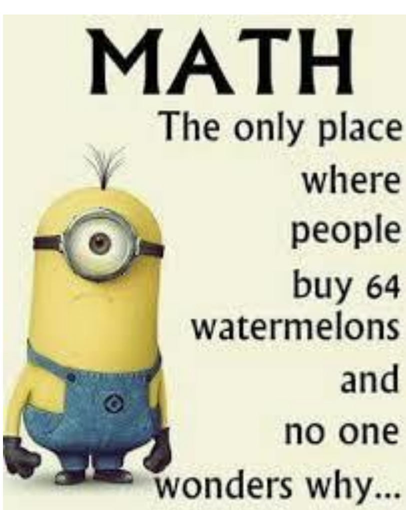
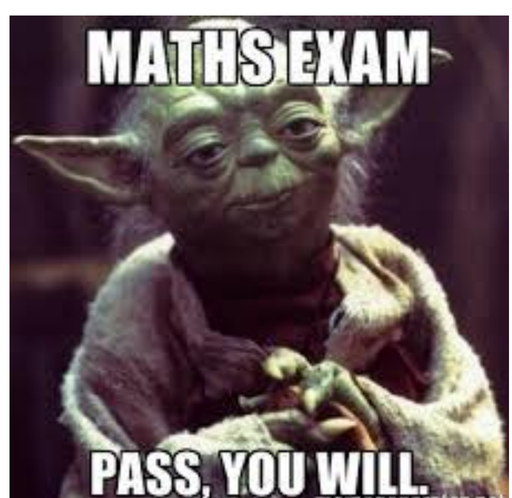
1M005 – Eléments de Mathématiques – Portail BGC – 2016 / 2017

Fascicule des Textes de TE

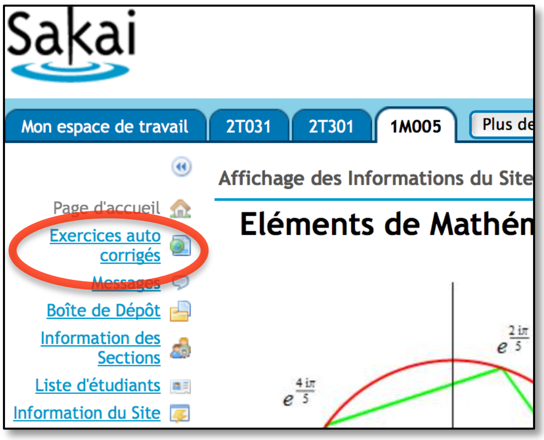
Responsables de l'U.E. :
Mmes Delphine **Salort** et Nathalie **Capron**
(delphine.salort@upmc.fr et nathalie.capron@upmc.fr)

Secrétariat de l'U.E. :
Mme Myriam **Zouham**
(myriam.zouham_aliane@upmc.fr)
Tour 14-15 Bureau 217

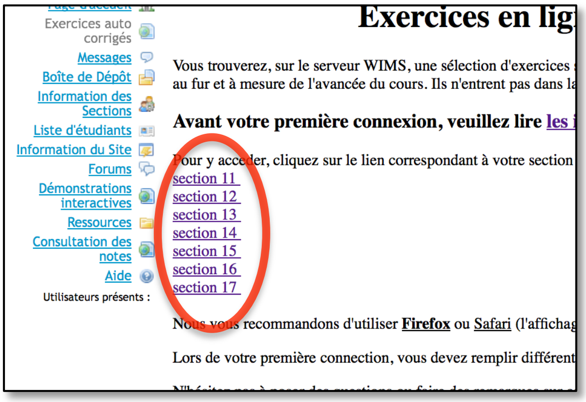




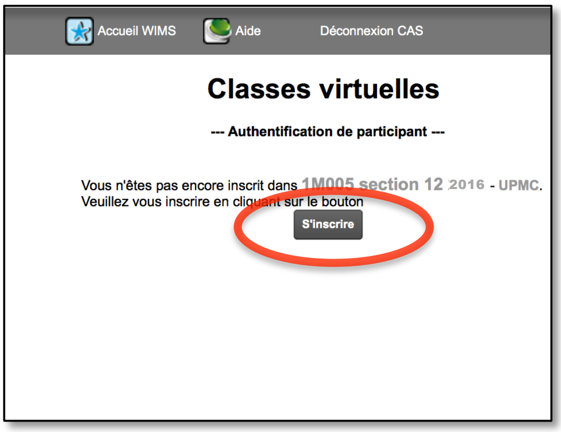
1ère connexion sur WIMS



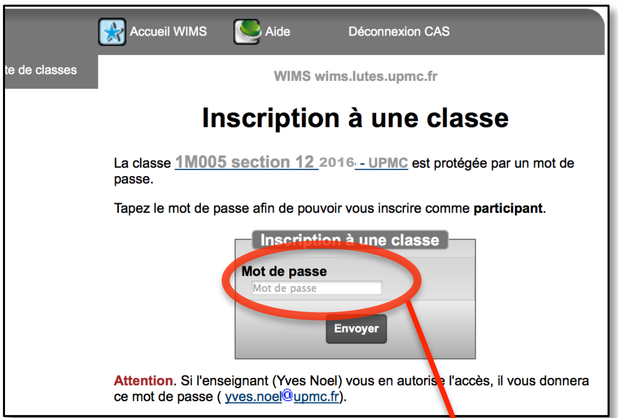
1) Cliquez sur « exercices auto-corrigés »



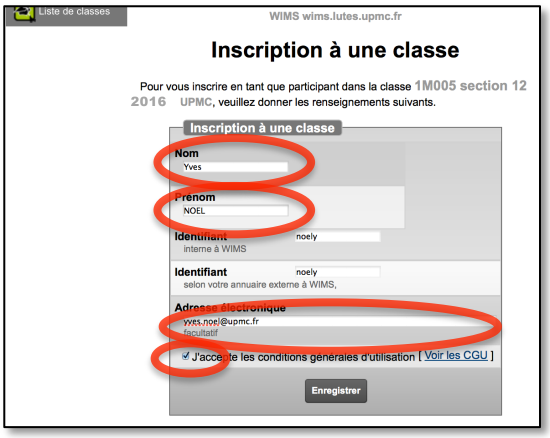
2) Cliquez sur votre section



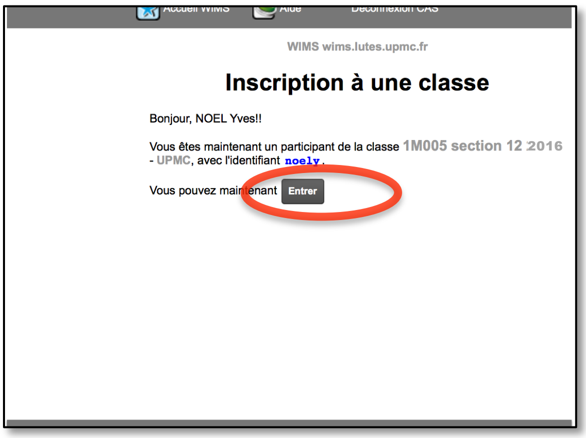
3) Cliquez sur « s'inscrire »



4) Donnez le mot de passe : 1M005



5) Remplissez la fiche d'inscription



6) Ca y est ! Entrez

Connexions suivantes

Lors des connexions suivantes vous n'aurez que les 2 premières étapes à suivre. A partir de SAKAI :

1) Cliquez sur « exercices auto-corrigés »

2) Cliquez sur votre section

Comment se connecter à WIMS sans passer par SAKAI

Il se peut, parfois, que SAKAI soit en maintenance et qu'il soit donc indisponible ; Dans ce cas, il est quand même possible de se connecter à WIMS. Pour cela, allez à http://wims.lutes.upmc.fr/wims puis cliquez sur « zone élève » (en haut) puis dans la case « rechercher votre classe » tapez 1M005. Une liste de classes apparaît, cliquez sur le bouton « Entrer » correspondant à votre section.

Comment entrer une expression mathématique

Quand vous travaillez avec WIMS, vous aurez souvent besoin d'entrer des expressions mathématiques. Ces expressions mathématiques peuvent être tapées de façon habituelle :

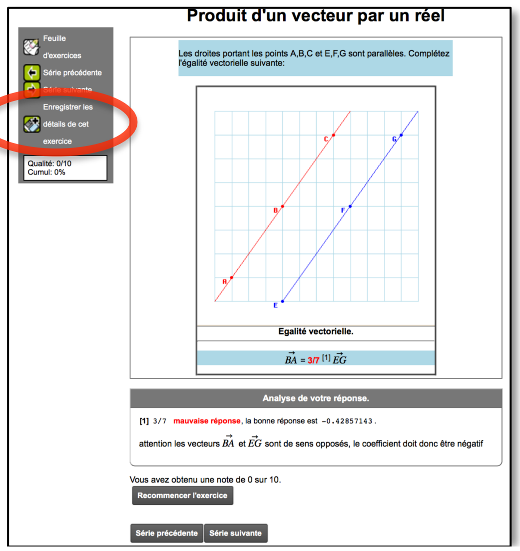
`3*x+5` pour $3x+5$,
`sin(pi*x)` pour $\sin(\pi\, x)$,
`y^3+1` pour y^3+1,
`(x+1)/(y-1)` pour $\frac{x+1}{y-1}$,
etc.

Voici une liste de fonctions mathématiques et la façon de les entrer. Vous pouvez remplacer *x* par toute sous-expression dans le tableau ci-dessous :

fonction	**description**	**comment taper**
π	constante bien-connue	`pi` ou `Pi` ou `PI`
e	base de log naturelle	`e` ou `E`
$\lvert x\rvert$	valeur absolue de *x*	`abs(x)`
$\sqrt{x}$	racine carrée de *x*	`sqrt(x)` ou `x^(1/2)`
e^x	exponentiel	`exp(x)` ou `e^x` ou `E^x`
$\ln(x)$	log naturel	`log(x)` ou `ln(x)`
$\lg(x)$	log de base 10	`lg(x)` ou `log10(x)`
$\sin(x)$	sinus trigonométrique	`sin(x)`
$\cos(x)$	cosinus trigonométrique	`cos(x)`
$\mathrm{tg}(x)$	tangente trigonométrique	`tan(x)` ou `tg(x)`

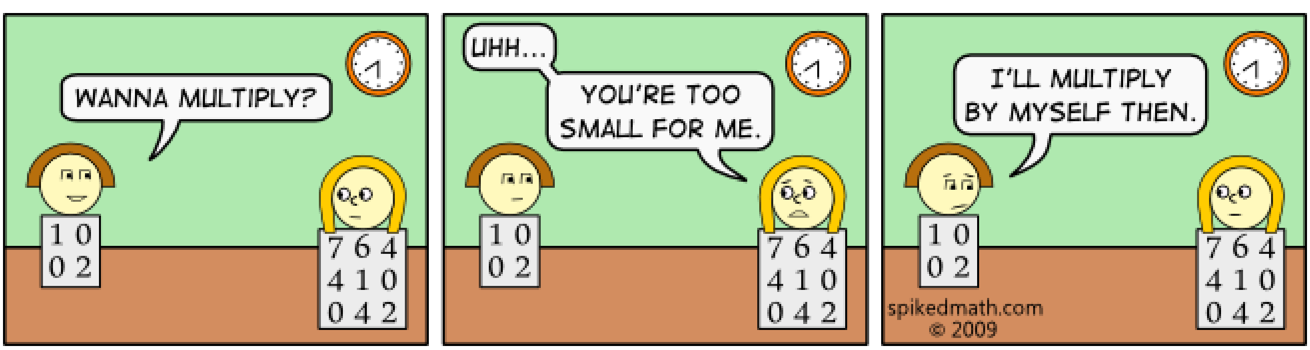
Comment demander de l'aide

Lorsque vous ne comprenez pas la correction d'un exercice auquel vous avez répondu, vous pouvez l'enregistrer pour que votre enseignant vous aide.
Cliquez sur (*enregistrez les…*) « détails de cet exercices ». L'énoncé, votre réponse ainsi que la correction qui vous a été affichée seront sauvegardés. Vous n'aurez plus qu'à indiquer à votre enseignant lors d'un cours ou par email ce que vous ne comprenez pas et lui indiquer que vous avez enregistré votre exercice (indiquez lui la date si vous en avez enregistrés plusieurs).



