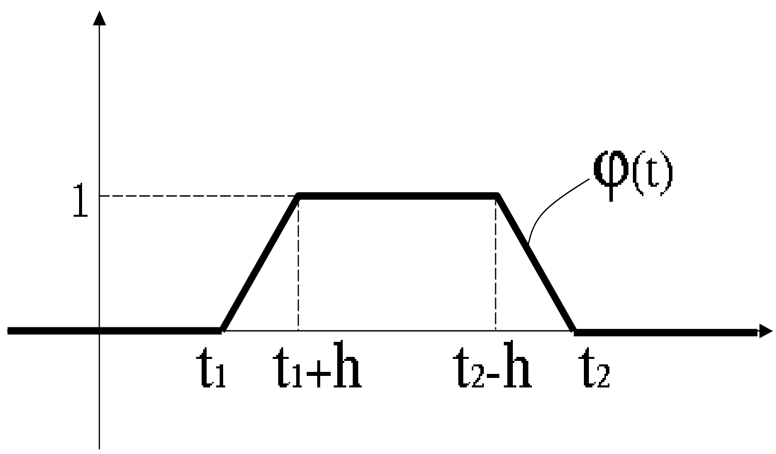
Lemma 8.4
Sia $u \in L^1_{loc}(I)$, I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, tale che

$$(i) \qquad \int_I u(t)\varphi'(t)dt = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I)$$

Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $u(x) = c$, q.d. in I.

Dimostrazione
Siano $t_1, t_2 \in I$, punti di Lebesgue di u, con $t_1 < t_2$. Per ogni $h \in \mathbb{R}$, $h < \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$, si indichi con $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione costruita, tale che:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t < t_1, \quad t > t_2 \\ 1 & \text{per} \quad t_1 + h < t < t_2 - h \\ \text{affine, altrimenti} \end{cases}$$



Sia ora φ_ε una mollificata di di φ, cioè:

$$\varphi_\varepsilon(t) = \int_I \varphi(\tau)\Phi_\varepsilon(t - \tau)d\tau$$

con $\Phi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp}(\Phi_\varepsilon) \subseteq]0, \varepsilon[$, e inoltre $\int_{\mathbb{R}} \Phi_\varepsilon(r)dr = 1$, con $\varepsilon > 0$ fissato. Allora, visto che anche $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(I)$, per (i)

$$(ii) \qquad \int_I u(t)\varphi_\varepsilon'(t)dt = 0$$

Ora:

$$\varphi_\varepsilon'(t) = \int_I \varphi(\tau)\Phi_\varepsilon'(t-\tau)d\tau = \left(\begin{array}{c}\text{per il lemma}\\ \text{precedente}\end{array}\right) =$$

$$= -\int_I \varphi'(\tau)\Phi_\varepsilon(t-\tau)d\tau = (\Phi_\varepsilon(r) = -\Phi_\varepsilon(r)) = \int_I \varphi'(\tau)\Phi_\varepsilon(t-\tau)d\tau$$

Si osservi adesso che

$$\varphi_\varepsilon'(t) \longrightarrow \varphi'(t) \qquad \text{per} \qquad \varepsilon \to 0, \qquad \forall t \neq t_1, t_2$$

e

$$|\varphi_\varepsilon'(t)| \leq \int_I \frac{1}{h}\Phi_\varepsilon(t-\tau)d\tau = \frac{1}{h} \qquad \forall t \in I, \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Allora, in (ii) si può passare al limite, per $\varepsilon \to 0$, sotto il segno di integrale, ottenendo:

$$0 = \int_I u(t)\varphi'(t)dt = \frac{1}{h}\int_{t_1}^{t_1+h} u(t)dt - \frac{1}{h}\int_{t_2-h}^{t_2} u(t)dt$$

Infine, poichè t_1, t_2 sono punti di Lebesgue di u, si ha per $h \longrightarrow 0$:

$$u(t_1) - u(t_2) = 0$$

e ciò prova che u è costante sull'insieme dei suoi punti di Lebesgue, quindi q.d. $\sharp$

Teorema 8.5
Lemma di Caccioppoli-Weyl
Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tale che

$$(i) \qquad \int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

(cioè $\Delta u(x) = 0$ in $D^1(\Omega)$).
Allora u coincide, q.d. in Ω, con una funzione $v \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Dimostrazione
Si fissi $x_0 \in \Omega$. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si ponga

$$\varphi(x) = \varphi(|x - x_0|) = \varphi(r) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq B(x_0, r_{x_0})$$

si ha, per (i):

$$0 = \int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \left(\left(\varphi^{''}(r) + \varphi^{'}(r)\frac{N-1}{r} \right) \int_{\partial B(x_0,r)} u(y)d\sigma(y) \right) dr$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(\varphi^{''}(r) + \varphi^{'}(r)\frac{N-1}{r} \right) N\omega_N r^{N-1} m(r)dr$$

dove si è posto

$$m(r) = m_r(u)(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)d\sigma(y)$$

Quindi deve essere

$$\int_0^{+\infty} \left(\varphi^{''}(r) + \varphi^{'}(r)\frac{N-1}{r} \right) r^{N-1} m(r)dr = 0$$

Si fissi ora $h \in C_0^\infty(]0, r_{x_0}[)$ e si scelga $\varphi \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$ tale che

$$\left(\varphi^{''}(r) + \varphi^{'}(r)\frac{N-1}{r} \right) r^{N-1} = -h^{'}(r) \qquad (\clubsuit)$$

in $]0, +\infty[$. Una tale scelta è possibile in quanto

$$(\clubsuit) \Longleftrightarrow \left(r^{N-1}\varphi^{'}(r) \right)^{'} = -h^{'}(r) \Longleftrightarrow r^{N-1}\varphi^{'}(r) = -h(r) + c$$

scegliendo allora $c = 0$ e

$$\varphi(x) = \int_{|x-x_0|}^{+\infty} \frac{h(t)}{t^{N-1}}dt$$

risulta $\varphi \in C_0^\infty(B(x_0, r_{x_0}))$ e φ =costante in un intorno di x_0 perchè $\operatorname{supp}(h) \subseteq (]0, r_{x_0}[)$. Inoltre

$$\frac{d}{dr}\varphi(r) = \frac{d}{dr}\int_r^{+\infty} \frac{h(t)}{t^{N-1}}dt = -\frac{h(r)}{r^{N-1}} \qquad \forall r > 0$$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} h^{'}(r)m(r)dr = 0 \qquad \forall h \in C_0^\infty(]0, r_{x_0}[)$$

quindi per il lemma precedente $m(r)$ =costante q.d. su $]0, r_{x_0}[$. Allora u coincide q.d., in Ω, con una funzione armonica. $\sharp$

9 - Funzioni superarmoniche

Definizione 9.1
Sia Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^N$. *Una funzione*

$$u : \Omega \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

si dice iperarmonica in Ω *se:*

$$\begin{array}{ll} (i) & u \quad \text{è i.s.c. (inferiormente semicontinua)} \\ (ii) & u(x) \geq M_r(u)(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall r \in]0, \mathrm{dist(x,}\partial\Omega)[\end{array}$$

Se oltre ad (i) *e* (ii), *vale anche la seguente:*

$$(iii) \qquad \overline{\{x \in \Omega / u(x) < +\infty\}} = \Omega$$

si dice che u *è superarmonica in* Ω.
Si indicano con

$$\mathcal{H}^*(\Omega) \qquad e \qquad \mathcal{S}(\Omega)$$

rispettivamente gli insiemi delle funzioni iperarmoniche e superarmoniche.
Una funzione

$$u : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$$

si dice subarmonica in Ω *se* $-u \in \mathcal{S}(\Omega)$

Osservazione 9.2
Se $u : \Omega \longrightarrow]0, +\infty]$ *è i.s.c. e se*

$$u(x) \geq m_r(u)(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall r \in]0, \mathrm{dist(x,}\partial\Omega)[$$

allora $u \in \mathcal{H}^*(\Omega)$. *Infatti:*

$$M_r(u)(x) = \frac{1}{r^N \omega_N} \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,\rho)} u(y) d\sigma(y) \right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{r^N \omega_N} \int_0^r N\omega_N \rho^{N-1} m_\rho(u)(x) d\rho \leq \sup_{x \in]0,r[} m_\rho(u)(x) \frac{N}{r^N} \int_0^r \rho^{N-1} d\rho =$$

$$= \sup_{x \in]0,r[} m_\rho(u)(x)$$

Osservazione 9.3
Risulta

$$\mathcal{S}(\Omega) \cap (-\mathcal{S}(\Omega)) = \mathcal{H}(\Omega)$$

Infatti, si supponga $u \in \mathcal{S}(\Omega) \cap (-\mathcal{S}(\Omega))$, *allora*

$$u : \Omega \longrightarrow]-\infty, +\infty[$$

è inferiormente e superiormente semicontinua, cioè è continua,

$$u(x) \geq M_r(u)(x) \qquad e \qquad -u(x) \geq M_r(-u)(x)$$

quindi

$$u(x) = M_r(u)(x)$$

inoltre

$$\overline{\{x \in \Omega / u(x) < +\infty \quad e \quad u(x) > -\infty\}} = \Omega$$

Allora per il teorema di Koebe, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$

Teorema 9.4
Sia $u \in C^2(\Omega)$, Ω *aperto di* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Allora*

$$u \in \mathcal{S}(\Omega) \Longleftrightarrow \Delta u(x) \leq 0$$

Dimostrazione
Se $x \in \Omega$ e $r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, si ha:

$$u(x) = M_r(u)(x) - \frac{N}{r^N} \int_0^r \rho^{N-1} \left(\int_{|x-y|<\rho} (\Gamma(x-y) - \Gamma(\rho)) \Delta u(y) dy \right) d\rho$$

Pertanto $u(x) \geq M_r(u)(x)$ se e solo se $\Delta u(x) \leq 0$, $(\Gamma(x-y) - \Gamma(\rho) < 0$ se $|x-y| < \rho)$.
D'altra parte se esiste $x \in \Omega$ tale che $u(x) > 0$, esiste $\overline{r} > 0$, tale che $\Delta u(y) > 0$, $\forall y \in B(x, \overline{r})$. Allora $u(x) < M_r(u)(x)$, $\forall y \in]0, \overline{r}[$ $\quad\sharp$

Proposizione 9.5
Siano $u, v \in \mathcal{H}^*(\Omega)$. *Allora:*

$$\begin{array}{ll} (i) & u + v \in \mathcal{H}^*(\Omega) \\ (ii) & \lambda u \in \mathcal{H}^*(\Omega) \quad \forall \lambda > 0 \\ (iii) & \min\{u, v\} \in \mathcal{H}^*(\Omega) \end{array}$$

Dimostrazione
(i)
(u i.s.c. e v i.s.c.)$\Longrightarrow u+v$ i.s.c

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \geq M_r(u)(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)dy \\ v(x) \geq M_r(v)(x) = \fint_{B(x,r)} v(y)dy \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} (u+v)(x) \geq \fint_{B(x,r)} (u+v)(y)dy = \\ = M_r(u+v)(x) \end{array}$$