1M005 – Eléments de Mathématiques – Portail BGC – 2016 / 2017

Algèbre linéaire



Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - BGC

Connaissances à acquérir - Vecteurs et Bases

Ce que je dois savoir faire APRÈS le cours, et AVANT même le TD !

Question 1 : **On considère le repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan euclidien. On considère les deux points suivants $A=(2,5)$ et $B=(6,1)$. Quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$?**

□ $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

Question 2 : **Soit le repère non orthonormé constitué des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de norme respective 6, 6 et 10. L'angle entre le vecteur le plus long et chacun des deux autres vecteurs vaut 90 ° et l'angle entre les deux plus courts vaut 120 °. Les points E et F y ont pour coordonnées respectivement $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{4})$. Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{EF}$:**

□ 0,45

□ 3,04

□ 3,35

□ je ne sais pas ce qu'il faut faire pour répondre ; je vais (re)lire mon cours et trouver !

Question 3 : **On considère dans $\mathbb{R}^3$ le repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ainsi que les 3 vecteurs suivants :**

$$\overrightarrow{v_1}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \overrightarrow{v_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \quad \overrightarrow{v_3}=\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs constituent-ils une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (autrement dit, ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants) ?

□ oui (en ayant réalisé la démonstration au brouillon)

□ non (justifié par la démonstration faite au brouillon)

□ je ne sais pas ce qu'il faut faire pour répondre ; je vais encore (re)lire mon cours !

□ ça dépend de la base dans laquelle on travaille

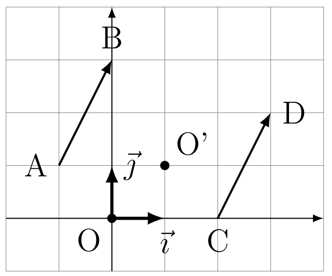
Licence 1 - L1 - Portail BGC

Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - Année 2016-2017

TD n ° 1 Vecteurs et Bases

Exercice I : Coordonnées cartésiennes

On considère la situation représentée ci-après :



1. Déterminer, dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les coordonnées des points A, B, C et D.
   En déduire les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Mêmes questions, si le repère est maintenant $(O'; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice II : Produit scalaire

1. On se place dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. En considérant le vecteur $\vec{t}$ dans cette base (donc $\vec{t} = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}$), donner, dans cette base, l'expression générale de la norme de $\vec{t}$ en fonction de a et b.
2. On se place dans la base de $\mathbb{R}^2$ suivante : $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
   En considérant les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ (soit $\vec{v} = X\ \vec{u}_1 + Y\,\vec{u}_2$ et $\vec{w} = X'\ \vec{u}_1 + Y'\,\vec{u}_2$), donner, dans cette base, l'expression générale du produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{w}$ en fonction de X, Y, X' et Y'.
   A-t-on toujours $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ pour tout $\vec{v}$ non nul ?

Exercice III : Bases, dépendance linéaire et indépendance linéaire

1. Définitions
   (a) Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathbb{R}^2$. Existe-t-il un vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ tel que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ soit libre (autrement dit, tel que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient linéairement indépendants) ?
   (b) Existe-t-il plusieurs bases dans $\mathbb{R}^2$? Et dans $\mathbb{R}^3$?
2. Base de $\mathbb{R}^2$
   On considère chacune des familles $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\text{(i)} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(ii)} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -27 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)} \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

(a) Si non, construire une base orthonormée dont le premier vecteur $\vec{u'}_1$ est colinéaire à $\vec{u}_1$

(b) Si oui,

i. Préciser s'il s'agit ou non d'une base orthonormée.

ii. Exprimer les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de la base canonique en fonction de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

iii. En déduire, pour un vecteur quelconque $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base canonique, ses composantes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

3. Base de $\mathbb{R}^3$

Soient les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(a) La famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est-elle libre ?

(b) La famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$ est-elle liée ?

(c) Dans le cas de la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$, donner l'expression des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ de la base canonique en fonction de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_4$, et en déduire la décomposition d'un vecteur $\vec{u}$ quelconque dans la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4)$.

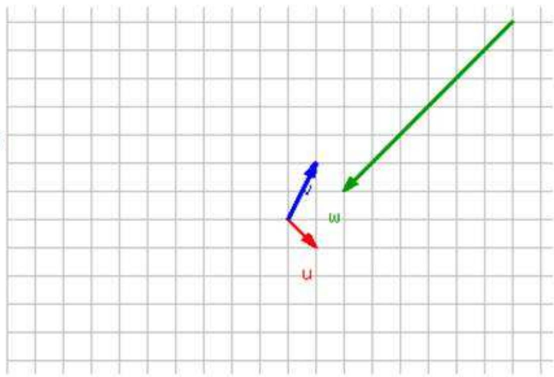
Exercice Supplémentaire I : Extrait des Wims

On a placé sur le graphique ci-contre une base $(\vec{u}, \vec{v})$ et un vecteur $\vec{w}$

.

Exprimer le vecteur $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{w}$= ____ $\vec{u}$ + ____ $\vec{v}$



Exercice Supplémentaire II : Extrait de partiels ou d'examens antérieurs

Extrait du partiel d'octobre 2014

On considère dans $\mathbb{R}^3$ le repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ainsi que les six points suivants

$$O = (0,0,0) \quad A = (1,4,0) \quad B = (2,3,0) \quad C = (0,3,1) \quad D = (0,0,1) \quad E = (1,6,-1)$$

1. Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{OD}$ constituent-ils une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (autrement dit, ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants) ? Justifier votre réponse.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC}$ constituent-ils une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.

4. On nommera $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ les trois vecteurs qui constituent une base de $\mathbb{R}^3$ (un des triplets des questions 2. ou 3.). Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque de composantes x, y et z dans la base canonique. Il se décompose de manière unique dans la base $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ uniques tels que $\vec{v} = \alpha\,\vec{u_1} + \beta\,\vec{u_2} + \gamma\,\vec{u_3}$. Exprimer α, β et γ en fonction de x, y et z.

Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - BGC

Connaissances à acquérir - Applications Linéaires et Matrices

Ce que je dois savoir faire APRÈS le cours, et AVANT même le TD !

Question 1 **: Soit la fonction h : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par** $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ y+x \end{pmatrix}$

Que vaut $f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **?**

□ $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

□ $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

Question 2 **: Soit le produit matriciel suivant, déterminer les inconnues** x **et** y **:**

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ y & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & -1 \\ 20 & -5 & 8 & 8 \\ 4 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

□ $x = 2$ et $y = -5$

□ $x = -2$ et $y = 5$

□ je vais attendre tranquillement le corrigé éventuel pour avoir la réponse

□ je ne sais pas ce qu'il faut faire pour répondre ; je vais (re)lire mon cours et trouver !

Question 3 **: Que valent respectivement les matrices** A **et** B **si l'on écrit le système suivant d'équations linéaires sous la forme matricielle** $AX = B$ **(**X **étant le vecteur colonne constitué des inconnues** x, y **et** z**) ?**

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 1 \\ 2x + z - 2 = 1 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$$

□

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

□ je ne sais pas ce qu'il faut faire pour répondre ; je vais encore (re)lire mon cours !

□

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Licence 1 - L1 - Portail BGC

Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - Année 2016-2017

<u>**TD n ° 2**</u> Applications linéaires et Calcul matriciel

Exercice I : Applications linéaires

1. Linéarité
   Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elles sont linéaires ou non.
   Dans le cas où elles le sont, écrire leur représentation matricielle dans la base canonique.

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+2y \end{pmatrix}$;

   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 1+2y \end{pmatrix}$;

   (c) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$;

   (d) $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ xy+2y \end{pmatrix}$;

   (e) $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sin(x+y)$

2. Choix d'une base
   Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour un vecteur quelconque $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Représenter la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

   (c) Représenter la matrice associée à f dans la base donnée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (d) Que peut-on en conclure ?

Exercice II : Calcul matriciel

1. Matrices 2×2
   On donne les matrices carrées suivantes : $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer la matrice $C = A + B$

   (b) Calculer la matrice $D = A - 2B$

   (c) Calculer $E = A\,B$ et $F = B\,A$. Conclure.

2. Matrices 3×3
   On donne les matrices carrées suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Vérifier que la matrice $C = A + B$ vaut $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) Vérifier que la matrice $D = A - 2B$ vaut $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

(c) Calculer $E = A\,B$ et $F = B\,A$. Conclure.

3. Produit matriciel
   Soient les matrices suivantes :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Quels sont tous les produits matriciels possibles ? Pour quelle raison ? Les calculer.

Exercice III : Matrice rotation

On considère la matrice suivante dans la base canonique : $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Cette matrice représente la rotation d'un angle θ autour de l'axe Oz.

1. Que valent les matrices R_1 et R_2, pour respectivement $\theta_1 = \pi$ et $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$?

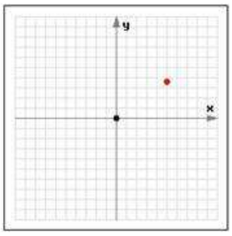
2. Calculer la matrice inverse R_2^{-1}. Pouvait-on déduire ce résultat à partir de considérations géométriques ?

3. Calculer $R_1 R_2$ et $R_2 R_1$. Conclure.

Exercice Supplémentaire I : Extrait des Wims

Le dessin ci-dessous représente le plan cartésien, avec un point $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Veuillez trouver la position du point $q = Mp$, où M est une transformation linéaire définie par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour donner votre réponse : cliquez dans le dessin, à l'endroit que vous pensez être la position de q.



● = l'origine du plan
● = le point p

Exercice Supplémentaire II : Extrait de partiels ou d'examens antérieurs

Extrait du partiel d'octobre 2014

Soient les fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -4x$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 5x - 3$

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ y - x \end{pmatrix}$

1. Démontrer que f est une application linéaire.

2. g est-elle une application linéaire ? Justifier.

3. Que vaut $h\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

4. h est-elle une application linéaire ? Justifier.

Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - BGC

Connaissances à acquérir - Déterminants et Inversion

Ce que je dois savoir faire APRÈS le cours, et AVANT même le TD !

Question 1 : **Que vaut le déterminant suivant ?**

$$\begin{vmatrix} 7 & -8 & 5 & 2 \\ -4 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

☐ -2

☐ -1

☐ 60

☐ 1

Question 2 : **Que vaut la comatrice de la matrice suivante ?**

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

☐ $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

☐ $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

☐ $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

☐ je veux pouvoir répondre ; je vais travailler mon cours et trouver !

Question 3 : **Que vaut la matrice inverse de la matrice suivante ?**

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

☐ $$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

☐ $$\begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

☐ $$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

☐ $$\begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

TD n ° 3 Inversion de matrices et Systèmes linéaires

Exercice I : Inversion de matrices

Montrer que chacune des matrices carrées suivantes est inversible et calculer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice II : Systèmes d'équations linéaires (systèmes réguliers)

1. Système 2×2 : on considère le système $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

   (a) Résoudre ce système par substitution.

   (b) Mettre ce système sous forme matricielle de type $A\,X = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   (c) Quel est le déterminant de A ?