$\forall x \in \Omega, \quad \forall r \in]0, \mathrm{dist(x}, \partial\Omega)[$

(ii)
u i.s.c. $\Longrightarrow \lambda u$ i.s.c

$$u(x) \geq \fint_{B(x,r)} u(y)dy = M_r(u)(x) \Longrightarrow \lambda u(x) \geq \lambda \fint_{B(x,r)} u(y)dy = M_r(\lambda u)(x)$$

$\forall x \in \Omega, \quad \forall r \in]0, \mathrm{dist(x}, \partial\Omega)[$

(iii)

$$\left.\begin{array}{ll} u(x) & \text{i.s.c} \\ v(x) & \text{i.s.c} \end{array}\right\} \Longrightarrow \min\{u,v\} \qquad \text{i.s.c.}$$

Siano $x \in \Omega$ e $r > 0$ tali che $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$, si ha:

$$u(x) \geq M_r(u)(x) \qquad \text{e} \qquad v(x) \geq M_r(v)(x)$$

allora

$$u(x) \geq M_r(\min\{u,v\})(x) \qquad \text{e} \qquad v(x) \geq M_r(\min\{u,v\})(x)$$

infine

$$\min\{u(x), v(x)\} \geq M_r(\min\{u,v\})(x) \qquad \sharp$$

Lemma 9.6
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ limitato e sia $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ (qualunque). Allora esiste $x_0 \in \overline{A}$ tale che

$$\inf_A u = \inf_{A \cap B(x_0,r)} u \quad , \qquad \forall r > 0$$

Dimostrazione
Per assurdo:

$$\forall x \in \overline{A}, \quad \exists r_x > 0 : \quad \inf_A u < \inf_{A \cap B(x,r_x)} u$$

La famiglia
$$\{B(x,r_x)/x \in \overline{A}\}$$
è un ricoprimento aperto di $\overline{A}$. Per la compattezza di $\overline{A}$, esistono allora $x_1,...,x_p \in \overline{A}$ tale che
$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, r_{x_j})$$
Di conseguenza, esisterà un $j = 1,...,p$ tale che
$$\inf_A u = \inf_{A\cap B(x_j,r_{x_j})} u$$
ma questo è assurdo perchè
$$\inf_A u < \inf_{A\cap B(x,r_x)} u \quad , \qquad \forall x \in \overline{A}$$
Ragionando allo stesso modo con
$$\inf_A u > \inf_{A\cap B(x,r_x)} u$$
si perviene alla tesi. $\sharp$

Teorema 9.7
Principio di minimo per le funzioni iperarmoniche
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e sia $u \in \mathcal{H}^*(\Omega)$ tale che
$$\liminf_{x\to y} u(x) \geq 0 \quad , \quad \forall y \in \partial\Omega$$
$$(\textit{brevemente:} \qquad \liminf_{\partial\Omega} u(x) \geq 0)$$
Allora
$$u(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in \Omega$$

Dimostrazione
Per il lemma precedente esiste $x_0 \in \overline{\Omega}$ tale che
$$\inf_\Omega u = \inf_{\Omega\cap B(x_0,r)} u \quad , \quad \forall r > 0$$
Di conseguenza,
$$\liminf_{x\to x_0} u(x) = \lim_{r\to 0}(\inf_{\Omega\cap B(x_0,r)} u) = \inf_\Omega u$$

Ora, se $x_0 \in \partial\Omega$,

$$\liminf_{x \to x_0} u(x) \geq 0$$

per ipotesi e quindi

$$\inf_{\Omega} u \geq 0$$

da cui

$$u(x) \geq 0 \quad , \quad \forall y \in \Omega$$

D'altra parte se $x_0 \in \Omega$, allora

$$u(x_0) \leq \lim_{x \to x_0} \inf u(x) = \inf_{\Omega} u \leq u(x_0)$$

quindi

$$u(x_0) = \inf_{\Omega} u$$

Ma per la proprietà di supermedia

$$u(x_0) \geq M_r(u)(x_0) \Longrightarrow M_r(u(x_0) - u)(x_0) \geq 0$$

essendo poi

$$u(x_0) - u(x) \leq 0 \qquad \text{in} \qquad B(x_0, r)$$

ciò implica che

$$u(x_0) = u(x) \qquad \text{q.d. in} \qquad B(x_0, r)$$

In realtà, non può essere $u(x_0) < u(x)$ in qualche punto di $B(x_0, r)$, perchè sarebbe così su tutto un intorno di x. Perciò deve essere

$$u(x_0) = u(x) \qquad \forall x \in B(x_0, r)$$

Sia ora

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega / \quad u(x) = u(x_0)\}$$

Ovviamente $\Omega_0 \neq \emptyset$, inoltre è aperto e chiuso (relativamente ad Ω). Esiste perciò C componente connessa di Ω, tale che $u \equiv u(x_0) = \inf_{\Omega} u$ in C. Infine, sia $y \in \partial C$: poichè $\partial C \subseteq \partial\Omega$ si ha

$$\inf_{\Omega} u = u(x_0) = \liminf_{x(\in C) \to y(\in \partial C)} u(x) \geq \liminf_{x(\Omega) \to y(\partial\Omega)} u(x) \geq 0$$

cioè

$$\inf_{\Omega} u \geq 0 \qquad \sharp$$

✓**Nota**
La prova del teorema precedente richiede che sia

$$
\begin{array}{ll}
(i) & u \quad \text{i.s.c.} \\
(ii) & \forall x \in \Omega, \quad \exists r_x > 0 : B(x, r_x) \subseteq \Omega \quad \text{e} \quad u(x) \geq M_{r_x}(u)(x)
\end{array}
$$

Le funzioni

$$u : \Omega \longrightarrow]-\infty, +\infty]$$

verificanti (i) e (ii) si dicono debolmente iperarmoniche in Ω e l'insieme di queste funzioni si indica con $\mathcal{H}_d^*(\Omega)$. Allora si ha

$$
\begin{pmatrix}
\Omega \quad \text{limitato} \\
u \in \mathcal{H}_d^*(\Omega) \\
\liminf\limits_{\partial\Omega} u(x) \geq 0
\end{pmatrix}
\Longrightarrow u(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in \Omega \qquad \checkmark
$$

10 - Risolubilità del problema di Dirichlet per gli aperti sferici

10.1 Rappresentazione di Green delle funzioni C^2

Sia Ω_0 un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $\Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq \Omega_0$ un aperto regolare. Sia poi $u \in C^2(\Omega_0)$. Per ogni fissato $x \in \Omega$ e per ogni $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \Omega$, si indichi con Ω_ε l'aperto

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{B(x,\varepsilon)}$$

Si ponga, inoltre, $v(y) = \Gamma(x-y)$, $\forall x \in \Omega$. Si ottiene allora :
$(\Delta v(y) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\varepsilon)$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v(y)\Delta u(y)dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu} - u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial\nu} \right) d\sigma(y) - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu} - u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial\nu} \right) d\sigma(y)$$

e per $\varepsilon \longrightarrow 0$ si ha

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu} d\sigma(y) \longrightarrow 0$$

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial\nu} d\sigma(y) \longrightarrow -u(x)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v(y)\Delta u(y)dy \longrightarrow \int_{\Omega} v(y)\Delta u(y)dy$$

quindi

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu} - u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial\nu} \right) d\sigma(y) - \int_{\Omega} v(y)\Delta u(y)dy \qquad (5)$$

e questa è la formula di rappresentazione di Green delle funzioni C^2.
In particolare, se $u \in C_0^2(\Omega)$

$$u(x) = -\int_{\Omega} \Gamma(x-y)\Delta u(y)dy$$

D'altra parte se $u \in C^2(\Omega_0)$ e $\Delta u(y) = 0 \quad , \quad \forall y \in \Omega$ allora

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial \nu} \right) d\sigma(y)$$

10.2 Funzione di Green

Sia Ω_0 un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $\Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq \Omega_0$ un aperto regolare. Si fissi $x \in \Omega$ e si supponga che esista $h_x \in C^2(\Omega_0)$ tale che

$$\Delta h_x(y) = 0, \quad \forall y \in \Omega \qquad \text{e} \qquad h_x(y) = \Gamma(x-y), \quad \forall y \in \partial\Omega$$

Allora per la formula di Green applicata alle funzioni u e h_x si ha:

$$\int_\Omega h_x(y)\Delta u(y)dy = \int_{\partial\Omega}\left(h_x(y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu} - u(y)\frac{\partial h_x(y)}{\partial\nu}\right)d\sigma(y) \tag{6}$$

Ora sommando (5) e (6), e ponendo

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - h_x(y)$$

si ottiene : $(G(x,y) = 0 \text{ se } y \in \partial\Omega)$

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu}d\sigma(y) - \int_\Omega G(x,y)\Delta u(y)dy$$

La funzione $G : \Omega \times \Omega \longrightarrow]-\infty, +\infty]$

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - h_x(y)$$

si chiama funzione di Green per Ω.

Osservazione 10.1
Si noti che, se esiste, G è unica in quanto h_x è unica. Infatti h_x è soluzione del problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta h_x(y) = 0, \quad \forall y \in \Omega \\ \\ h_x(y) = \Gamma(x-y), \quad \forall y \in \partial\Omega \end{cases}$$

Se esistessero h_x e $\overline{h}_x$ entrambe soluzioni allora $w(y) = h_x(y) - \overline{h}_x(y)$ sarebbe soluzione del problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta w(y) = 0, \quad \forall y \in \Omega \\ \\ w(y) = 0, \quad \forall y \in \partial\Omega \end{cases}$$

Applicando il principio del minimo con la condizione

$$\liminf_{\partial\Omega} w(y) \geq 0$$

si ottiene

$$w(y) \geq 0 \quad , \quad \forall y \in \Omega$$

Ora, per il principio del massimo, con la condizione

$$\limsup_{\partial\Omega} w(y) \leq 0$$

si ottiene

$$w(y) \leq 0 \quad , \quad \forall y \in \Omega$$

Quindi

$$w(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad h_x(y) = \overline{h}_x(y) \quad , \quad \forall y \in \Omega$$

Osservazione 10.2

$G > 0$ *in* $\Omega \times \Omega$. *Infatti fissando* $x \in \Omega$ *risulta*

$$\lim_{y \to x} G(x, y) = +\infty$$

$$\lim_{y \to z} G(x, y) = 0 \quad , \quad \forall z \in \partial\Omega$$

Allora per il principio del minimo

$$G(x, *) \geq 0 \qquad in \qquad \Omega \setminus \{x\}$$

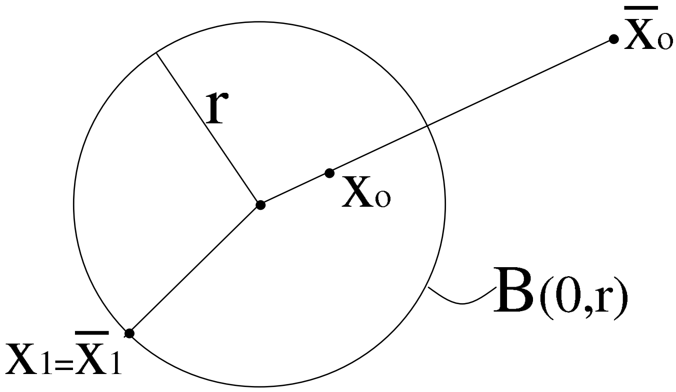
D'altra parte per il principio di minimo forte

$$G(x, *) > 0 \qquad in \qquad \Omega \setminus \{x\}$$

10.3 Funzione di Green per $B = B(0, r)$ in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$

Definizione 10.3
Sia $B = B(0, r)$, $r > 0$, una palla aperta di $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 3$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si chiama inversione rispetto a ∂B

$$\overline{x} = \left(\frac{r}{|x|} \right)^2 x$$



L'inversione rispetto a ∂B, cioè l'applicazione $x \longmapsto \overline{x}$, gode della seguente proprietà:

$$\frac{|x - y|}{|\overline{x} - y|} = \frac{|x|}{r} \quad \forall y \in \partial B \quad , \quad \forall x \in B$$

Infatti, se $|y| = r$ e $|x| < r$, si ha:

$$\frac{|x - y|^2}{|\overline{x} - y|^2} = \frac{|x|^2 + |y|^2 - 2 < x, y >}{|\overline{x}|^2 + |y|^2 - 2 < \overline{x}, y >} = \frac{|x|^2 + r^2 - 2 < x, y >}{\frac{r^4}{|x|^2} + r^2 - 2\frac{r^2}{|x|^2} < x, y >} =$$

$$= \frac{|x|^2 + r^2 - 2 < x, y >}{\frac{r^2}{|x|^2}(r^2 + |x|^2 - 2 < x, y >)} = \left(\frac{|x|}{r}\right)^2$$

Perciò, $\forall y \in \partial B$ e $\forall x \in B \setminus \{0\}$, vale:

$$\Gamma(x-y) = \Gamma\left((\overline{x} - y)\frac{|x|}{r}\right)$$

e quindi, ponendo

$$h_x(y) = \Gamma\left((\overline{x} - y)\frac{|x|}{r}\right)$$

per $y \neq \overline{x}$, risulta

$$h_x \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{\overline{x}\})$$

$$\Delta h_x(y) = 0 \qquad \text{in} \qquad \mathbb{R}^N \setminus \{\overline{x}\}$$

$$h_x(y) = \Gamma(x-y) \qquad \forall y \in \partial B$$

Allora

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - \Gamma\left((\overline{x} - y)\frac{|x|}{r}\right)$$

è la funzione di Green per $B(0,r)$, se $x \neq 0$.
D'altra parte, poichè:

$$|\overline{x} - y|^2 \frac{|x|^2}{r^2} = \left(\frac{|x|}{r}\right)^2 \left(\frac{r^4}{|x|^2} + |y|^2 - 2\frac{r^2}{|x|^2} < x, y >\right) = r^2 + \left(\frac{|x||y|}{r}\right)^2 - 2 < x, y >$$

si può scrivere

$$G(x,y) = \frac{1}{N\omega_N(N-2)}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{\left(r^2 + \left(\frac{|x||y|}{r}\right)^2 - 2 < x, y >\right)^{\frac{N}{2}-1}}\right)$$

e questa è la funzione di Green su $B(0,r)$
(per $x = 0$ è:

$$h_x = \frac{1}{N\omega_N(N-2)}\frac{1}{r^{N-2}} \qquad)$$

✓**Nota**
Vale:

$$(i) \quad G(x,y) = G(y,x) \quad x, y \in B \quad , \quad x \neq y$$

$$(ii) \quad G \in C^\infty(\{(x,y) \in B \times B / \quad x \neq y\})$$

Di conseguenza, essendo $G(x,*)$ armonica in $B \setminus \{x\}$, anche $G(*,y)$ è armonica in $B \setminus \{y\}$ ✓

10.4 Il nucleo di Poisson

Per ogni $x \in B$, $x \neq 0$, e per ogni $y \in \partial B$, si ha:

$$\nabla_y G(x,y) = -\Gamma^{'}(|x-y|)\frac{x-y}{|x-y|} + \Gamma^{'}\left(|\overline{x}-y|\frac{|x|}{r}\right)\frac{\overline{x}-y}{|\overline{x}-y|}\frac{|x|}{r} =$$

$$= \frac{1}{N\omega_N|x-y|^N}\left((x-y) - \left(\frac{|x-y|}{|\overline{x}-y|}\right)^N \left(\frac{|x|}{r}\right)^{2-N}(\overline{x}-y)\right) =$$

$$= \frac{1}{N\omega_N|x-y|^N}\left(x-y-\left(\frac{|x|}{r}\right)^2(\overline{x}-y)\right) =$$

$$= \frac{1}{N\omega_N|x-y|^N}\left(-y+\left(\frac{|x|}{r}\right)^2 y\right) = \frac{1}{N\omega_N|x-y|^N}\frac{y}{r^2}(|x|^2-r^2)$$

Ora, se $y \in \partial B$, $\dfrac{y}{r} = \nu$ (versore normale esterno) e risulta:

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} =< \nabla_y G(x,y), \nu >= \frac{1}{Nr\omega_N}\left(\frac{|x|^2-r^2}{|x-y|^N}\right)$$

(questa formula vale anche per $x = 0$)

Definizione 10.4
Per ogni $x \in B$ e per ogni $y \in \partial B$, la funzione

$$P(x,y) = \frac{1}{Nr\omega_N}\left(\frac{r^2-|x|^2}{|x-y|^N}\right)$$

si chiama nucleo di Poisson per B.

✓Nota
Se $u \in \mathcal{H}(B) \cap C^2(\overline{B})$ si ottiene

$$u(x) = \int_{\partial B} P(x,y)u(y)d\sigma(y)$$

In particolare, se $u \equiv 1$ in B, risulta

$$\int_{\partial B} P(x,y)u(y)d\sigma(y) = 1 \quad , \quad \forall x \in B$$

Inoltre

$$\Delta_x P(x,y) = \Delta_x - < \nabla_y G(x,y), \nu(y) >=$$
$$= - < \Delta_x \nabla_y G(x,y), \nu(y) >= - < \nabla_y \Delta_x G(x,y), \nu(y) >= 0$$

Infine, $P(x,y) > 0$, $\forall x, y \in B$ ✓

Teorema 10.5
Risolubilità del problema di Dirichlet per B
Sia $\varphi \in C(\partial B, \mathbb{R})$. *Posto*

$$u(x) = \int_{\partial B} P(x,y)\varphi(y)d\sigma(y)$$

risulta $u \in C^\infty(B) \cap C(\overline{B})$ *e*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \forall x \in B \\ u(y) = \varphi(y), & \forall y \in \partial B \end{cases}$$

Dimostrazione
Dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale si ricava che $u \in C^\infty(B)$.
Inoltre

$$\Delta u(x) = \int_{\partial B} \Delta_x P(x,y)\varphi(y)d\sigma(y) = 0 \quad \forall x \in B$$

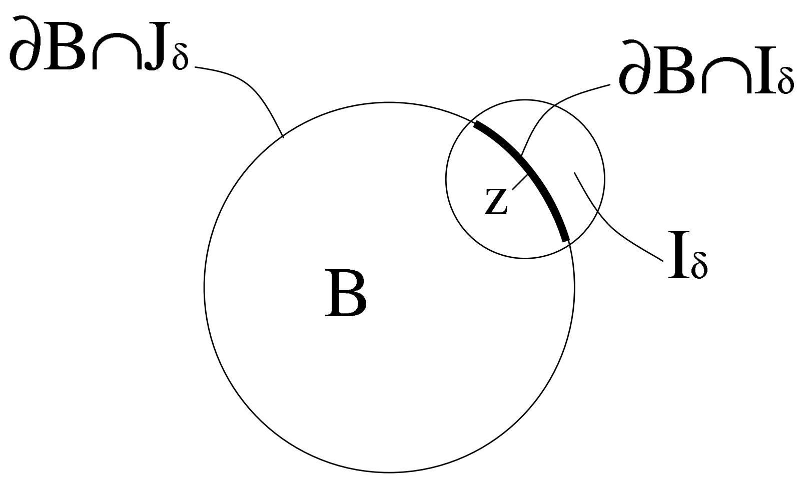
Si fissi ora $z \in \partial B$. Sia, per ogni $\delta > 0$,

$$I_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N / \quad |x - z| \leq \delta\}$$

$$J_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N / \quad |x - z| > \delta\}$$

Si ha:

$$u(x) - \varphi(z) = \int_{\partial B} P(x,y)(\varphi(y) - \varphi(z))d\sigma(y) =$$



$$= \int_{\partial B \cap I_\delta} P(x,y)(\varphi(y) - \varphi(z))d\sigma(y) + \int_{\partial B \cap J_\delta} P(x,y)(\varphi(y) - \varphi(z))d\sigma(y)$$

Quindi

$$|u(x) - \varphi(z)| \leq \sup_{\partial B \cap I_\delta} |\varphi(y) - \varphi(z)| + 2 \sup_{\partial B} |\varphi(y)| \int_{\partial B \cap J_\delta} P(x,y)d\sigma(y)$$

Così

$$\limsup_{x \to z} |u(x) - \varphi(z)| \leq \sup_{\partial B \cap I_\delta} |\varphi(y) - \varphi(z)| + 2 \sup_{\partial B} |\varphi(y)| \int_{\partial B \cap J_\delta} \limsup_{x \to z} P(x,y)d\sigma(y) =$$

$$= \sup_{\partial B \cap I_\delta} |\varphi(y) - \varphi(z)|$$

✓**Nota**
Si è potuto portare il lim sup sotto il segno di integrale perchè sull'insieme

$$\{(x,y)/ \quad y \in \partial B, \quad |y - z| > \delta, \quad x \in B, \quad |x - z| \leq \frac{\delta}{2}\}$$

la funzione $P(x,y)$ è limitata. ✓
Allora per l'arbitrarietà di δ e per la continuità di φ in z, risulta

$$\limsup_{x \to z} |u(x) - \varphi(z)| = 0$$

quindi

$$\lim_{x \to z} u(x) = \varphi(z) \quad , \quad \forall z \in \partial B$$

Così è provato che $u \in C(\overline{B})$. ♯

10.5 Il nucleo di Poisson per $B = B(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$

Sia $u \in \mathcal{H}(B)$. Allora esiste una funzione f olomorfa sul disco unitario di $\mathbb{C}$ tale che

$$u(z) = \mathrm{Re}(f(z)) \quad , \quad \forall z \in B$$

($z \Leftrightarrow (x,y) \Leftrightarrow x+iy \Leftrightarrow re^{it}$ con $r,t \in \mathbb{R}$, $r > 0$).
Per l'analiticità di f sarà

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con $|z| < 1$ e $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Ora, sia $\alpha_n = a_n - b_n$ con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, così

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(\alpha_n r^n e^{int}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \qquad (\clubsuit)$$

Si ponga ora, per $r \to 1$ ($|z| \to 1$)

$$u(re^{it}) \longrightarrow u(e^{it}) \equiv \varphi(t)$$

quindi, sempre per $r \to 1$, da ($\clubsuit$) si ricava:

$$\varphi(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

con

$$a_0 = \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \cos n\tau d\tau \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \sin n\tau d\tau \end{aligned}\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad n \geq 1$$