   (d) Calculer A^{-1} et résoudre le système. Retrouve-t-on le résultat obtenu en (a) ?

2. Système 3×3 : on considère les matrices M, U et V suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer le déterminant de M et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation $M\,V = 0$.

   (b) Expliciter le système d'équations $M\,V = U$.

   (c) Calculer la matrice inverse M^{-1} en utilisant la comatrice.

   (d) Retrouver ce résultat par la méthode du pivot de Gauss.

   (e) En déduire la solution du système de la question (b).

Exercice III : Système singulier et méthode d'élimination de Gauss

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + 5z = 5 \end{cases}$$

1. Mettre le système sous forme matricielle de type $M\,X = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2. Calculer le déterminant de la matrice M du système. Commentaire ?

3. En utilisant l'élimination de Gauss-Jordan, déterminer l'ensemble des solutions du système.

Exercice Supplémentaire I : Extrait des Wims

Exercice 1. Résoudre le système linéaire en les inconnues x, y, z suivant:

$$\begin{cases} x \quad\quad\; - z = 0 \\ 8x - y + 3z = 3 \\ -3x + y - 6z = -4 \end{cases}$$

Remarque: Le but de l'exercice est de tester la démarche de résolution. La machine va effectuer les calculs pour vous.

Liste des actions:

- Combinaison de lignes.
- Multiplier une ligne par un nombre.
- Permuter deux lignes.
- Changer l'ordre d'écriture des variables.
- Remplacer une variable par sa valeur.
- Conclure à partir des calculs effectués.

Remarque: Une description détaillée des différentes actions est disponible dans l'aide.

Exercice Supplémentaire II : Extrait de partiels ou d'examens antérieurs

Extrait de l'examen de juin 2014

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2 = 9 \\ x + y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

1. Mettre ce système sous forme matricielle.
2. Que vaut le déterminant de la matrice ? Le système est-il régulier ? Le système est-il homogène ?
3. En déduire le nombre possible de solution(s) de ce système.
4. Si une(des) solution(s) existe(nt) pour ce système, le résoudre en utilisant la méthode de votre choix.

Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - BGC

Connaissances à acquérir - Diagonalisation

Ce que je dois savoir faire APRÈS le cours, et AVANT même le TD !

Question 1 **: Une matrice 2×2 présente un déterminant non nul et une valeur propre double. Elle est donc :**

☐ Inversible

☐ Diagonalisable

☐ Singulière

☐ Régulière

Question 2 **: Que valent la trace et le déterminant de la matrice suivante ?**

$$\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

☐ 0 et -1

☐ -1 et 0

☐ 0 et -25

☐ -7 et -3

Question 3 **: Les valeurs propres de la matrice précédente sont :**

☐ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

☐ $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

☐ $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = -5$

☐ $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$

TD n ° 4 Changements de base et Réduction

Exercice I : Changement de base

On considère les deux vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que ces vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Ecrire la matrice de passage P [Par convention, les colonnes de P sont les composantes des vecteurs de la nouvelle base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ dans l'ancienne base, laquelle est la base canonique. P est dite matrice de passage de "l'ancienne" base vers la "nouvelle" base].
3. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
4. Comment s'écrivent les coordonnées (x', y') dans la nouvelle base d'un vecteur $\vec{v}$ dont les coordonnées sont (x, y) dans la base canonique ?

Exercice II : Réduction

1. Systèmes 2×2 :
   (a) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
      i. Ecrire $P_M(\lambda)$, le polynôme caractéristique de M, et en déduire les valeurs propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?
      ii. Déterminer les vecteurs propres de M.
      iii. Déterminer la matrice de passage P (même convention que précédemment) vers une base où M est diagonale, ainsi que la matrice inverse P^{-1}.
      iv. Calculer explicitement la matrice diagonale D semblable à M.
      v. Calculer, pour tout entier n naturel non nul, la matrice M^n.
   (b) On considère la matrice $K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
      i. Montrer que $K^2 = K$. En déduire les valeurs propres possibles de K.
      ii. Calculer $P_K(\lambda)$, le polynôme caractéristique de K, et montrer que l'ensemble des valeurs propres de K est l'ensemble des valeurs propres possibles de K obtenues à la question précédente.
      iii. Déterminer les vecteurs propres et expliciter le changement de base permettant de mettre la matrice sous forme diagonale.
2. Système 3×3 : On considère la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer $P_A(\lambda)$, le polynôme caractéristique de A. Montrer qu'il peut se factoriser sous la forme $P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$. En déduire les valeurs propres de A.
   (b) En déduire que A est diagonalisable.
   (c) Déterminer les vecteurs propres et montrer que l'on peut prendre pour matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) Calculer ${}^tP \cdot P$ et en déduire sans calcul la matrice P^{-1}, puis diagonaliser A.

(e) Utiliser les résultats précédents pour déterminer A^{-1}.

Exercice III : Application linéaire, changement de base, vecteurs, valeurs propres

Soient trois vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ formant la base B de $\mathbb{R}^3$. On note ϕ l'application linéaire définie par $\phi(\vec{e_1}) = 9\vec{e_1} - 5\vec{e_2} - 12\vec{e_3}$, $\phi(\vec{e_2}) = -6\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 6\vec{e_3}$ et $\phi(\vec{e_3}) = 10\vec{e_1} - 5\vec{e_2} - 13\vec{e_3}$.

1. Ecrire la matrice A représentant ϕ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.
2. On pose $\vec{u} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} - 2\vec{e_3}$, $\vec{v} = \vec{e_1} - \vec{e_3}$ et $\vec{w} = -2\vec{e_1} + \vec{e_2} + 3\vec{e_3}$. Montrer que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on appellera B'.
3. Calculer $\phi(\vec{u})$, $\phi(\vec{v})$ et $\phi(\vec{w})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Ecrire la matrice C de ϕ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Que constate-t-on ?
4. Ecrire la matrice de passage P de "l'ancienne" base B vers la "nouvelle" base B', c'est-à-dire trouver la matrice P telle que pour tout vecteur $\vec{v_1}$ ayant pour expression matricielle V dans la base B et V' dans la base B' on ait l'égalité $PV' = V$
5. On donne $P_A(\lambda)$, le polynôme caractéristique de A : $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 6$. Que valent les valeurs propres de A ? Donner D une matrice diagonale semblable à A. Comparer les matrices C et D.

Exercice Supplémentaire I : Extrait des Wims

Soient f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ une base de $\mathbb{R}^2$. f est représentée dans cette base par la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il y a des vecteurs propres de f que l'on peut trouver sans calcul. En trouver un :

$\square\ \vec{e_1} + \square\ \vec{e_2}$

La valeur propre correspondante est $\square$

Exercice Supplémentaire II : Extrait de partiels ou d'examens antérieurs

Extrait de l'examen de juin 2015

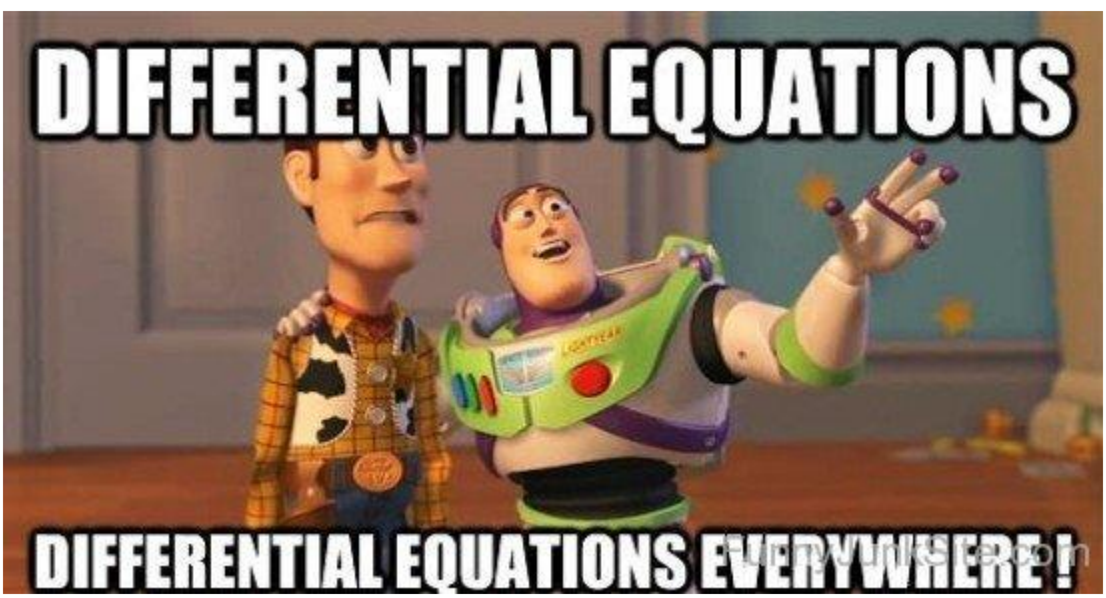
On considère la matrice suivante :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Exprimer $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\lambda)$, le polynôme caractéristique de la matrice $\mathcal{A}$.
2. En déduire les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$.
3. Donner pour chaque valeur propre un représentant de la famille des vecteurs propres associés.
4. Ecrire une matrice diagonale $\mathcal{D}$ semblable à la matrice $\mathcal{A}$ et donner une matrice de passage $\mathcal{P}$, cohérente avec la matrice diagonale donnée précédemment.
5. Rappeler la relation qui existe entre $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$, et $\mathcal{P}^{-1}$.
6. Que vaut $\mathcal{P}^{-1}$, la matrice inverse de la matrice $\mathcal{P}$ choisie ?
7. Vérifier par le calcul la relation évoquée à la question 5.

1M005 – Eléments de Mathématiques – Portail BGC – 2016 / 2017

Analyse



Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - BGC

Connaissances à acquérir - Dérivation

Ce que je dois savoir faire APRÈS le cours, et AVANT même le TD !

Question 1 : **Que vaut la dérivée première de la fonction f suivante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?**

$$f : x \mapsto \sin(-x^2)$$

☐ $\sin(-2x)$

☐ $-2x\cos(-x^2)$

☐ $\cos(-x^2)$

☐ $2x\cos(-x^2)$

Question 2 : **Que vaut la dérivée première de la fonction g suivante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?**

$$g : x \mapsto \exp(-x\cos x)$$

☐ $\exp(-x\cos x)$

☐ $(-\cos x - x\sin x)\exp(-x\cos x)$

☐ $(-\cos x + x\sin x)\exp(-x\cos x)$

☐ $\exp(-\cos x + x\sin x)$

Question 3 : **Que vaut la dérivée première de la fonction h suivante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?**

$$h : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

☐ $\frac{1}{x}$

☐ $-\ln x$

☐ $-\frac{1}{x^2}$

☐ $-\frac{1}{x}$

UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS
Licence 1 - L1 - Portail BGC

Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - Année 2016-2017

TD n ° 5 Fonctions : études et dérivées

Exercice I : Dérivation de fonctions simples

1. On rappelle que la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ est définie comme
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
Calculer à l'aide de cette définition la dérivée de chacune des fonctions suivantes :
   (a) $f : x \mapsto ax + b$;
   (b) $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{3}$;
   (c) $u : x \mapsto \sqrt{x}$;
   (d) $v : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
2. A partir des règles usuelles de dérivation, retrouver les résultats précédents.