Allora

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos n\tau \cos nt + \sin n\tau \sin nt)\right)\varphi(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(t-\tau)}\right)\varphi(\tau)d\tau$$

Ma

$$\mathrm{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(t-\tau)}\right) = \mathrm{Re}\left(1 + 2\frac{re^{i(t-\tau)}}{1 - re^{i(t-\tau)}}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1 + re^{i(t-\tau)}}{1 - re^{i(t-\tau)}}\right) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(t-\tau)}$$

perciò

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau = \int_0^{2\pi} P(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

con

$$P(t-\tau) = P(z, z_0) \qquad \text{nucleo di Poisson per } B$$

per ogni $z \in B$ e per ogni $z_0 \in \partial B$. Infatti

$$P(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{1 - r^2}{|z - z_0|^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2\mathrm{Re}(< z, z_0 >)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(t-\tau)}$$

con

$$z = re^{it} \qquad \text{e} \qquad z_0 = e^{i\tau}$$

11 -Il metodo di Perron per la risolubilità del problema di Dirichlet

Definizione 11.1
Sia $u \in C(\Omega) \cap \mathcal{S}(\Omega)$, Ω *aperto di* $\mathbb{R}^N$ *e sia* $\varphi \in C(\partial B)$. *Per ogni palla* $B \subseteq \overline{B} \subseteq \Omega$, *si indichi con:*

$$H_\varphi^B$$

la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & in\ B \\ \\ u_{|\partial B} = \varphi \end{cases}$$

Si ponga, inoltre:

$$u_B : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u_B(x) = \begin{cases} u(x) & se \quad x \in \Omega \setminus B \\ \\ H_\varphi^B(x) & se \quad x \in B \end{cases}$$

Lemma 11.2
Sia $u \in C(\Omega)$, Ω *aperto di* $\mathbb{R}^N$. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

$$(i) \qquad u \in \mathcal{S}(\Omega)$$

$$(ii) \qquad \forall \quad B \subseteq \overline{B} \subseteq \Omega \Longrightarrow u_{|_B} \geq H_\varphi^B$$

$$(iii) \quad \forall \quad B = B(z,r) \subseteq \overline{B(z,r)} \subseteq \Omega \Longrightarrow u(z) \geq \fint_{\partial B(z,r)} u(y)d\sigma(y)$$

Dimostrazione
$(i) \Longrightarrow (ii)$
Sia

$$v : B \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad v(x) = u(x) - H_\varphi^B(x)$$

Così v è superarmonica in B (è somma di u e di una funzione armonica) e continua in $\overline{B}$. Inoltre $v_{|\partial B} = 0$. Allora per il principio di minimo delle funzioni superarmoniche $v \geq 0$ in B e quindi $u_{|B} \geq H_\varphi^B$
$(ii) \Longrightarrow (iii)$
Dalla formula risolutiva del problema di Dirichlet si ha:

$$\int_{\partial B(z,r)} P(z,y)\varphi(y)d\sigma(y) = \fint_{\partial B(z,r)} u(y)d\sigma(y)$$

Allora se vale (ii)

$$u(z) \geq H_\varphi^B(z) = \int_{\partial B(z,r)} P(z,y)\varphi(y)d\sigma(y) = \fint_{\partial B(z,r)} u(y)d\sigma(y)$$

vale anche (iii)
$(iii) \Longrightarrow (i)$
Per ipotesi, se $0 < \rho < r$, si ha

$$u(x) \geq \frac{1}{N\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(x,\rho)} u(y)d\sigma(y)$$

perciò

$$N\omega_N \rho^{N-1} u(x) \geq \int_{\partial B(x,\rho)} u(y)d\sigma(y)$$

Ora, integrando in ρ ambo i membri su $]0, r[$, si ottiene :

$$N\omega_N u(x) \int_0^r \rho^{N-1} d\rho \geq \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,\rho)} u(y)d\sigma(y) \right) d\rho$$

cioè

$$u(x) \geq M_r(u)(x) \qquad \sharp$$

Proposizione 11.3
Per ogni $u \in C(\Omega) \cap \mathcal{S}(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ e per ogni palla $B \subseteq \overline{B} \subseteq \Omega$, si ha:

$$(i) \qquad u_B \leq u$$

$$(ii) \qquad u_B \in C(\Omega) \cap \mathcal{S}(\Omega)$$

Dimostrazione
Se $u \in C(\Omega) \cap \mathcal{S}(\Omega)$, dal lemma precedente segue subito che $u_B \leq u$. Inoltre $u_B \in C(\Omega)$. Ora, sia $B^{'}$ una palla con la chiusura contenuta in Ω e sia

$$h = H^{B^{'}}_{u_B|_{\partial B^{'}}}$$

Anzitutto, poichè $u_B \leq u$ e $u \in \mathcal{S}(\Omega)$, si ha

$$u_{|_{B^{'}}} \geq H^{B^{'}}_{u_{|_{\partial B^{'}}}} \geq H^{B^{'}}_{u_B|_{\partial B^{'}}} = h$$

Ora se $B \cap B^{'} = \emptyset$, ne verrebbe, per il lemma precedente che $u_B \in \mathcal{S}(\Omega)$ (perchè $u_{B|_{B^{'}}} = u_{|_{B^{'}}}$) e la tesi risulterebbe provata. Si supponga quindi che $B \cap B^{'} \neq \emptyset$. Allora $u_{|_{B^{'}}} \geq h$ e $h = u_B$ su $\partial B^{'}$ perciò

$$u_B - h \geq 0 \qquad \text{su} \qquad \partial(B \cap B^{'})$$

e per il principio del massimo

$$u_B - h \geq 0 \qquad \text{in} \qquad B \cap B^{'}$$

In definitiva

$$h \leq \begin{cases} u_B & \text{in} \quad B \cap B^{'} \\ \\ u = u_B & \text{in} \quad B^{'} \setminus B \end{cases} \qquad \sharp$$

Definizione 11.4
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e sia $f \in C(\partial\Omega)$. Si chiama insieme delle soprafunzioni relative ad f il seguente insieme:

$$\overline{\mathcal{U}_f} = \{u \in C(\Omega) \cap \mathcal{S}(\Omega) / \quad \liminf_{x \to y} u(x) \geq f(y) \quad , \quad \forall y \in \partial\Omega\}$$

Osservazione 11.5
(i) $\quad \overline{\mathcal{U}_f} \neq \emptyset$
Infatti, basta prendere $M = \max_{\partial\Omega} f$, così la funzione costante $u \equiv M \in \overline{\mathcal{U}_f}$
(ii) Se $m = \min_{\partial\Omega} f$ allora $u \geq m$ in Ω, $\forall u \in \overline{\mathcal{U}_f}$
Infatti

$$u \in \overline{\mathcal{U}_f} \Longrightarrow (u - m) \in C(\Omega) \cap \mathcal{S}(\Omega)$$

e

$$\liminf_{x\to y}(u(x)-m)\geq 0 \quad , \quad \forall y\in\partial\Omega$$

Allora per il principio del minimo delle funzioni superarmoniche

$$u(x)-m\geq 0 \quad , \quad \forall x\in\Omega$$

(iii) $\quad u\in\overline{\mathcal{U}_f}\Longrightarrow u_B\in\overline{\mathcal{U}_f}$*, per ogni palla* $B\subseteq\overline{B}\subseteq\Omega$
Infatti per la proposizione precedente

$$u_B\in C(\Omega)\cap\mathcal{S}(\Omega)$$

Inoltre

$$\liminf_{\partial\Omega} u_B=\liminf_{\partial\Omega} u\geq f$$

Definizione 11.6
Sia Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{R}^N$*.Per ogni* $f\in C(\partial\Omega)$*, sia*

$$H_f^\Omega=\inf_{u\in\overline{\mathcal{U}_f}} u$$

Teorema 11.7
di Perron
Per ogni Ω *aperto limitato di* $\mathbb{R}^N$ *e per ogni* $f\in C(\partial\Omega)$*, risulta*

$$H_f^\Omega\in\mathcal{H}(\Omega)$$

Dimostrazione
Basta provare che H_f^Ω è armonica in ogni palla $B\subseteq\overline{B}\subseteq\Omega$. Sia, dunque, B una palla con la chiusura contenuta in Ω. Fissato $x\in B$, esiste una successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\overline{\mathcal{U}_f}$ tale che

$$u_n(x)\longrightarrow H_f^\Omega(x) \quad \text{per} \quad n\to+\infty$$

e riordinando eventualmente le u_n si può supporre $u_n\searrow$. Sostituendo ora (sempre eventualmente) u_n con $(u_n)_B$ si può supporre u_n armonica in B , $\forall n\in\mathbb{N}$. Allora la funzione

$$h=\lim_{n\to+\infty} u_n$$

è armonica in B. Ora, se fosse $H_f^\Omega = h$ in B, il teorema sarebbe provato. Si supponga, quindi , per assurdo che esista $y \in B$, $y \neq x$ tale che $H_f^\Omega(y) \neq h(y)$. Però, essendo

$$h = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n \geq \inf_{u\in\overline{\mathcal{U}_f}} u = H_f^\Omega$$

sarà

$$H_f^\Omega(y) < h(y)$$

Ripetendo, adesso, il procedimento fetto prima, si costruisca una successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathcal{U}_f}$ tale che $v_n \searrow$, $v_n \leq u_n$ (sostituendo eventualmente v_n con $\min\{v_n, u_n\}$), v_n armonica in B , $\forall n \in \mathbb{N}$ e

$$v_n(y) \longrightarrow H_f^\Omega(y) \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

Allora la funzione

$$h^* = \lim_{n\to+\infty} v_n$$

è armonica in B. Inoltre

$$h^* \leq \lim_{n\to+\infty} u_n = h$$

$$h^*(y) = H_f^\Omega(y) < h(y)$$

e

$$H_f^\Omega(x) \leq h^*(x) \leq h(x) = H_f^\Omega(x)$$

Questo è assurdo perchè: $((h - h^*) \in \mathcal{H}(\Omega))$

$$h - h^* \geq 0 \quad \text{in} \quad B$$

e

$$h(x) - h^*(x) = 0$$

perciò per il principio del massimo forte

$$h \equiv h^* \quad \text{e} \quad h^*(y) = h(y) \qquad \sharp$$

Osservazione 11.8

Se il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{in } \Omega \\ \\ u_{|\partial\Omega} = f & f \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

ha una soluzione classica $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *allora*

$$u = H_f^\Omega$$

Infatti

$$u \in \overline{\mathcal{U}_f} \Longrightarrow u \geq \inf_{v \in \overline{\mathcal{U}_f}} v = H_f^\Omega$$

Inoltre : $((v - u) \in \mathcal{S}(\Omega))$

$$v \in \overline{\mathcal{U}_f} \Longrightarrow \liminf_{\partial\Omega}(v - u) \geq 0 \Longrightarrow v \geq u \quad in \quad \Omega$$

e quindi

$$H_f^\Omega = \inf_{v \in \overline{\mathcal{U}_f}} v \geq u$$

Teorema 11.9
Il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & in\ \Omega \\ \\ u_{|\partial\Omega} = f & f \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

è risolubile se e solo se

$$\lim_{x \to y} H_f^\Omega(x) = f(y), \quad \forall y \in \partial\Omega \quad e \quad x \in \Omega$$

Dimostrazione
Segue dall'osservazione precedente $\sharp$

11.1 Il teorema di Bouligand

Definizione 11.10
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Un punto $y \in \partial\Omega$ si dice Δ-regolare, o regolare per l'operatore di Laplace, se

$$\lim_{x \to y} H_f^{\Omega}(x) = f(y), \quad \forall f \in C(\partial\Omega) \quad e \quad x \in \Omega$$

Definizione 11.11
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e sia $y \in \partial\Omega$. Una funzione $w \in C(\overline{\Omega})$ si dice barriera per Ω in y se:

$$\begin{array}{ll} (i) & w \in \mathcal{S}(\Omega) \\ (ii) & w(x) > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{y\} \\ (iii) & w(y) = 0 \end{array}$$

Teorema 11.12
di Bouligand
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e sia $y \in \partial\Omega$. Se esiste una barriera per Ω in y, allora y è Δ-regolare.