Exercice II : Dérivation de fonctions composées

Calculer la dérivée première des fonctions suivantes :

1. $F : x \mapsto \dfrac{3x+4}{x^2}$;
2. $G : x \mapsto x \exp(-5x^2)$;
3. $U : x \mapsto \cos(2x^3)$;
4. $V : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice III : Etudes de fonctions

Faire l'étude systématique (ensemble de définition, parité et périodicité éventuelles, limites aux bornes, asymptotes éventuelles, dérivée, variation et extrema éventuels, points d'inflexion éventuels, tableau de variation, tracé du graphe) des fonctions suivantes :

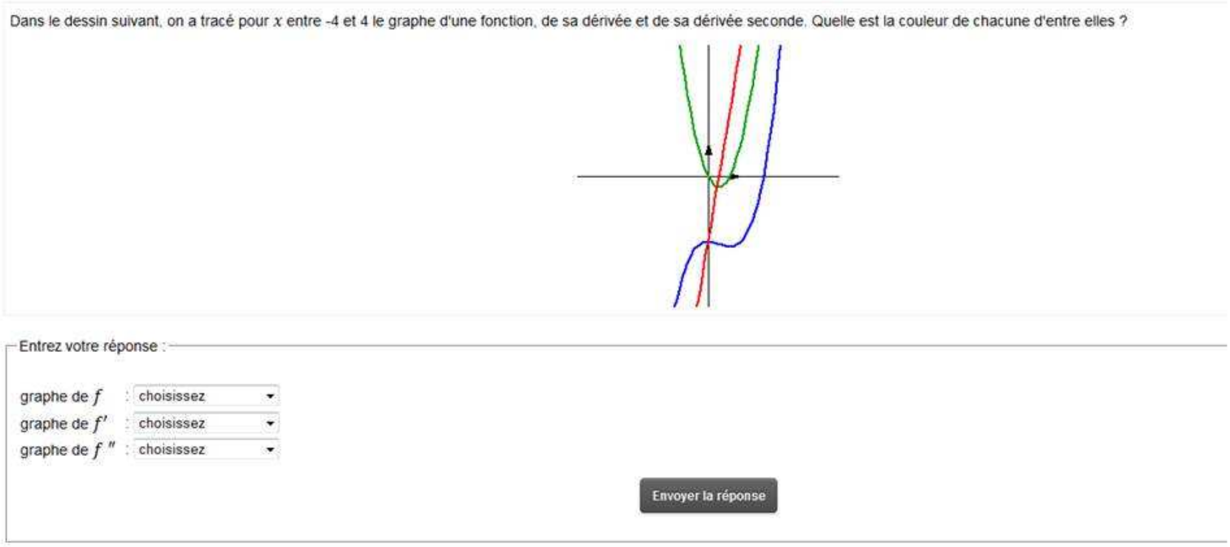
1. $\Omega : x \mapsto x^3 - x$;
2. $\Phi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right]$;
3. $\Psi : x \mapsto \sin^3 x$

Exercice IV : Ecart entre une fonction et sa tangente

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$.

1. Calculer la fonction dérivée ; quelle est sa valeur en $x_0 = \dfrac{1}{2}$?
2. Donner l'expression de la fonction affine g dont le graphe est la tangente à la fonction f en x_0.
3. On considère la fonction $h = f - g$. Que représente cette fonction ?
   Montrer que h présente un extremum en x_0 ; préciser la nature de cet extremum.
4. En déduire que, au voisinage de x_0, le graphe de f est *au-dessus* de la tangente.
5. Montrer que ce résultat est en fait vrai pour toute valeur de x_0. En déduire que le graphe de la fonction est toujours *au-dessus* de ses tangentes (on dit que la fonction est convexe).

Exercice Supplémentaire I : Extrait des Wims



Exercice Supplémentaire II : Extrait de partiels ou d'examens antérieurs

Extrait de l'examen de décembre 2013

La β-galactosidase est une enzyme intervenant dans le métabolisme du lactose. Sa faible présence dans l'intestin est la principale cause de l'incapacité à digérer le lactose chez l'homme : on parle d'intolérance au lactose (ceci concerne 90% des populations asiatiques et africaines). La valeur du pH du milieu influe sur la vitesse de la réaction enzymatique. On note x le pH du milieu. En supposant que cette vitesse V est une fonction de x, on a :

$$V(x) = \frac{1}{1 + 0,1\,(x - 7,5) + 0,1\,(x - 7,5)^2}$$

1. On pose $X = x - 7,5$. Exprimer V en fonction de X.
2. Exprimer la dérivée de la fonction V par rapport à la variable X.
3. Quelle est la valeur de X qui annule la dérivée première ? En déduire alors la valeur du pH qui annule cette même dérivée.
4. S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ? Justifier la réponse.

TD n ° 6 Développements limités

Exercice I : Développements limités fondamentaux

En utilisant le développement en série de Taylor, déterminer les développements limités à l'ordre 3 des fonctions suivantes (α est un nombre entier quelconque) :

1. $f : x \mapsto (1-x)^{\alpha}$, au voisinage de $x_0 = 0$;
2. $g : x \mapsto \ln(1+\alpha x)$, au voisinage de $x_0 = 0$;
3. $h : x \mapsto e^{-\alpha x}$, au voisinage de x_0 quelconque.

Exercice II : Développements limités composés

Etablir les développements limités au voisinage de 0, à l'ordre 2, des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)}$;
2. $g : x \mapsto e^x \sin x$;
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$;
4. $u : x \mapsto \tan x$;
5. $v : x \mapsto \exp\left[\cos(2x)\right]$

Exercice III : Utilisation des développements limités pour le calcul des limites

En utilisant les développements limités, déterminer les limites suivantes (pour résoudre le problème, on prendra soin de choisir les ordres les plus bas qui restent pertinents) :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$;
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\cos x) - 1}{x^2}$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\sqrt{1+x^2})}{x^2}$

Exercice Supplémentaire I : Extrait des Wims

Soit f une fonction réelle, dérivable d'ordre 3 sur $\mathbb{R}$, avec le tableau de dérivées suivant :

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f^{(3)}(x_0)$
-2	3	8	-40	6
0	-19	6	-12	126
2	-3	5	36	-66

Quelle est la partie principale du développement limité de f d'ordre 2 au voisinage de 2, c'est-à-dire le polynôme P(x) dans le développement limité

$$f(x) = P(x) + (x-2)^2\varepsilon(x) \ ?$$

Entrez votre réponse :

P(x) =

Envoyer la réponse

Exercice Supplémentaire II : Extrait de partiels ou d'examens antérieurs

Extrait de l'examen de décembre 2014

On considère la fonction f, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = e^{\cos(2x)}$$

1. Calculer la dérivée de f.
2. Rappeler le développement limité de e^x au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 1.
3. Rappeler également le développement limité de $\cos x$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
4. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e^1}{x^2}$$

TD n ° 7 Primitives et Intégrales

Exercice I : Primitives

Déterminer les primitives des fonctions suivantes (α étant un réel). Donner le domaine de définition et de dérivabilité de chacune de ces fonctions en fonction du paramètre α :

1. $x \mapsto x^3 - 2x^2 - 3$;
2. $x \mapsto e^{\alpha x}$;
3. $x \mapsto \cos(\alpha x)$;
4. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$;
5. $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^\alpha}$ (pour $\alpha \neq 1$) ;
6. $x \mapsto \ln(\alpha x)$

Exercice II : Intégrales

Calculer les intégrales suivantes en utilisant la méthode qui vous paraît la plus adaptée :

1. $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x| \, \mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, \mathrm{d}x$;
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(x+1)(x-2)} \, \mathrm{d}x$;
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, \mathrm{d}x$;
5. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$;
6. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x \exp(-2x) \, \mathrm{d}x$

Exercice III : Valeur moyenne de fonctions trigonométriques

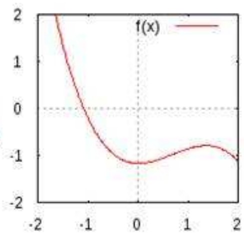
Pour une fonction f périodique de période L, la *valeur moyenne* de f est définie par :

$$\mu(f) = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \, \mathrm{d}x$$

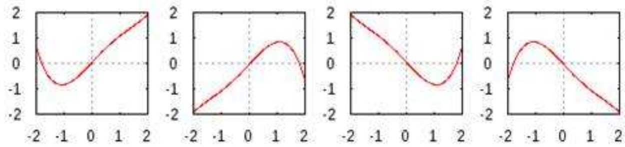
1. Montrer que $\mu(f)$ ne dépend pas du choix de x_0
2. Calculer la valeur moyenne de $x \mapsto \sin x$
3. Calculer la valeur moyenne de $x \mapsto \sin^2 x$
4. Interpréter les deux résultats précédents en termes de surfaces.

Exercice Supplémentaire I : Extrait des Wims

Voici le graphe d'une fonction continue $f(x)$.



Question. Parmi les dessins suivants, lequel représente la fonction $F(x)$, où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$? Cliquez dessus.



Cliquez ici si vous pensez qu'aucun des dessins ne correspond à $F(x)$.

Exercice Supplémentaire II : Extrait de partiels ou d'examens antérieurs

Extrait des examens de décembre 2014 et de juin 2015

1. Décembre 2014

   (a) Enoncer la formule de l'intégration par parties.

   (b) Calculer $\int_{\pi}^{2\pi} [t\cos(t) + \ln(t)]\,\mathrm{d}t$

   Indice : $\ln(t) = 1 \times \ln(t)$

2. Juin 2015
   Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\,\sin(2x)$

   (a) Rappeler la formule d'intégration par parties.

   (b) Calculer $\int_{0}^{+\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$

Licence 1 - L1 - Portail BGC
Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - Année 2016-2017

Résolution d'une équation différentielle du premier ordre

On considère l'équation différentielle $-2y'(t) = -y(t) + 6$
Que vaut $y(t)$ **?**
On donne la condition initiale suivante : $y(0) = -2$.

Traitons cette équation de "3" manières, en fait pas vraiment différentes ;-) :

Résolution A

Etape "0" : l'équation s'écrit $y'(t) = \frac{1}{2}\,y(t) - 3$

1. L'équation différentielle homogène (dite "sans second membre") est de la forme

$$y'(t) = \tfrac{1}{2}\,y(t)$$

La fonction $y(t)$ est forcément non nulle donc on peut écrire : $\dfrac{y'(t)}{y(t)} = \dfrac{1}{2}$; on cherche alors les primitives de part et d'autre : $\int \frac{y'(t)}{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}\mathrm{d}t$
Il vient donc $\ln|y(t)| = \frac{1}{2}\,t + C_0$ soit $|y(t)| = \exp(\frac{1}{2}\,t + C_0)$ et comme la valeur absolue peut être "absorbée" par la constante, il vient :
La solution générale est de la forme : $\mathbf{y(t) = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}\,t\right)}$, où C_1 est une constante réelle quelconque (ici égale ligne à ligne à $\exp(C_0)$).

Penser à vérifier que cela fonctionne : l'équation $y'(t) = \frac{1}{2}\,y(t)$ doit être satisfaite pour $y(t) = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}\,t\right)$; en calculant $y'(t)$ $\left(= \frac{1}{2}C_1 \exp\left(\frac{1}{2}\,t\right)\right)$ et en remplaçant dans $y'(t) = \frac{1}{2}\,y(t)$, on trouve que oui.