Dimostrazione
Sia w una barriera per Ω in y, e sia poi $f \in C(\partial\Omega)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(y) - \varepsilon < f(z) < f(y) + \varepsilon \qquad \forall z \in \partial\Omega, \quad |z - y| \leq \delta$$

Poichè $w \in C(\overline{\Omega})$ e $w(z) > 0$, $\forall z \in \overline{\Omega} \setminus \{y\}$, esiste $m > 0$, tale che

$$w(z) \geq m \qquad \forall z \in \Omega, \quad |z - y| > \delta$$

Si ponga, ora:

$$v(z) = f(y) + \varepsilon + Mw(z) \quad \text{con} \quad M \geq \frac{2 \sup\limits_{\partial\Omega} |f|}{m}$$

Si ha $v \in C(\Omega) \cap \mathcal{S}(\Omega)$, inoltre, se $z \in \partial\Omega$ e $x \in \Omega$

$$\liminf_{x \to z} v(x) \geq f(y) + \varepsilon > f(z) \quad \text{se} \quad |z - y| \leq \delta$$

$$\liminf_{x \to z} v(x) \geq f(y) + Mm \geq f(z) \quad \text{se} \quad |z - y| > \delta$$

Quindi $v \in \overline{\mathcal{U}_f}$ e perciò

$$(i) \qquad v \geq \inf_{u \in \overline{\mathcal{U}_f}} u = H_f^{\Omega}$$

Sia invece adesso

$$v_0(z) = f(y) - \varepsilon - Mw(z)$$

Per ogni $u \in \overline{\mathcal{U}_f}$ risulta $u - v_0 \in \mathcal{S}(\Omega)$. Inoltre, se $z \in \partial\Omega$ e $x \in \Omega$

$$\liminf_{x \to z} (u(x) - v_0(x)) \geq f(z) - f(y) + \varepsilon > 0 \quad \text{se} \quad |z - y| \leq \delta$$

$$\liminf_{x \to z} (u(x) - v_0(x)) \geq f(z) - f(y) + Mm \geq 0 \quad \text{se} \quad |z - y| > \delta$$

Allora per il principio di minimo per le funzioni superarmoniche

$$u(x) - v_0(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

quindi

$$u \geq v_0, \quad \forall u \in \overline{\mathcal{U}_f}$$

perciò

$$(ii) \qquad H_f^{\Omega} = \inf_{u \in \overline{\mathcal{U}_f}} u \geq v_0$$

Ora, da (i) e da (ii), per la continuità di w in y ed essendo $w(y) = 0$, si ha:

$$f(y) - \varepsilon = \liminf_{x \to y} v_0(x) \leq \liminf_{x \to y} H_f^{\Omega}(x) \leq \limsup_{x \to y} H_f^{\Omega}(x) \leq \limsup_{x \to y} v(x) = f(y) + \varepsilon$$

Ma, per l'arbitrarietà di ε, ciò implica

$$f(y) = \liminf_{x \to y} H_f^{\Omega}(x) = \limsup_{x \to y} H_f^{\Omega}(x)$$

cioè

$$\lim_{x \to y} H_f^{\Omega}(x) = f(y) \qquad \sharp$$

11.2 Il criterio della palla tangente esternamente (di Poincaré)

Definizione 11.13
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $y \in \partial\Omega$. Si dice che Ω ha la proprietà della palla tangente esternamente nel punto y, se esiste una palla $B = B(z,r)$, $z \in \mathbb{R}^N$, tale che:

$$B \cap \Omega = \emptyset \qquad e \qquad y \in \partial B$$

Osservazione 11.14
Quello della palla tangente esternamente è un criterio geometrico per l'esistenza di una barriera per Ω in y. Infatti, sia $y \in \partial\Omega$ un punto nel quale esiste una palla $B = B(z,r)$ tangente esternamente a Ω. Si ponga

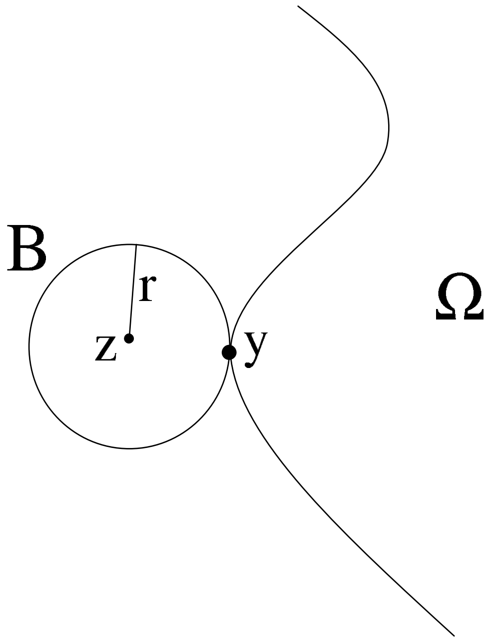
$$w(x) = \begin{cases} log\left(\frac{|x-z|}{r}\right) & se \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \\ \frac{1}{r^{N-2}} - \frac{1}{|x-z|^{N-2}} & se \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3 \end{cases}$$

Risulta:

$$w \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{z\}) \Longrightarrow w \in C(\overline{\Omega})$$
$$\Delta w = 0 \quad in \quad \Omega \Longrightarrow w \in \mathcal{S}(\Omega)$$
$$w(x) > 0 \quad in \quad \mathbb{R}^N \setminus B \Longrightarrow w(x) > 0 \quad in \quad \overline{\Omega} \setminus \{y\}$$

Infine $w(y) = 0$.

Osservazione 11.15
Una condizione sufficiente affinchè Ω abbia la proprietà della palla tangente esternamente in ogni suo punto di frontiera è che Ω stia localmente da una stessa parte di $\partial\Omega$ e che $\partial\Omega$ sia una (N-1)-varietà di classe C^2.



Corollario 11.16
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ con $\partial\Omega \in C^2$ e tale che, localmente, Ω stia da una stessa parte di $\partial\Omega$ (o equivalentemente Ω sia dotato di normale esterna in ogni punto di $\partial\Omega$). Allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \\ u_{|\partial\Omega} = f & f \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione classica per ogni $f \in C(\partial\Omega)$.

Dimostrazione
Se, per ipotesi, Ω (localmente) sta da una stessa parte di $\partial\Omega$ allora esiste (localmente) una palla tangente esternamente. Di conseguenza esiste una barriera per Ω in ogni suo punto di frontiera. Ora, per il teorema di Bouligand, ogni punto di $\partial\Omega$ è Δ-regolare, quindi il problema di Dirichlet è risolubile. Adesso, se per assurdo esistessero u e v entrambe soluzioni, allora $w = u - v$ sarebbe soluzione del problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ \\ w_{|\partial\Omega} = 0 & f \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

Applicando il principio del minimo con la condizione

$$\liminf_{\partial\Omega} w(x) \geq 0$$

si ottiene

$$w(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in \Omega$$

Ora, sempre per il principio del minimo, ma con la condizione

$$\liminf_{\partial\Omega} -w(x) \geq 0$$

si ottiene

$$w(x) \leq 0 \quad , \quad \forall x \in \Omega$$

Quindi

$$w(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u(x) = v(x) \quad , \quad \forall x \in \Omega \qquad \sharp$$

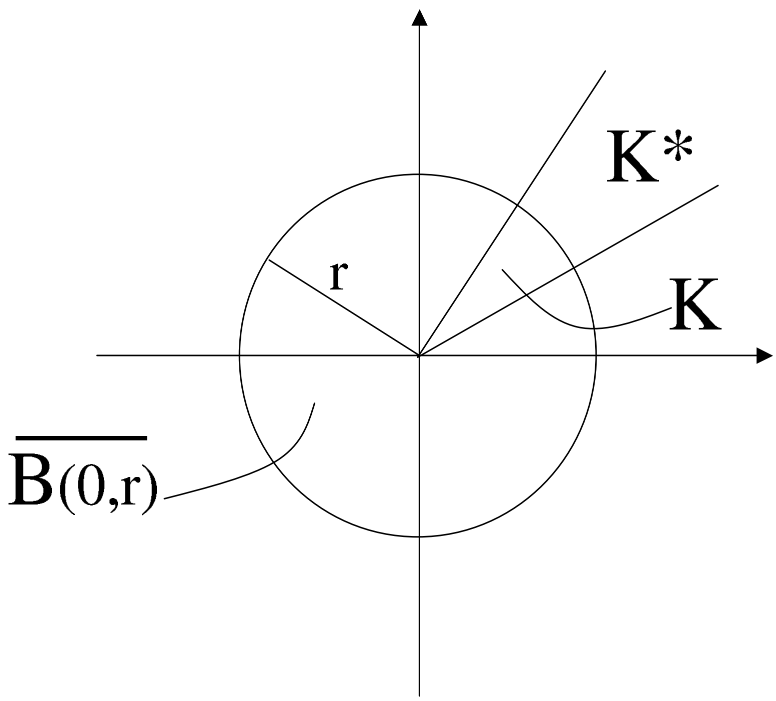
11.3 Il criterio di cono esterno (di Zaremba)

Definizione 11.17
Si dice cono di $\mathbb{R}^N$, *un sottoinsieme* K *di* $\mathbb{R}^N$ *tale che:*

$$\begin{array}{ll} (i) & x+y \in K, \quad \forall x, y \in K \\ (ii) & \lambda x \in K, \quad \forall x \in K, \quad \forall \lambda \geq 0 \end{array}$$

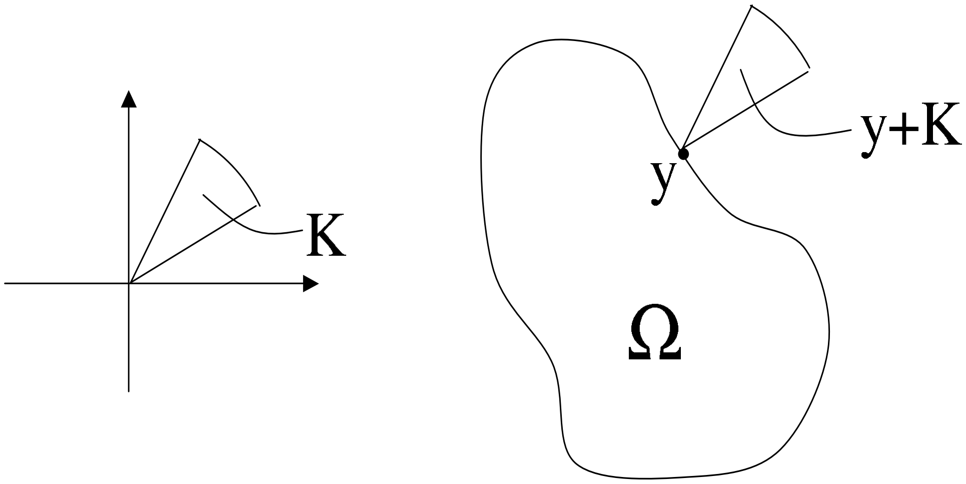
Si dice, invece, cono troncato di $\mathbb{R}^N$, *un sottoinsieme* K *di* $\mathbb{R}^N$ *tale che, dati un cono* K^* *di* $\mathbb{R}^N$ *e* $r > 0$

$$K = K^* \cap \overline{B(0,r)}$$



Definizione 11.18
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $y \in \partial\Omega$. Si dice che Ω ha la proprietà di cono esterno in y, se esiste un cono troncato di $\mathbb{R}^N$, K, tale che

$$\begin{array}{ll} (i) & \mathrm{int} K \neq \emptyset \\ (ii) & y + K \subseteq \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{array}$$



Proposizione 11.19
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $y \in \partial\Omega$. Se in un intorno di y, la frontiera è lipschitziana, allora Ω ha la proprietà di cono esterno in y.