2. La solution de l'équation "avec second membre" s'obtient grâce à la méthode dite de "variation de la constante" ; la solution est à présent de la forme $y(t) = C(t)\exp\left(\frac{1}{2}\,t\right)$ où $C(t)$ est bien fonction de t et non plus une constante. On réécrit alors "juste" l'équation donnée au départ avec cette solution, de manière à déterminer $C(t)$:

$$C'(t)\exp\left(\tfrac{1}{2}\,t\right) + \tfrac{1}{2}C(t)\exp\left(\tfrac{1}{2}\,t\right) = \tfrac{1}{2}C(t)\exp\left(\tfrac{1}{2}\,t\right) - 3$$

soit $C'(t) = -3\,\exp\left(-\frac{1}{2}\,t\right)$
en intégrant, il vient : $C(t) = -3\left[-2\exp\left(-\frac{1}{2}\,t\right)\right] + C_2 = 6\exp\left(-\frac{1}{2}\,t\right) + C_2$
On a donc la solution générale (en réinjectant $C(t)$ dans $y(t) = C(t)\exp\left(\frac{1}{2}\,t\right)$) :
$\mathbf{y(t)} = \left(6\exp\left(-\frac{1}{2}\,t\right) + C_2\right)\,\exp\left(\frac{1}{2}\,t\right) = \mathbf{6 + C_2 \exp\left(\frac{1}{2}\,t\right)}$

3. La constante C_2 est fixée par la condition initiale $y(0) = 6 + C_2\exp\left(\frac{1}{2}\cdot 0\right) = -2$; d'où $C_2 = -8$ et $y(t) = 6 - 8\,\exp\left(\frac{1}{2}\,t\right)$

Penser à vérifier ($y'(t) = -8(\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\,t\right)) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(6 - 8\,\exp\left(\frac{1}{2}\,t\right)) - 3$ oui)
On a donc la solution **particulière** (pour cette condition initiale) : $\mathbf{y(t) = 6 - 8\,\exp\left(\frac{1}{2}\,t\right)}$

Résolution B

Etape "0" : l'équation s'écrit $y'(t) = \frac{1}{2}\, y(t) - 3$

1. L'équation différentielle homogène (dite "sans second membre") est de la forme

$$y'(t) = \tfrac{1}{2}\, y(t)$$

soit la forme $y'(t) = a(t)y(t)$. La solution est donc de la forme (cf. cours) :

$$C_0 \exp(A(t))$$

où $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\, \mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\, \mathrm{d}u = [\frac{1}{2}u]_{t_0}^{t} = \frac{1}{2}(t - t_0)$
(et donc $\exp(A(t)) = \exp(-\frac{1}{2}t_0)\, \exp(\frac{1}{2}t) = C_4\, \exp(\frac{1}{2}t)$)

soit $\mathbf{y(t)} = C_0 \exp(\frac{1}{2}(t - t_0)) = \mathbf{C_3} \exp\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}\, t}\right)$ (avec $C_3 = C_0\, \exp(-\frac{1}{2}t_0) = C_0\, C_4$)

Penser à vérifier !!!

2. Considérons à présent le 2^{nd} membre : la solution a la forme $y(t) = g(t)\, \exp(A(t)) = g(t)\, C_4\, \exp(\frac{1}{2}t))$. A déterminer : $g(t)$
Bien sûr : $g(t) = y(t)\, C_5\, \exp(-\frac{1}{2}t)$ (où $C_5 = 1/C_4$) mais $y(t)$ est encore aussi inconnue...
Or $g'(t) = y'(t)\, C_5\, \exp(-\frac{1}{2}t) - \frac{1}{2}\, y(t)\, C_5\, \exp(-\frac{1}{2}t) =$
$(\frac{1}{2}\, y(t) - 3)\, C_5\, \exp(-\frac{1}{2}t) - \frac{1}{2}\, y(t)\, C_5\, \exp(-\frac{1}{2}t) = -3\, C_5\, \exp(-\frac{1}{2}t)$ d'où :

$$g'(t) = -3\, C_5\, \exp(-\tfrac{1}{2}t)$$

donc $g(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^{t} -3\, C_5\, \exp(-\frac{1}{2}u)\, \mathrm{d}u = g(t_0) + (-3)[-2\, C_5\, \exp(-\frac{1}{2}u)]_{t_0}^{t}$
en simplifiant, il vient : $g(t) = C_6 + 6\, C_5\, \exp(-\frac{1}{2}t)$ où $C_6 = g(t_0) - 6\, C_5\, \exp(-\frac{1}{2}t_0)$
Il n'y a plus qu'à remplacer dans $y(t) = g(t)\, \exp(A(t)) = g(t)\, C_4\, \exp(\frac{1}{2}(t))$ soit

$\mathbf{y(t)} = (C_6 + 6\, C_5\, \exp(-\frac{1}{2}t))\, C_4\, \exp(\frac{1}{2}(t)) = \mathbf{C_6\, C_4}\, \exp(\boldsymbol{\frac{1}{2}t}) + \mathbf{6\, C_5\, C_4}$
or $C_5 = 1/C_4$ donc $\mathbf{y(t)} = \mathbf{C_7}\, \exp(\boldsymbol{\frac{1}{2}t}) + \mathbf{6}$ où $C_7 = C_6\, C_4$
Vérification :

$$y'(t) = \tfrac{1}{2}\, C_7\, \exp(\tfrac{1}{2}t) \stackrel{?}{=} \tfrac{1}{2}\, (C_7\, \exp(\tfrac{1}{2}t) + 6) - 3$$

oui !

3. La constante C_7 est fixée par la condition initiale $y(0) = C_7 + 6 = -2$; d'où $C_7 = -8$ et $y(t) = -8 \exp\left(\frac{1}{2}\, t\right) + 6$

On a donc la solution **particulière** (pour cette condition initiale) : $\mathbf{y(t) = 6 - 8}\, \exp\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}\, t}\right)$
On retrouve bien sûr le résultat de **Résolution A** ;-) !

Résolution C
Etape "0" : l'équation s'écrit $y'(t) = \frac{1}{2}\, y(t) - 3$

1. L'équation est de la forme $y'(t) - \frac{1}{2}\, y(t) = -3$
   On multiplie chaque membre de l'égalité par $\exp(-A(t))$ où $A(t)$ est une primitive de $a(t) = \frac{1}{2}$ ici, donc $A(t) = \frac{1}{2}\, t - \frac{1}{2}\, t_0$ et $\exp(-A(t)) = \exp(-(\frac{1}{2}\, t - \frac{1}{2}\, t_0)) = C_1\, \exp(-\frac{1}{2}\, t)$
   où $C_1 = \exp(\frac{1}{2}\, t_0)$
   L'équation $y'(t) - \frac{1}{2}\, y(t) = -3$ devient : $y'(t)\, C_1\, \exp(-\frac{1}{2}\, t) - \frac{1}{2}\, y(t)\, C_1\, \exp(-\frac{1}{2}\, t) = -3\, C_1\, \exp(-\frac{1}{2}\, t)$

   C_1 est bien sûr non nul (on peut donc diviser partout par C_1) ;

   $$y'(t)\, \exp(-\tfrac{1}{2}\, t) - \frac{1}{2}\, y(t)\, \exp(-\tfrac{1}{2}\, t) = -3\, \exp(-\tfrac{1}{2}\, t)$$

   et l'on reconnaît à gauche $(y(t) \exp(-\frac{1}{2}\, t))'$; l'intégrale de la dérivée d'une fonction est la fonction elle-même, donc prenant la primitive de chaque membre, il vient :
   $y(t)\, \exp(-\frac{1}{2}\, t) = -3 \int_{t_0}^{t} \exp(-\frac{1}{2}\, u)\, \mathrm{d}u = -3[-2\, \exp(-\frac{1}{2}\, u)]_{t_0}^{t} = 6\, [\exp(-\frac{1}{2}\, t) - \exp(-\frac{1}{2}\, t_0)]$
   donc $\mathbf{y(t) = 6 - \frac{1}{C_1}\, \exp(\frac{1}{2}\, t)}$ (on peut également noter C_2 la constante $\frac{1}{C_1}$)
   Vérification : $(-\frac{1}{C_1}\, \frac{1}{2}\, \exp(\frac{1}{2}\, t)) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(6 - \frac{1}{C_1}\, \exp(\frac{1}{2}\, t)) - 3$
   oui !

2. Détermination de la constante :
   $y(0) = 6 - \frac{1}{C_1} = -2$; d'où $C_1 = \frac{1}{8}$ et $\mathbf{y(t) = 6 - 8 \exp\left(\frac{1}{2}\, t\right)}$

   Ceci rejoint bien le résultat déjà déterminé au préalable.

L'idée est de comprendre ces "3" manières et de trouver celle qui nous correspond le mieux, et bien sûr de ne pas les confondre...

Lien : https://www.wolframalpha.com/examples/DifferentialEquations.html

TD n ° 8 Equations différentielles

Exercice I : Equations différentielles linéaires à coefficients constants

1. **Méthode de résolution**

   On considère chacune des trois équations différentielles suivantes, dans lesquelles $y : x \mapsto y(x)$ est la fonction inconnue à déterminer :

   (a) $3y' - 2y = 0$

   (b) $3y' - 2y = -5$, avec la condition initiale $y(0) = -1$

   (c) $y' + 4y = \sin(3x)\, \exp(-4x)$

2. **Equation homogène**
   On considère l'équation différentielle $y' = ay$, dans laquelle $y : t \mapsto y(t)$ est une fonction à déterminer et a un nombre réel non nul.

   (a) Montrer que cette équation différentielle admet la solution *constante* $y = 0$.

   (b) On considère le cas $a < 0$, qui décrit, par exemple, la désintégration radioactive d'un nucléide.

      (i) Ecrire la solution générale de cette équation, puis la solution correspondant à un nombre initial N_0 de nucléides.

      (ii) On appelle "période" du nucléide en jeu l'intervalle de temps $t_{1/2}$ au bout duquel N_0 est divisé par 2.
      Donner l'expression de $t_{1/2}$ en fonction de a.

   (c) On considère maintenant le cas où la fonction $y(t)$ représente l'effectif $y(t)$ d'une population animale ou bactérienne (modèle de Malthus).

      (i) Ecrire la solution générale de cette équation, puis la solution correspondant à un nombre initial y_0 d'individus.

      (ii) En choisissant $y_0 = 100$ et $|a| = \frac{1}{10}$, représenter cette solution.
      Proposer une interprétation.

      (iii) En combien de temps la population serait-elle, selon le signe de a, multipliée ou divisée par 20 ? [on pourra utiliser $\ln(20) \approx 3$].

3. **Equation avec second membre**
   On considère l'équation différentielle $y' = a\, y + b$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
   Cette équation peut décrire la cinétique d'une réaction chimique, dans laquelle un réactif est consommé à un taux a et alimenté par un débit constant b, $y(t)$ représentant la concentration de ce réactif.

   (a) Montrer que cette équation différentielle admet une solution *constante* $y = c$.
   Quels sont les signes de a et b dans le modèle proposé ?
   En déduire le signe de c.

   (b) Ecrire la solution générale de cette équation différentielle et en déduire la solution particulière correspondant à une concentration initiale à $t = 0$, notée y_0.

   (c) Discuter le comportement de cette solution selon que $y_0 < c$ ou $y_0 > c$.

Exercice II : Equations différentielles linéaires à coefficients non constants

On envisage à présent le cas où les coefficients dans l'équation différentielle dépendent de la variable (ces équations sont parfois appelées "non-autonomes").

1. **Equation homogène**
   Déterminer la solution générale de l'équation différentielle: $y'(t) = -aty(t)$, où a est un réel positif non nul.

2. **Equation avec second membre**
   On considère l'équation :
   $$y'(t) = \cos(t)\,y(t) + \cos(t)$$

1. Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto -\cos(t)$, que l'on notera A.

2. En multipliant l'équation différentielle par $e^{A(t)}$, montrer que l'on fait apparaître la dérivée de la fonction $t \mapsto y(t)e^{A(t)}$.

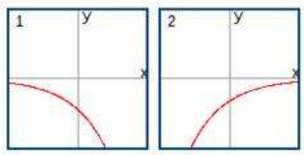
3. En déduire la forme des solutions en intégrant cette dérivée entre 0 et t.

Exercice Supplémentaire I : Extrait des Wims

Exercice. Nous avons une fonction

$$y' + y = 0$$

Parmi les graphes suivants, exactement un peut correspondre à une solution de cette équation. Lequel ? Cliquez dessus. (La zone du tracé est [-2,2].)



Renouveler l'exercice.

Exercice Supplémentaire II : Extrait de partiels ou d'examens antérieurs

Extrait de l'examen de décembre 2014

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'(t) + 5y(t) = 3\exp(t)$$

On cherche à déterminer l'expression de la fonction y définie de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de (E) et telle que $y(0) = 0$.

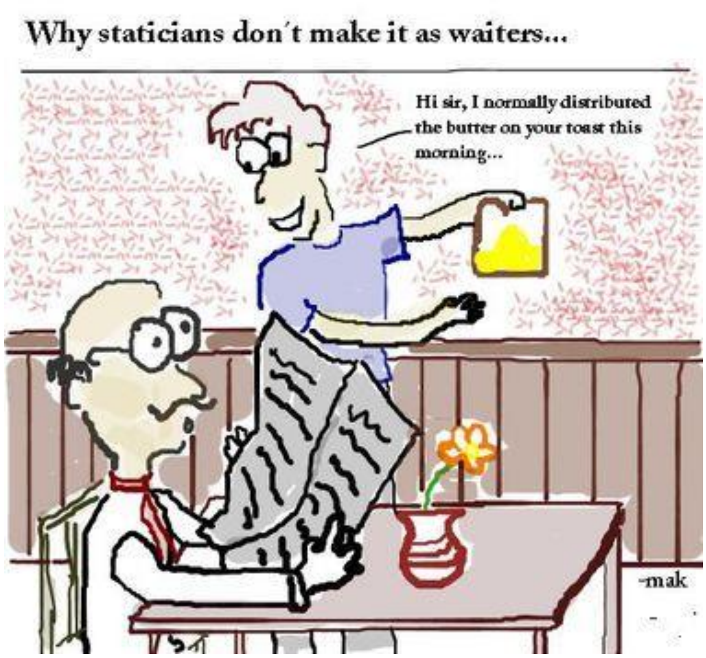
1. On considère en premier lieu l'équation homogène correspondant à cette équation (E), c'est-à-dire l'équation
   $$y'(t) + 5y(t) = 0$$
   Trouver l'ensemble des solutions de cette première équation différentielle.

2. On considère à présent le second membre, c'est-à-dire l'équation (E). Résoudre l'équation différentielle en détaillant les étapes intermédiaires.

3. Enfin, en utilisant la "condition initiale" $y(0) = 0$, trouver la valeur de la constante qui doit intervenir dans la solution de la question précédente.

1M005 – Eléments de Mathématiques – Portail BGC – 2016 / 2017

Probabilités



Licence 1 - L1 - Portail BGC

Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - Année 2016-2017

TD n ° 9 Probabilités et Théorème de Bayes

Exercice I : Probabilités – Rappels

1. **Jeu de cartes**
   On procède au tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes.
   Quelle est la probabilité que cette carte soit
   (a) un cœur ?
   (b) une figure ?
   (c) un cœur et une figure ?
   (d) un cœur ou une figure ?
   (e) une figure et un 9 ?
2. **Probabilités totales**
   Sur 100 personnes, 40 ont les yeux bleus, 45 les cheveux blonds et 25 ont à la fois les yeux bleus et les cheveux blonds.
   Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard ait les yeux bleus ou les cheveux blonds ?
3. **Probabilités totales, indépendance ou probabilités composées**
   Soient les évènements A et B tels que $P(A \cup B) = 0{,}85$; $P(A) = 0{,}7$ et $P(B) = 0{,}5$.
   Que valent les probabilités $P(\bar{A})$ et $P(\bar{B})$?
   Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
4. **Cartes sans remise**
   On tire dans un jeu de 52 cartes une main de 5 cartes (sans remise).
   Quelle est la probabilité que la main comporte deux dames ?
5. **Analyse critique**
   Monsieur et Madame Dupont ont deux enfants dont l'un est une fille.
   Quelle est la probabilité pour que leurs deux enfants soient des filles ?

Exercice II : Théorème de Bayes

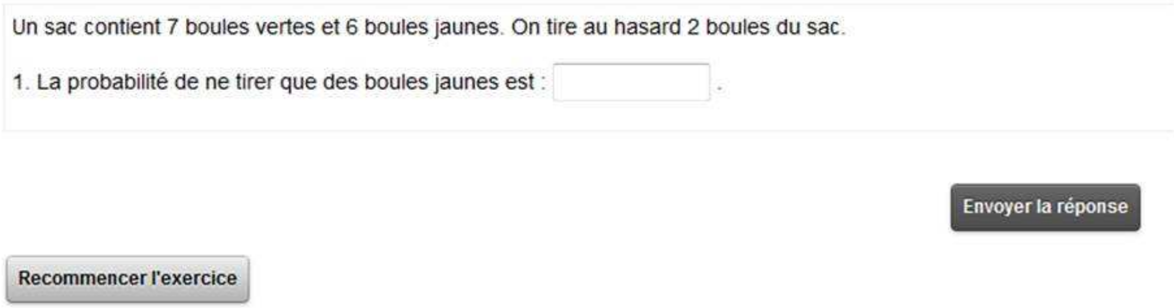
1. **Daltonisme**
   Dans une population P où il y a autant d'hommes que de femmes, la proportion des daltoniens est de 0,05 (ce qui représente 5%) et la proportion des daltoniennes est de 0,01 (ce qui représente 1%).
   (a) Un individu de P est choisi au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit daltonien ? Ce résultat peut être obtenu de deux manières.
   (b) Un individu de P est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit un homme sachant qu'il est daltonien ?
2. **Sport scolaire**
   Un médecin examine les élèves d'un groupe scolaire pour déterminer leur aptitude au sport.
   Au cours de cet examen, il constate que :
   – 2/3 des élèves sont d'origine rurale, les autres étant citadins ;
   – parmi les ruraux, la moitié présente une aptitude au sport que le médecin qualifie de bonne, tandis que seuls 40% des citadins présentent cette aptitude.

   (a) Quelle est la proportion d'élèves ayant une bonne aptitude au sport parmi l'ensemble des élèves ?

(b) Sachant qu'un élève a une bonne aptitude au sport, quelle est la probabilité qu'il soit d'origine rurale ? Qu'il soit citadin ?

(c) Répondre à la question (b) directement avec le théorème de Bayes, sans utiliser la réponse trouvée en (a).

Exercice Supplémentaire I : Extrait des Wims



Exercice Supplémentaire II : Extrait de partiels ou d'examens antérieurs

Extrait de l'examen de décembre 2013

Afin de détecter si un fœtus développe le syndrome de Down (trisomie 21), et avant d'effectuer des tests plus poussés, souvent invasifs, la femme enceinte effectue tout d'abord une prise de sang, pour doser les taux de trois marqueurs hormonaux (la β-HCG -marqueur principal-, l'α-fœto-protéine et l'œstriol). Voici les données générales extraites d'études médicales : le nombre de fœtus atteints par ce syndrome est de 1 pour 700 cas de grossesses ; parmi les fœtus atteints de trisomie 21, 1 sur 4 engendre un dosage hormonal anormal ; parmi les fœtus non atteints de trisomie 21, 1 sur 100 engendre un dosage hormonal anormal.

A partir de M, l'événement “fœtus atteint du syndrome”, et de D, l'événement “dosage hormonal anormal”, on note :
$p(M)$: la probabilité que le fœtus soit atteint du syndrome
$p(D|M)$: la probabilité que le dosage hormonal soit anormal quand le fœtus est atteint
et enfin $p(D|\bar{M})$ la probabilité que le dosage hormonal soit anormal quand le fœtus n'est pas atteint.

1. A partir des données de l'énoncé, attribuer les valeurs à chacune de ces trois probabilités.
2. En appliquant la formule de Bayes, trouver la probabilité que le fœtus soit atteint de trisomie quand le dosage hormonal est anormal. Le résultat sera exprimé sous la forme d'une fraction, la plus simplifiée possible.

Donnée : formule de Bayes : $p(A|B) = \dfrac{p(B|A)p(A)}{p(A)p(B|A) + p(\bar{A})p(B|\bar{A})}$

TD n ° 10 Variables Aléatoires et Lois Discrètes

Exercice I : Variables aléatoires discrètes

Soit S la somme des points obtenus lors du lancer de deux dés parfaitement équilibrés. On désigne par X_1 le nombre marqué par le premier dé et par X_2 celui marqué par le second.

a) Donner les ensembles fondamentaux de X_1, X_2 et S. Déterminer les expressions de la distribution de probabilité ainsi que celle de la fonction de répartition. Représenter ces deux grandeurs.

b) Calculer l'espérance et la variance de X_1.

c) Décrire le lien entre X_1 et X_2.

d) Calculer l'espérance et la variance de S.

e) Donner la distribution de probabilité de S et représenter sa fonction de répartition.

Exercice II : Epreuve de Bernoulli

Dans un jeu de "pile ou face", combien de fois faut-il lancer la pièce pour que la probabilité de n'obtenir que des "face" soit inférieure à 1% ?

Exercice III : Loi de Poisson. Loi binomiale

Dans un verger, le nombre de mites rouges par feuille de pommier suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0{,}25$.

(a) Quelle est la probabilité pour qu'une feuille prise au hasard sur un pommier de ce verger possède au moins une mite rouge ?

(b) On soumet le verger à un traitement qui a la probabilité $p = 0{,}9$ de tuer les mites rouges. Quelle est la probabilité pour qu'une feuille qui portait n mites avant le traitement n'en porte plus que k après le traitement ?

Exercice IV : Loi de Bernoulli. Loi géométrique

Un hamster dans une cage se trouve face à 5 portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage. A chaque essai infructueux, il reçoit une décharge électrique et on le replace à l'endroit initial.

1. **Sans apprentissage : loi géométrique**
   En supposant que le hamster ne soit pas doué d'apprentissage et qu'il choisisse de façon équiprobable entre les 5 solutions à chaque nouvel essai, déterminer la probabilité des événements suivants :
   (a) le hamster sort au premier essai ;
   (b) le hamster sort au troisième essai ;
   (c) le hamster sort au septième essai.

   Calculer l'espérance et la variance du nombre d'essais jusqu'à la sortie ou succès.

2. **Avec apprentissage**
   Le hamster mémorise les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés.
   On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre d'essais effectués jusqu'au succès.
   (a) Quelles valeurs peut prendre X ?
   Déterminer sa loi de probabilité.
   (b) Déterminer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et interpréter le résultat.

(c) Déterminer la variance $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

Exercice Supplémentaire I : Extrait des Wims

La probabilité qu'une pièce soit acceptable est 0.9

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 6 pièces prélevées avec remise, associe le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.

- X suit la loi binomiale $B($ ____ ; ____ $)$.
- Calculer à 10^{-4} près : $p(X = 1) =$ ____
- Pour obtenir la probabilité d'avoir plus de 2 pièces acceptables parmi les 6 pièces tirées, on doit calculer la probabilité de l'événement : X choisissez ____

  Cette probabilité est égale à ____ (valeur approchée à 10^{-4} près)
- L'espérance de X est égale à ____ et son écart type est égal à ____ . (valeur approchée à 10^{-4} près)

Envoyer la réponse

Recommencer l'exercice

Exercice Supplémentaire II : Extrait de partiels ou d'examens antérieurs

Extrait de l'examen de juin 2014

1. On dispose d'un dé rouge et d'un dé bleu, cubiques, chacun non truqué et présentant chacun 6 faces différentes numérotées de 1 à 6. On lance simultanément le dé bleu et le dé rouge : quel est le nombre total de combinaisons possibles ?
2. On dispose à présent d'un dé vert, cubique, présentant 6 faces différentes numérotées de 1 à 6. Celui-ci est truqué : la probabilité d'apparition d'une face est proportionnelle à la valeur k notée sur cette face. En notant X la variable aléatoire réelle associée au lancer de dé, cela signifie que $P[X = k] = pk$ où p est une constante à déterminer.
   (a) Quelles sont toutes les valeurs possibles pour X ?
   (b) En déduire la valeur de p, ainsi que la loi de probabilité de la variable X (on donnera la loi sous forme de tableau).
   (c) Définir $F_X(x)$, fonction de répartition de X (x étant réel), et représenter cette fonction sur un diagramme.