Dimostrazione
Non è restrittivo supporre $y = 0$, e, per $r > 0$ opportuno

$$\Omega \cap \overline{B(0,r)} = \{(t, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} / \quad |t| \le r, \quad x_N < \varphi(t)\}$$

$$\partial\Omega \cap \overline{B(0,r)} = \{(t, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} / \quad |t| \le r, \quad x_N = \varphi(t)\}$$

dove

$$\varphi : \{t \in \mathbb{R}^{N-1} / \quad |t| < r\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

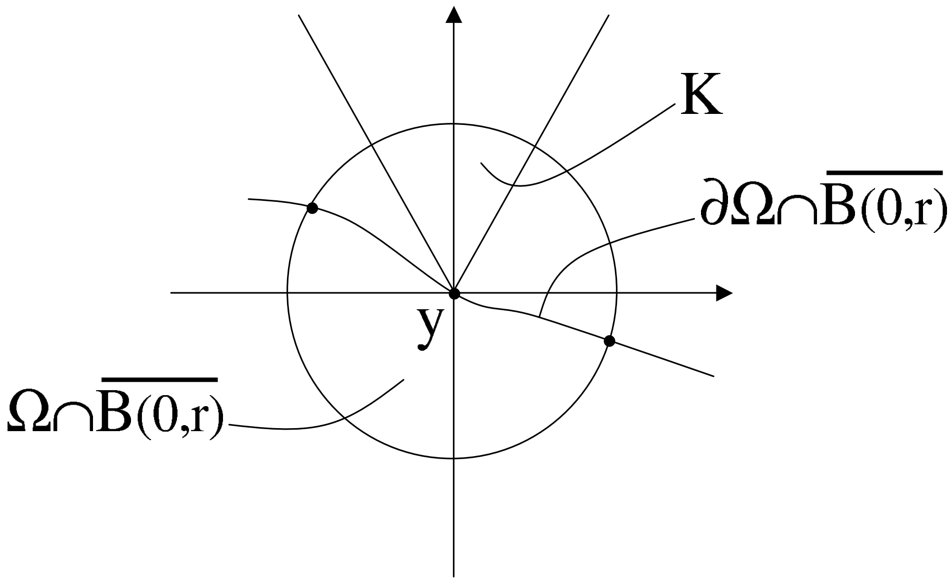
verifica la disuguaglianza

$$|\varphi(t)| \le M|t|, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^{N-1}$$

con M costante positiva opportuna. Si ponga

$$K = \{(t, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} / \quad x_N \geq M|t|\} \cap \overline{B(0,r)}$$

Si riconosce subito che K è un cono troncato, con interno non vuoto e contenuto in $\mathbb{R}^N$.♯



Osservazione 11.20
Se K è un cono con interno non vuoto allora esiste $K_0 \subseteq K$, tale che

$$(i) \quad \mathrm{int} K_0 \neq \emptyset$$
$$(ii) \quad \partial K_0 \setminus \{0\} \in C^\infty$$

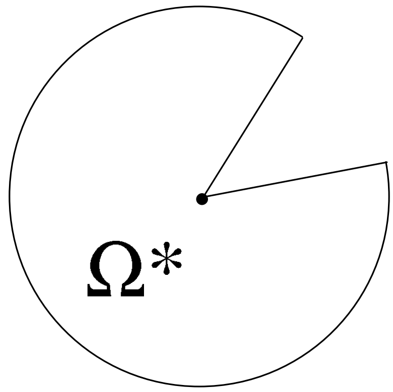
Lemma 11.21
Sia K un cono chiuso di $\mathbb{R}^N$ con interno non vuoto e con $\partial K \setminus \{0\} \in C^\infty$. Sia $r > 0$ e si ponga

$$\Omega^* = B \setminus K \qquad B = B(0, r)$$

Sia poi $\varphi : \partial\Omega^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(y) = |y|$. Allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega^* \\ \\ u_{|\partial\Omega^*} = \varphi \end{cases}$$

è risolubile.



Dimostrazione
Sia $h : \overline{\Omega^*} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} H_{\varphi}^{\Omega^*}(x) & \text{se} \quad x \in \Omega^* \\ \\ \varphi(x) & \text{se} \quad x \in \partial\Omega^* \end{cases}$$

Si deve provare che $h \in C(\overline{\Omega^*}, \mathbb{R})$. Ora, in ogni punto $y \in \partial\Omega^* \setminus \{0\}$, Ω^* ha la proprietà della palla tangente esternamente ($\partial K_0 \setminus \{0\} \in C^\infty$, perciò K ha la proprietà della palla tangente internamente in ogni suo punto di frontiera tranne l'origine). Quindi h è continua in $\Omega^* \setminus \{0\}$. Si fissi, ora, $0 < \lambda < 1$ e si ponga

$$\Omega_\lambda^* = \lambda\Omega^* = \{\lambda x / \quad x \in \Omega^*\} = \{x \in \mathbb{R}^N / \quad \frac{x}{\lambda} \in \Omega^*\}$$

e

$$h_\lambda : \overline{\Omega_\lambda^*} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h_\lambda(x) = h(\frac{x}{\lambda})$$

Si osservi che

$$\sup_{\substack{|x| = \lambda r \\ x \in \Omega^*}} h(x) < r$$

Infatti h è positiva e armonica in Ω^*, $h \leq r$, $h = r$ su $\partial B \cap \Omega^*$, $h < r$ su $\partial\Omega^* \cap B \setminus \{0\}$. Per il principio di massimo forte allora si ha che $h < r$ in Ω^*. In particolare

$$h(x) < r \qquad \forall x \in \Omega^*, \quad |x| = \lambda r$$

Inoltre h è continua su $\overline{\Omega^*} \cap \{|x| = \lambda r\}$ e se $x \in \partial\Omega^*$, $h(x) = |\lambda x| = \lambda r < r$. Allora

$$\sup_{\substack{|x| = \lambda r \\ x \in \Omega^*}} h(x) \leq \max_{\substack{|x| = \lambda r \\ x \in \overline{\Omega^*}}} h(x) < r$$

Sia ora $\lambda < \varepsilon < 1$ e sia

$$u : \Omega^*_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad u(x) = h(x) - \varepsilon h_\lambda(x)$$

Si vede subito che u è armonica in Ω^*_λ (h è armonica e $\Delta h_\lambda = \lambda^2(\Delta h)_\lambda = 0$). Inoltre se $y \in \partial\Omega^*_\lambda \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to y} u(x) = \begin{cases} h(x) - \varepsilon r \leq 0 & \text{se} \quad |y| = \lambda r \\ \\ |y| - \varepsilon\frac{|y|}{\lambda} \leq 0 & \text{se} \quad y \in \partial K \end{cases}$$

D'altra parte, u è limitata in Ω^*_λ, quindi $\limsup_{x \to 0} u(x) < +\infty$, pertanto

$$u \leq 0 \quad \text{in} \quad \Omega^*_\lambda$$

o, equivalentemente

$$h(x) \leq \varepsilon h_\lambda(x) \qquad \forall x \in \Omega^*_\lambda$$

Risulta, allora

$$\limsup_{\substack{x \to 0 \\ x \in \Omega^*}} h(x) = \limsup_{\substack{x \to 0 \\ x \in \Omega^*_\lambda}} h(x) \leq \varepsilon \limsup_{\substack{x \to 0 \\ x \in \Omega^*_\lambda}} h_\lambda(x) =$$

$$= \varepsilon \limsup_{\substack{x \to 0 \\ x \in \Omega^*_\lambda}} h(\frac{x}{\lambda}) = \varepsilon \limsup_{\substack{x \to 0 \\ x \in \Omega^*}} h(x)$$

Di conseguenza, per l'arbitrarietà di ε, $0 < \varepsilon < 1$, si ha

$$\limsup_{x \to 0} h(x) \leq 0 \qquad \forall x \in \Omega^*$$

cioè (h è positiva in Ω^*)

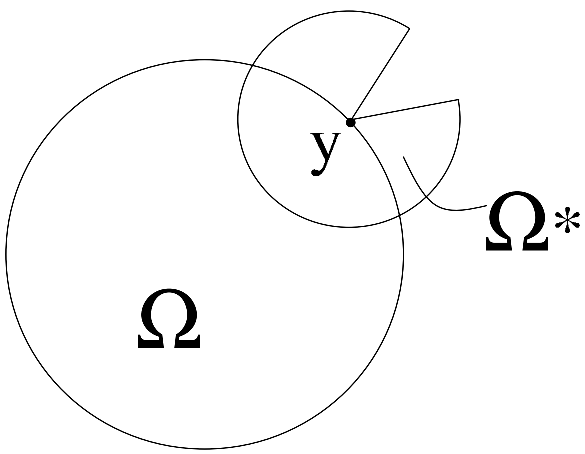
$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega^* \qquad \sharp$$

Corollario 11.22
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ con la frontiera lipschitziana. Allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \\ u_{|\partial\Omega} = f & f \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione classica per ogni $f \in C(\partial\Omega)$.

Dimostrazione
Se, per ipotesi, $\partial\Omega$ è lipschitziana, allora Ω ha la proprietà di cono esterno in ogni suo punto di frontiera. Ora, per il lemma precedente, il problema di Dirichlet è risolubile in Ω^*, quindi ,in particolare, in Ω. $\sharp$



12 - Potenziali newtoniani

Si supponga sempre $N \geq 3$ e si indichi con Γ la soluzione fondamentale per Δ in $\mathbb{R}^N$ con polo in 0.

Definizione 12.1
Formalmente, si chiama potenziale newtoniano di f, la funzione $\Gamma * f$

✓ ***Nota***
Se $g, f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, formalmente, si chiama convoluzione di g con f (o g convoluto f), la funzione

$$(g * f)(x) = \int_\Omega g(x-y)f(y)dy$$

con Ω aperto di $\mathbb{R}^N$. ✓

Teorema 12.2
Sia $f \in L^\infty(\Omega)$, Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. Convenendo di porre $f(x) = 0$ se $x \notin \Omega$, risulta:

(i) $\quad \Gamma * f \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$

(ii) $\quad D_{x_j}(\Gamma * f)(x) = \int_\Omega D_{x_j}\Gamma(x-y)f(y)dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad j = 1, ..., N$

✓**Nota**
Si osservi che, con le ipotesi assunte, $\Gamma * f$ è ben definita. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha per definizione

$$(\Gamma * f)(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy$$

e la funzione $y \longmapsto \Gamma(x-y)f(y)$ è sommabile su Ω, in quanto $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $f \in L^\infty(\Omega)$. ✓

Dimostrazione

Si ponga (per comodità) $u = \Gamma * f$. Sia $r = \mathrm{diam}(\Omega)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Si ha:

$$|u(x)| \leq \sup_\Omega |f| \int_\Omega \Gamma(x-y)dy \leq \sup_\Omega |f| \int_{B(x,r)} \Gamma(x-y)dy =$$

$$= \sup_\Omega |f| \int_{B(0,r)} \Gamma(y)dy = C(r) \sup_\Omega |f|$$

dove

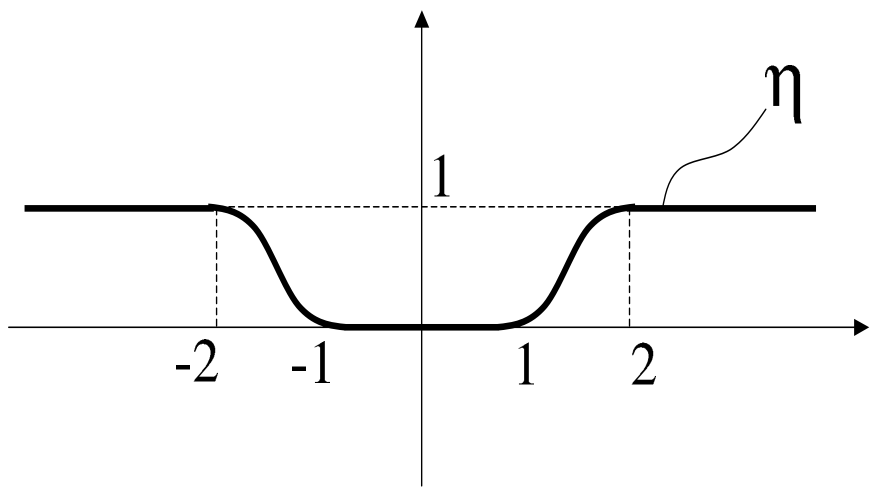
$$C(r) = \int_{B(0,r)} \Gamma(y)dy = \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \int_0^r \left(\int_{|y|=\rho} |y|^{2-N} d\sigma(y) \right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{N(N-2)\omega_N} N\omega_N \int_0^r \rho d\rho = \frac{r^2}{2(N-2)}$$

Così

$$\sup_{\mathbb{R}^N} |u| \leq C(r) \sup_\Omega |f|$$

cioè $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sia ora $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 0$ in $[-1,1]$, $\eta \equiv 1$ in $\mathbb{R} \setminus [-2,2]$.



Per ogni $\varepsilon > 0$, sia

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y)dy$$

La funzione

$$(x,y) \longmapsto \Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)$$

è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Quindi si ha, per ogni multiindice α intero e non negativo, e per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\sup_{y\in\Omega}\left|D_x^\alpha\left(\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right)\right| \leq \sup_{y\in B(x,r)}\left|D_x^\alpha\left(\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right)\right| =$$

$$= \sup_{y\in B(0,r)}\left|D^\alpha\left(\Gamma(y)\eta\left(\frac{|y|}{\varepsilon}\right)\right)\right| \leq M_{\alpha,\varepsilon} < +\infty$$

dove $M_{\alpha,\varepsilon}$ è una costante dipendente da α e da ε. Ne viene, allora, che $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Inoltre

$$D_{x_j}u_\varepsilon(x) = \int_\Omega D_{x_j}\left(\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right) f(y)dy$$

Si ponga, ora

$$v_j(x) = \int_\Omega D_{x_j}(\Gamma(x-y))f(y)dy$$

Innanzitutto $v_j(x)$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, infatti:

$$\int_\Omega |D_{x_j}(\Gamma(x-y))f(y)|dy \leq \sup_\Omega |f| \int_\Omega \left|\frac{1}{N|x-y|^{N-1}\omega_N}\frac{(x_j-y_j)}{|x-y|}\right| dy \leq$$

$$\leq \left(\left|\frac{(x_j-y_j)}{|x-y|}\right| \leq 1\right) \leq \sup_\Omega |f| \int_{B(0,r)} \frac{1}{N|y|^{N-1}\omega_N} =$$

$$= \sup_\Omega |f| \int_0^r \frac{1}{N\omega_N}\left(\int_{|y|=\rho}\frac{1}{|y|^{N-1}}d\sigma(y)\right)d\rho = r\sup_\Omega |f|$$

Con ciò si è provato anche che $v_j \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Ora:

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| = \left|\int_\Omega \Gamma(x-y)\left(\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) - 1\right) f(y)dy\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\Omega} |f| \int_{|x-y|\leq 2\varepsilon} \Gamma(x-y)dy = C(2\varepsilon) \sup_{\Omega} |f| =$$

$$= \frac{2\varepsilon^2}{N-2} \sup_{\Omega} |f| \longrightarrow 0, \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0$$

Questo prova che $u_\varepsilon(x) \rightrightarrows u(x)$ in $\mathbb{R}^N$, per $\varepsilon \to 0$. Infine

$$D_{x_j} u_\varepsilon(x) - v_j(x) = \int_{\Omega} D_{x_j} \left(\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) - \Gamma(x-y) \right) f(y)dy =$$

$$= \int_{\Omega} \left[\left(D_{x_j}\Gamma(x-y)\right)\left(\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) - 1\right) + \Gamma(x-y)D_{x_j}\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right] f(y)dy$$

e quindi

$$|D_{x_j}u_\varepsilon(x) - v_j(x)| \leq \sup_{\Omega} |f| \left(\int_{|x-y|\leq 2\varepsilon} \Gamma'(x-y)dy + \frac{1}{\varepsilon}\sup_{\mathbb{R}} |\eta'| \int_{|x-y|\leq 2\varepsilon} \Gamma(x-y)dy \right) =$$

$$= \sup_{\Omega} |f| \left(2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\mathbb{R}} |\eta'| \frac{2\varepsilon^2}{N-2} \right) \longrightarrow 0, \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0$$

Cosi è provato che anche $D_{x_j}u_\varepsilon \rightrightarrows v_j$ in $\mathbb{R}^N$, per $\varepsilon \to 0$. ♯

Teorema 12.3
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, e sia Ω_0 un aperto regolare (per il teorema della divergenza) di $\mathbb{R}^N$, contenente $\overline{\Omega}$. Sia poi $f \in C^\alpha_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, con $0 < \alpha < 1$. Allora, convenendo di porre $f(x) = 0$ se $x \notin \Omega$, risulta:

$$\Gamma * f \in C^2(\Omega)$$

Inoltre,per ogni $x \in \Omega$, si ha:

$$D_{x_i x_j}(\Gamma * f)(x) = \int_{\Omega_0} D_{x_i x_j}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_{x_j}\Gamma(x-y)\nu_i(y)d\sigma(y)$$

✓Nota
Un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ si dice regolare per il teorema della divergenza se esiste una funzione $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che

$$\text{Int}\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N / \quad F(x) < 0\}$$

e

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N / \quad F(x) = 0\}$$

Inoltre è definito il versore normale esterno

$$\nu(x) = \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|} \qquad \checkmark$$

✓Nota

Si dice che f è Hölderiana (di ordine α) in Ω, cioè $f \in C^\alpha(\Omega)$, con $0 < \alpha < 1$, se:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \Omega, \quad \text{con M costante positiva} \qquad \checkmark$$

Dimostrazione

Per il teorema precedente si ha che $u = \Gamma * f$ è di classe C^1 in $\mathbb{R}^N$, in particolare in Ω, e

$$D_{x_j}u(x) = \int_\Omega D_{x_j}\Gamma(x-y)f(y)dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad j = 1, ..., N$$

Sia ora η la stessa funzione introdotta nel corso della precedente dimostrazione. Si ponga, per comodità

$$w_\varepsilon(x) = \int_\Omega D_{x_j}\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)f(y)dy$$

e per ogni $x \in \Omega$

$$w(x) = \int_{\Omega_0} D_{x_ix_j}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int_{\partial\Omega_0} D_{x_j}\Gamma(x-y)\nu_i(y)d\sigma(y)$$

La definizione di $w(x)$ è ben posta, per ogni $x \in \Omega$. Infatti, se $x \in \Omega$, esiste $r > 0$, tale che $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$; poichè f è Hölderiana localmente in Ω (cioè in ogni compatto contenuto in Ω), risulta

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha, \quad \forall y \in \overline{B(x,r)}$$

con M opportuna costante positiva, eventualmente dipendente da r. Quindi

$$\int_{\Omega_0} |D_{x_ix_j}\Gamma(x-y)||f(y)-f(x)|dy =$$

$$= \int_{B(x,r)} |D_{x_ix_j}\Gamma(x-y)||f(y)-f(x)|dy + \int_{\Omega_0\setminus B(x,r)} |D_{x_ix_j}\Gamma(x-y)||f(y)-f(x)|dy \leq$$

$$\leq \frac{2M}{\omega_N}\int_{B(x,r)} |x-y|^{-N+\alpha}dy + \frac{4\sup_\Omega|f|}{\omega_N}\int_{\Omega_0\setminus B(x,r)} |x-y|^{-N}dy =$$

$$= 2MN\frac{r^\alpha}{\alpha} + 4\sup_\Omega|f|N\int_r^R \rho^{-1}d\rho$$

dove $R = \mathrm{diam}(\Omega_0)$ Si osservi, inoltre, che $w_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, e che

$$D_{x_i}w_\varepsilon(x) = \int_\Omega D_{x_i}\left(D_{x_j}\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right)f(y)dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad j = 1, ..., N$$

Sia ora $x \in \Omega$ e $r > 0$ tale che $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$. per provare la tesi occorre dimostrare

$$(i) \quad w_\varepsilon \rightrightarrows D_{x_j}u \quad , \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^N$$

$$(ii) \quad D_{x_i}w_\varepsilon \rightrightarrows w \quad , \qquad \text{in} \quad B(x, \tfrac{r}{2})$$

La (i) si prova come le affermazioni analoghe del precedente teorema; si consideri allora la (ii). Per ogni $z \in B(x,r)$, si ha

$$D_{z_i}w_\varepsilon(z) = \int_{\Omega_0} D_{z_i}\left(D_{z_j}\Gamma(z-y)\eta\left(\frac{|z-y|}{\varepsilon}\right)\right)(f(y)-f(z))dy +$$

$$+ f(z)\int_{\Omega_0} D_{z_i}\left(D_{z_j}\Gamma(z-y)\eta\left(\frac{|z-y|}{\varepsilon}\right)\right)dy$$