TD n ° 11 Variables Aléatoires et Lois Continues

Exercice I : Utilisation de la table de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

1. $\boldsymbol{\mathcal{N}(0,1)}$
   Sachant que $U = \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma = 1)$, calculer :
   (a) $P(U = 1,96)$; $P(U \leqslant 1,96)$; $P(U > 1,96)$; $P(U \leqslant -1,96)$; $P(U > 2,575)$.
   (b) $P(-1,21 \leqslant U \leqslant 1,53)$; $P(|U| \leqslant 1,96)$; $P(|U| \leqslant 2,575)$.
   (c) la valeur de u telle que $P(U \leqslant u) = 0,10$ ou $P(|U| \leqslant u) = 0,8$.
2. **Centrage et réduction de la loi normale $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}$**
   Sachant que X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 5, \sigma = 2)$, calculer :
   (a) $P(X \leqslant 7)$; $P(X > 1)$; $P(X > 2)$; $P(X \leqslant 3)$.
   (b) $P(4 \leqslant X \leqslant 7)$; $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$.
3. **Calcul de probabilité avec la loi normale $\boldsymbol{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}$**
   La masse, en grammes, d'une graine de pin pignon suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 0{,}5\ ,\ \sigma = 0{,}02)$.
   On choisit une graine au hasard.
   (a) Avec quelle probabilité aura-t-elle une masse comprise entre 0,496 g et 0,504 g ?
   (b) Avec quelle probabilité aura-t-elle une masse exactement égale à 0,5 g ? égale à $(0{,}5 \pm 0{,}01)$ g ?

Exercice II : Loi exponentielle

La durée, X, de l'attente entre l'instant d'ouverture et celui d'arrivée du premier client dans un magasin suit une loi exponentielle. On estime à 5 min la durée moyenne d'attente.

(a) Calculer le paramètre de la loi de X.
(b) Calculer la probabilité que l'on doive attendre un quart d'heure avant que n'arrive le premier client.
(c) Sachant que l'on a attendu cinq minutes et que le premier client n'est toujours pas arrivé, calculer la probabilité qu'il faille attendre encore dix minutes avant l'arrivée d'un client.

Exercice III : Approximation de la loi binomiale par la loi normale (théorème central limite)

Dans une population, la fréquence de l'allèle a est de 0,6. Cet allèle gouverne le phénotype (rh$-$) récessif devant le phénotype (rh+). On suppose l'indépendance des deux allèles : la probabilité des individus de phénotype (rh$-$), c'est-à-dire de génotype (rh$-$/rh$-$), d'avoir les deux allèles récessifs est :

$$p = P(\text{phénotype} = a) = P(1^{\text{er}} \text{ allèle est } a \text{ et } 2^{\text{nd}} \text{ allèle est } a) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$$

(a) Sur un échantillon de $n = 400$ personnes prélevées au hasard dans cette population, quelle est approximativement la probabilité d'obtenir 144 individus de phénotype (rh$-$) ?
(b) Sur ce même échantillon de 400 personnes, calculer la probabilité d'obtenir :
– au moins 160 individus (rh$-$).
– entre 130 et 160 individus (rh$-$) $(130 < Y < 160)$.

Exercice Supplémentaire I : Extrait des Wims

La variable aléatoire T suit la loi normale centrée réduite : $\mathcal{N}(0;1)$.
Déterminer la probabilité de l'événement :

$$-1.24 \leq T \leq 1.24$$

Table de la loi normale.

Entrez votre réponse :

$P(-1.24 \leq T \leq 1.24) =$

Envoyer la réponse

Indication | Recommencer l'exercice

Exercice Supplémentaire II : Extrait de partiels ou d'examens antérieurs

Extrait de l'examen de décembre 2013

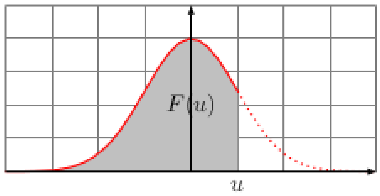
Une petite ville doit élire son maire ; il y a deux candidats. Le statisticien local a déterminé grâce à un sondage que chaque vote a une probabilité égale à 0,5 d'être en faveur du candidat A.

1. Dans la famille Dupond, il y a trois personnes qui ont voté. On suppose qu'elles votent indépendamment. Soit X le nombre de votes pour le candidat A dans cette famille.
   (a) Comment s'appelle la loi suivie par X (si cette loi a un ou plusieurs paramètres, les identifier) ? Quelles sont toutes les valeurs possibles de X ? Calculer l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer la fonction de probabilité de X, c'est-à-dire calculer la probabilité $P[X = x]$ pour toute valeur x possible de X. On pourra présenter le résultat sous forme de tableau.
2. A la fermeture des bureaux de vote, 10000 bulletins de vote vont être dépouillés. On suppose que les votes sont indépendants.
   (a) Soit S le nombre total de votes pour le candidat A. Justifier que S est une somme de 10000 variables de Bernoulli indépendantes dont on donnera le paramètre.
   (b) Soit $Y = (S - 5000)/100$. Calculer l'espérance et la variance de Y. En utilisant le théorème central limite, justifier que Y est approximativement normale.
   (c) Calculer une valeur approchée de la probabilité que le candidat A obtienne moins de 49% des votes.

Table de la loi normale

La table indique, pour $u > 0$, la fonction de répartition $F(u)$ de la loi normale centrée réduite.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}x \, .$$



Pour $u < 0$, on utilise la relation : $F(u) = 1 - F(-u)$.

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	$0,9^2893$	$0,9^2896$	0,9990
3,1	$0,9^303$	$0,9^306$	$0,9^310$	$0,9^313$	$0,9^316$	$0,9^318$	$0,9^321$	$0,9^324$	$0,9^326$	$0,9^329$
3,2	$0,9^331$	$0,9^334$	$0,9^336$	$0,9^338$	$0,9^340$	$0,9^342$	$0,9^344$	$0,9^346$	$0,9^348$	$0,9^350$
3,3	$0,9^352$	$0,9^353$	$0,9^355$	$0,9^357$	$0,9^358$	$0,9^360$	$0,9^361$	$0,9^362$	$0,9^364$	$0,9^365$
3,4	$0,9^366$	$0,9^368$	$0,9^369$	$0,9^370$	$0,9^371$	$0,9^372$	$0,9^373$	$0,9^374$	$0,9^375$	$0,9^376$
3,5	$0,9^377$	$0,9^378$	$0,9^378$	$0,9^379$	$0,9^380$	$0,9^381$	$0,9^381$	$0,9^382$	$0,9^383$	$0,9^383$
3,6	$0,9^384$	$0,9^385$	$0,9^385$	$0,9^386$	$0,9^386$	$0,9^387$	$0,9^387$	$0,9^388$	$0,9^388$	$0,9^389$
3,7	$0,9^389$	$0,9^390$	$0,9^400$	$0,9^404$	$0,9^408$	$0,9^412$	$0,9^415$	$0,9^418$	$0,9^422$	$0,9^425$
3,8	$0,9^428$	$0,9^431$	$0,9^433$	$0,9^436$	$0,9^438$	$0,9^441$	$0,9^443$	$0,9^446$	$0,9^448$	$0,9^450$
3,9	$0,9^452$	$0,9^454$	$0,9^456$	$0,9^458$	$0,9^459$	$0,9^461$	$0,9^463$	$0,9^464$	$0,9^466$	$0,9^467$
4,0	$0,9^468$	$0,9^470$	$0,9^471$	$0,9^472$	$0,9^473$	$0,9^474$	$0,9^475$	$0,9^476$	$0,9^477$	$0,9^478$

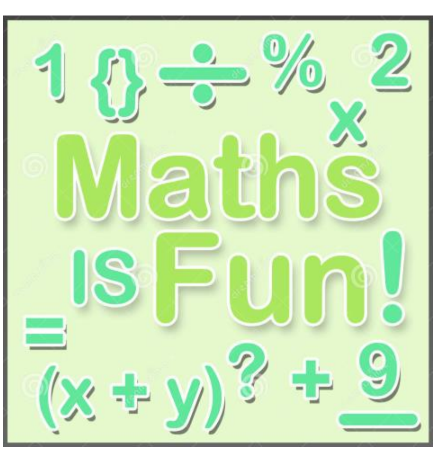
La variable u est la somme des entêtes des lignes et des colonnes, soit par exemple : $F(0,6+0,04) = 0{,}7389$.
Dans la notation $0{,}9^386$, l'exposant est le nombre de 9, soit par exemple $F(3,63) = 0,9^386 = 0,99986$.

1M005 – Eléments de Mathématiques – Portail BGC – 2016 / 2017

Annexes

(Jean-Michel Mariot)

*Rappels de Trigonométrie
*Rappels sur les Vecteurs
*Rappels sur les Fonctions élémentaires *ln* et *exp*



Licence 1 - L1 - Portail BGC
Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - Année 2016-2017

Fonctions trigonométriques

1 Unités d'angle

Il y a deux façons répandues de spécifier la valeur d'un angle :

1. les *degrés*, qui sont définis de manière à ce que l'angle droit fasse 90 degrés (90°), un cercle complet couvrant 360° ;
2. les *radians*, qui sont associés à une définition mathématique : la valeur en radians d'un angle $\widehat{\mathrm{AOB}} = \theta$ dont le sommet est au centre d'un cercle de rayon r est le rapport entre la longueur s de l'arc sous-tendant l'angle et le rayon r du cercle (Fig. 1) :

$$\theta = \frac{s}{R} \,. \tag{1}$$

N.B. : en pratique, le symbole de l'unité est souvent omis et un angle donné sans unité est considéré comme donné en radians.

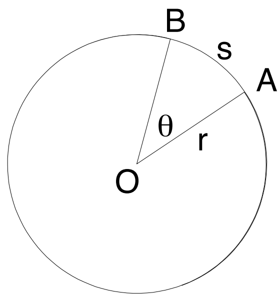


FIGURE 1 – Cercle de rayon r et arc de cercle de longueur s sous-tendu par l'angle au centre θ.

Dans ces conditions, on a :

$$\frac{\theta \text{ (rad)}}{2\pi} = \frac{\theta \text{ (°)}}{360} \,, \tag{2}$$

ce qui revient à dire que $\theta = 1$ est équivalent à $\theta \approx 57°18'$.

2 Systèmes de coordonnées cartésiennes

La position d'un point dans un plan peut être spécifié de manière unique par ses coordonnées dans un système de coordonnées. Un système de coordonnées très utilisé est le *système cartésien* (rectangulaire) de coordonnées : il est constitué d'une origine O et de deux axes perpendiculaires, les axes de coordonnées, passant par l'origine et orientés (Fig. 2). Les coordonnées d'un point du plan xy sont constituées par la paire ordonnée (x, y), où x est appelé l'abcisse et y l'ordonnée. Le point de coordonnés (x, y) est situé à la distance $|x|$ de l'axe y et à la distance $|y|$ de l'axe x (conventionnellement l'axe x est horizontal et dirigé vers la droite, l'axe y étant vertical et dirigé vers le haut ; le point est à droite de l'axe y si $x > 0$ et à sa gauche si $x < 0$; il est au-dessus de l'axe x si $y > 0$ et en-dessous si $y < 0$).