Ora, se $2\varepsilon < \mathrm{dist}(z, \partial\Omega_0)$, per il teorema della divergenza

$$\int_{\Omega_0} D_{z_i}\left(D_{z_j}\Gamma(z-y)\eta\left(\frac{|z-y|}{\varepsilon}\right)\right)dy = -\int_{\partial\Omega_0} D_{x_j}\Gamma(x-y)\nu_i(y)d\sigma(y)$$

quindi,

$$|D_{z_i}w_\varepsilon(z) - w(z)| = \left|\int_{\Omega_0} D_{z_i}\left(D_{z_j}\Gamma(z-y)\left(\eta\left(\frac{|z-y|}{\varepsilon}\right)-1\right)\right)(f(y)-f(z))dy\right| \leq$$

$$\leq \int_{\Omega_0\cap B(z,2\varepsilon)} |D_{z_i}D_{z_j}\Gamma(z-y)||(f(y)-f(z))|dy +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\sup_{\mathbb{R}}|\eta'|\int_{\Omega_0\cap B(z,2\varepsilon)} |D_{z_j}\Gamma(z-y)||(f(y)-f(z))|dy$$

D'altra parte

$$|f(z) - f(y)| \leq M|z-y|^\alpha, \quad \forall z, y \in \overline{B(x,r)}$$

Così, per ogni $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \dfrac{r}{4}$, se $z \in B(x, \frac{r}{2})$ allora $B(z, 2\varepsilon) \subseteq \overline{B(x,r)}$, quindi

$$|D_{z_i} w_\varepsilon(z) - w(z)| \leq M \left[\int_{B(z,2\varepsilon)} |D_{z_i} D_{z_j} \Gamma(z-y)||z-y|^\alpha dy \right] +$$

$$+ M \left[\frac{1}{\varepsilon} \sup_{\mathbb{R}} |\eta'| \int_{B(z,2\varepsilon)} |D_{z_j} \Gamma(z-y)||z-y|^\alpha dy \right]$$

Inoltre, se $z \in B(x, \frac{r}{2})$

$$|D_{z_j} \Gamma(z-y)| \leq C_{(1,N)} |x-y|^{-N}$$

e

$$|D_{z_i} D_{z_j} \Gamma(z-y)| \leq C_{(2,N)} |x-y|^{-N+1}$$

con $C_{(1,N)}$ e $C_{(2,N)}$ costanti dipendenti da N. Infine

$$|D_{z_i} w_\varepsilon(z) - w(z)| \leq M \left[C_{(2,N)} N \omega_N \int_0^{2\varepsilon} \rho^{-1+\alpha} d\rho + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\mathbb{R}} |\eta'| C_{(1,N)} N \omega_N \int_0^{2\varepsilon} \rho^\alpha d\rho \right] \leq$$

$$\leq C_{(\alpha,M,N)} \varepsilon^\alpha \longrightarrow 0, \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0 \qquad \forall z \in B(x, \frac{r}{2})$$

con $C_{(\alpha,M,N)}$ costante dipendente da α, M, ed N. $\sharp$

Corollario 12.4
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Nelle ipotesi del teorema precedente, si ha:

$$\Delta(\Gamma * f)(x) = -f(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

Dimostrazione
Sia $x \in \Omega$ e sia $\Omega_0 = B(x,R)$ tale che $\overline{\Omega} \subseteq \Omega_0$. Allora per il teorema precedente

$$\Delta(\Gamma * f)(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_0} D_{x_j x_j} \Gamma(x-y)(f(y) - f(x)) dy \right) - f(x) \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_0} D_{x_j} \Gamma(x-y) \nu_i(y) d\sigma(y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{B(x,R)} \frac{1}{\omega_N} |x-y|^{-N} \left(\frac{(x_j - y_j)^2}{|x-y|^2} - \frac{1}{N} \right) (f(y) - f(x)) dy \right) +$$

$$-f(x) \int_{\partial B(x,R)} < \nabla_x \Gamma(x-y), \frac{y-x}{|y-x|} > d\sigma(y) =$$

$$= -f(x) \int_{\partial B(x,R)} \Gamma^{'}(|x-y|) < \frac{x-y}{|x-y|}, \frac{y-x}{|y-x|} > d\sigma(y) =$$

$$= f(x) \int_{|x-y|=R} \Gamma^{'}(|x-y|) d\sigma(y) =$$

$$= f(x) \Gamma^{'}(R) N \omega_N R^{N-1} = -f(x) \qquad \sharp$$

Corollario 12.5
Sia $B = B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^N$ *e sia* $f \in C^{\alpha}_{loc}(B) \cap C(\overline{B})$, $0 < \alpha < 1$. *Sia poi* G *la funzione di Green per* B. *Si ponga*

$$w(x) = \int_B G(x,y) f(y) dy \quad , \quad \forall x \in B$$

Risulta allora

$$(i) \quad w \in C^2(B)$$

$$(ii) \quad \Delta w(x) = -f(x), \quad \forall x \in B$$

$$(iii) \quad w(x) \longrightarrow 0, \quad per \quad x \to y, \qquad \forall y \in \partial B$$

Dimostrazione
La funzione di Green per B è

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - \overline{\Gamma}(x,y)$$

dove

$$\overline{\Gamma}(x,y) = \frac{\left(R^2 + \left(\frac{|x||y|}{R} \right)^2 - 2 < x, y > \right)^{-\frac{N}{2}+1}}{N(N-2)\omega_N}$$

Ponendo

$$w_1(x) = \int_B \Gamma(x-y) f(y) dy$$

e

$$w_2(x) = \int_B \overline{\Gamma}(x,y)f(y)dy$$

si può scrivere

$$w(x) = w_1(x) - w_2(x)$$

Per il corollario precedente, risulta

$$w_1 \in C^2(B)$$

e

$$\Delta w_1(x) = -f(x), \quad \forall x \in B$$

Ora, se $|x| < r < R$ e $|y| < \dfrac{R^2}{r}$, per ogni fissato $r \in]0, R[$ si ha

$$R^2 + \left(\frac{|x||y|}{R}\right)^2 - 2 < x, y > \quad \geq R^2 + \left(\frac{|x||y|}{R}\right)^2 - 2|x||y| =$$

$$= \left(R - \frac{|x||y|}{R}\right)^2 > 0$$

così

$$\overline{\Gamma} \in C^\infty(B(0,r) \times B(0, \frac{R^2}{r}))$$

e

$$w_2 \in C^\infty(B(0,r)), \qquad \forall r < R$$

quindi

$$w_2 \in C^\infty(B(0,R))$$

D'altra parte $\overline{\Gamma}(x,y) = \overline{\Gamma}(y,x)$ per ogni $x, y \in B$, e, poichè per $x \neq 0$

$$\overline{\Gamma}(x,y) = \Gamma\left((\overline{x} - y)\frac{|x|}{R}\right)$$

con $\overline{x} = \left(\dfrac{R}{|x|}\right)^2 x$, si ha che la funzione $y \longmapsto \overline{\Gamma}(x,y)$ è armonica per ogni $x \in B \setminus \{0\}$. Di conseguenza

$$\Delta_x w_2(x) = \int_B \Delta_x \overline{\Gamma}(x,y)f(y)dy =$$

$$= \int_B \Delta_x \overline{\Gamma}(y,x) f(y) dy = 0 \qquad \forall x \in B \setminus \{0\}$$

Ora, essendo $w_2 \in C^\infty(B)$, risulta che anche

$$\Delta_x w_2(0) = \lim_{0 \neq x \to 0} \Delta_x w_2(x) = 0$$

e quindi

$$w \in C^2(B)$$

e

$$\Delta w(x) = -f(x), \quad \forall x \in B$$

Infine, per quanto riguarda (iii), si osservi che posto

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2N}$$

risulta

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^N),$$

$$\Delta u(x) = -1, \quad \forall x \in B$$

e

$$u(x) = 0, \quad \forall x \in \partial B$$

Quindi, per la formula di rappresentazione di Green, si ha

$$u(x) = \int_{\partial B} P(x,y) u(y) d\sigma(y) - \int_B G(x,y) \Delta u(y) dy =$$

$$= \int_B G(x,y) dy, \quad \forall x \in B$$

Allora

$$|w(x)| \leq \sup_{\overline{B}} |f| \int_B G(x,y) dy =$$

$$= \sup_{\overline{B}} |f| u(x) \longrightarrow 0, \quad \text{per} \quad x \to y, \qquad \forall y \in \partial B \qquad \sharp$$

Corollario 12.6
Sia $B = B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^N$. *Siano poi* $\varphi \in C(\partial B)$ *e* $f \in C^\alpha_{loc}(B) \cap C(\overline{B})$, $0 < \alpha < 1$. *Allora*

$$u(x) = \int_{\partial B} P(x,y) \varphi(y) d\sigma(y) - \int_B G(x,y) f(y) dy \qquad (\clubsuit)$$

è una funzione di classe C^2 *in* B*, tale che*

$$\Delta u(x) = f(x), \quad \forall x \in B$$

$$\lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y), \quad \forall y \in \partial B$$

cioè, la funzione (♣) *è la soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), \quad \forall x \in B \\ \\ u(y) = \varphi(y), \quad \forall y \in \partial B \end{cases}$$

Dimostrazione
Segue subito dal corollario precedente e da quanto è stato provato sul nucleo di Poisson (teorema per la risolubilità del problema di Dirichlet per B). ♯

13 - Conclusione

In questa tesi abbiamo sviluppato una trattazione del Problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace, utilizzando i metodi classici della Teoria del Potenziale, i quali costituiscono i principi fondamentali che sono poi alla base della costruzione assiomatica della Teoria stessa. Le fonti principali di questa presentazione sono stati i trattati di Constantinescu-Cornea e Helms.
A questo lavoro abbiamo premesso un'introduzione storica, che prende spunto dalla Storia della Matematica di Bottazzini, sia per descrivere l'origine del problema, sia per metterne in evidenza i molteplici aspetti, alcuni dei quali possono condurre allo studio di altre equazioni, come ad esempio quella del calore o, più in generale, quelle del secondo ordine con forma caratteristica semidefinita positiva.

Precisiamo, infine, che l'utilizzo dei metodi della Teoria del Potenziale è solo uno dei possibili approcci alla risoluzione del Problema di Dirichlet. Esistono, infatti, altri metodi, tra cui quello variazionale, che si basa principalmente su risultati di Analisi funzionale, per il quale rimandiamo a trattati specifici, come quello di Gilbarg e Trudinger.

14

Riferimenti bibliografici

[1] Umberto Bottazzini
Storia della matematica moderna e contemporanea
UTET

[2] Corneliu Constantinescu, Aurel Cornea
Potential theory on harmonic spaces
Springer-Verlag

[3] Lester L. Helms
Introduction to potential theory
Wiley-Interscience

[4] David Gilbarg, Neil S. Trudinger
Elliptic partial differential equations of second order
Springer-Verlag