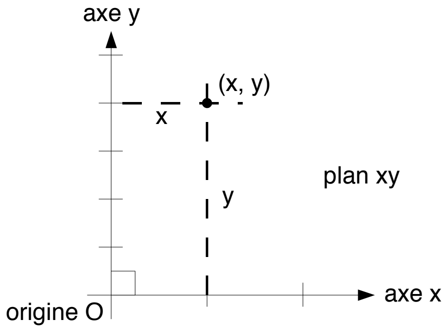


FIGURE 2 – Système cartésien de coordonnées.

3 Définition des fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques les plus importantes de l'angle α, l'angle interne $\hat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{BAC}} = \alpha$ dans le triangle rectangle de la Fig. 3, sont le *sinus*, le *cosinus* et la *tangente* :

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} \tag{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \tag{4}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{coté adjacent}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} . \tag{5}$$

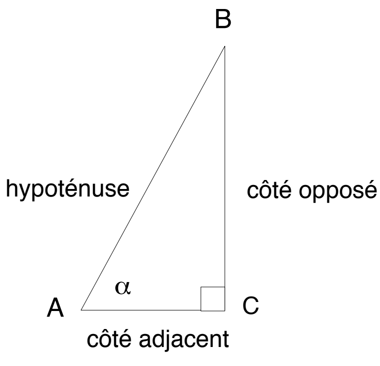


FIGURE 3 – Triangle rectangle utilisé pour définir les fonctions trigonométriques.

D'après le théorème de Pythagore, on a donc : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\forall\alpha$.

4 Relations trigonométriques

Dans un triangle quelconque ABC, de côtés a, b et c, les angles opposés respectifs étant α, β et γ, on a :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \tag{6}$$

et

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \; . \tag{7}$$

Formules d'addition et conséquences :

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta && (8)\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta && (9)\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta && (10)\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \; . && (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha && (12)\\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha && (13)\\
&= 1 - 2\sin^2\alpha && (14)\\
&= 2\cos^2\alpha - 1 \; . && (15)
\end{aligned}$$

5 Fonctions trigonométriques pour tous les angles ; parité et périodicité

Les définitions des fonctions trigonométriques en termes des côtés d'un triangle rectangle (Eqs. 3–5) ne s'appliquent qu'à des valeurs d'angle allant de 0 à $\pi/2$ (0 à 90°). Elles peuvent être étendues à toutes les valeurs d'angle en introduisant les coordonnées d'un point sur un cercle (Fig. 4) par les relations

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \; . \tag{16}$$

Dans le premier quadrant (I), c'est-à-dire lorsque $0 < \theta < \pi/2$, les valeurs de x et y sont positives et $\sin\theta > 0$, $\cos\theta > 0$ et $\tan\theta > 0$ (voir le Tableau 1), ce qui revient à définir un angle orienté, le sens de parcours positif étant celui du sens inverse des aiguilles d'une montre.

Une fonction $f(x)$ est :

1. *paire* lorsque $f(-x) = f(x)$;
2. *impaire* lorsque $f(-x) = -f(x)$;
3. *périodique*, de période a, lorsque $f(x+a) = f(x)$.

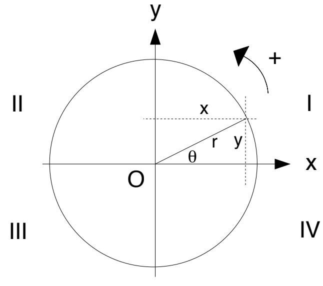


FIGURE 4 – Cercle "trigonométrique".

Quadrant	I	II	III	IV
Angle	$0 < \theta < \pi/2$ $0° < \theta < 90°$	$\pi/2 < \theta < \pi$ $90° < \theta < 180°$	$\pi < \theta < 3\pi/2$ $180° < \theta < 270°$	$3\pi/2 < \theta < 2\pi$ $270° < \theta < 360°$
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

Table 1 – Signe des fonctions trigonométriques

D'où les relations :

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta \tag{17}$$

$$\sin(\pi/2-\theta) = \cos\theta \qquad \cos(\pi/2-\theta) = \sin\theta \qquad \tan(\pi/2-\theta) = 1/\tan\theta \tag{18}$$

$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta \qquad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \qquad \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta \tag{19}$$

$$\sin(\pi/2+\theta) = \cos\theta \qquad \cos(\pi/2+\theta) = -\sin\theta \qquad \tan(\pi/2+\theta) = -1/\tan\theta \tag{20}$$

6 Valeurs particulières des fonctions trigonométriques

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
θ (rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

Table 2 – Valeurs particulières des fonctions trigonométriques.

7 Système de coordonnées polaires

Chaque point du plan peut être repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) : sa coordonnée radiale (r) et sa coordonnée angulaire (θ). La coordonnée radiale r (ou rayon vecteur) exprime la distance entre un point central appelé pôle (équivalent à l'origine des coordonnées cartésiennes) et le point. La coordonnée angulaire θ (ou angle polaire) exprime la mesure, dans le sens trigonométrique, de l'angle entre l'axe polaire (équivalent à l'axe des abscisses en coordonnées cartésiennes) et la droite joignant le pôle et le point.

Les deux coordonnées polaires r et θ sont liées aux coordonnées cartésiennes x et y par les relations (Fig. 5) :

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta\,.$$

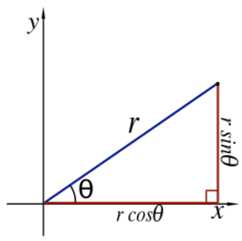


Figure 5 – Conversion entre coordonnées polaires et cartésiennes.

Licence 1 - L1 - Portail BGC
Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - Année 2016-2017

Vecteurs

1 Définition

Un vecteur $\mathbf{A}$ (ou $\vec{A}$) est un être géométrique défini par a grandeur, sa direction et son sens. On le représente graphiquement par un segment orienté :

- sa *direction* est définie par la droite à laquelle appartient le segment ;
- son *sens*, indiqué par une flèche, donne le sens du parcours ;
- sa *grandeur*, ou *norme*, (notée $||\mathbf{A}||$ ou A) est la longueur du segment.

Deux vecteurs sont égaux quand leurs grandeurs sont égales, leurs directions et leurs sens identiques.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$: $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Si m est un nombre réel, alors $m\vec{A}$ est un vecteur de grandeur $|m|A$, de même direction et de sens identique si $m > 0$ ou de sens opposé si $m < 0$.

2 Somme vectorielle

La somme $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ des vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est un vecteur un obtenu en mettant l'origine de $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$) sur l'extrémité de $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B}$) et en joignant l'origine de $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B}$) avec l'extrémité de $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$).
On a donc :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \; .$$

Le vecteur $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ est défini comme la somme de $\mathbf{A}$ avec l'opposé de $\mathbf{B}$.
Il en résulte que, $\forall$ O :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \; .$$

Si m et n sont deux nombres réels, on a :

$$(m+n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A} \qquad \text{et} \qquad m(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B} \; .$$

3 Composantes d'un vecteur

Dans un système d'axes cartésiens Oxy (vecteurs de base $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$), tout vecteur $\mathbf{A}$ peut être exprimé comme $\mathbf{A} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$. Les nombres réels a_x et a_y sont appelés composantes du vecteur.

$\longrightarrow$ Dans ce qui suit, on considère un repère cartésien orthonormé, c'est-à-dire dans lequel les vecteurs de base sont orthogonaux et normés à l'unité.

4 Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs **A** et **B** est le nombre

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||\ \cos\theta\ ,$$

où θ est l'angle formé par les directions des vecteurs **A** et **B** ($0 \leq \theta \leq \pi$).
Ainsi, le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul.

En utilisant les composantes cartésiennes des vecteurs, le produit scalaire s'écrit :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_x b_x + a_y b_y.$$

La norme du vecteur **A** est donc donnée par : $||\mathbf{A}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.
On a évidemment :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}\ .$$

5 Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel du vecteur **A** par le vecteur **B** est le vecteur **C** défini par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{B}||\ \sin\theta\ \ \mathbf{k}\ ,$$

où θ est l'angle formé par les directions des vecteurs **A** et **B** ($0 \leq \theta \leq \pi$), et où **k** le vecteur unitaire perpendiculaire au plan (**i**, **j**) tel que les vecteurs (**i**, **j**, **k**) forment un trièdre direct.

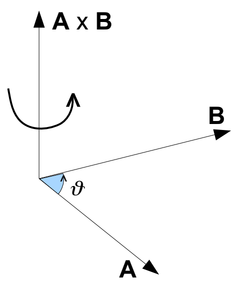


Figure 1 – Produit vectoriel de deux vecteurs

On a donc :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})\ .$$

Ainsi, le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul.
En utilisant les composantes cartésiennes des vecteurs, le produit vectoriel s'écrit :

$$\mathbf{C} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}\ .$$

Licence 1 - L1 - Portail BGC
Unité d'enseignement 1M005
Eléments de Mathématiques
UPMC - Année 2016-2017

Logarithmes et exponentielles

1 Logarithme

Définition
L'opération qui consiste à élever un nombre à une puissance entière est bien connue : $a \times a \times a = a^3$, par exemple.
On peut rencontrer des puissances non entières, soit a^x, où x est réel.
Si $y = a^x$ $(a > 0)$, le logarithme (de *base* a) de y est défini par : $x = \log_a y$.
Propriétés

$a^0 = 1$	$\log_a(a^0) = 0$
$a^1 = a$	$\log_a(a) = 1$
$a^{\log_a(b)}$	b
$a^{1/2} = \sqrt{a}$	$\log_a(a^{1/2}) = 1/2$
$a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$	$\log_a(a^{x_1}a^{x_2}) = x_1 + x_2 = \log_a(a^{x_1}) + \log_a(a^{x_2})$
$a^{-x} = 1/a^x$	$\log_a(a^{-x}) = -x = -\log_a(x)$
$(a^x)^y = a^{xy}$	$\log_a(a^{xy}) = xy$
$(a^\infty) = \infty$	$\log_a(\infty) = \infty$
$(a^{-\infty}) = 0$	$\log_a(-\infty) = 0$

TABLE 1 – Quelques propriétés des logarithmes.

• Lorsque $a = 10$, on parle de *logarithme décimal* et, si $y = 10^x$, on a $x = \log_{10} y \equiv \log y$.
Pour les valeurs entières de x, il est donc facile de construire une table de logarithmes :

y	$\log_{10} y$
$\cdots$	$\cdots$
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
$\cdots$	$\cdots$

TABLE 2 – Logarithmes décimaux de quelques puissances de 10.

Si on se rappelle que $\log 2 \approx 0{,}30$, il est facile de construire sur le dos d'un ticket de métro une table de logarithme (voir le Tableau 3) !

x	$\log x$
2	0,301
3	0,477
4	0,602
5	0,699
6	0,778
7	0,845
8	0,903
9	0,954

TABLE 3 – Mini table de logarithmes (base 10).

• En dehors de la base 10, on utilise comme base e, le nombre d'Euler, qui est tel que $\ln e = 1$.[1] On parle alors de *logarithme népérien*.
Les conversions entre logarithme décimaux et logarithmes népériens se fait à l'aide des relations :

$$\log b = \frac{\ln b}{\ln 10} = \ln b \times \log e$$
$$\ln b = \frac{\log b}{\log e} = \log b \times \ln 10$$

avec $\log e = 0{,}434\cdots$ et $\ln 10 = 2{,}302\cdots$

Remarque : la dérivée de $\ln x$ est $1/x$.

2 Exponentielle

Définition
C'est la fonction inverse de la fonction ln :

$$e^x \equiv \exp(x) \quad \longleftrightarrow \quad x = \ln y.$$

Remarque : la dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle elle-même.

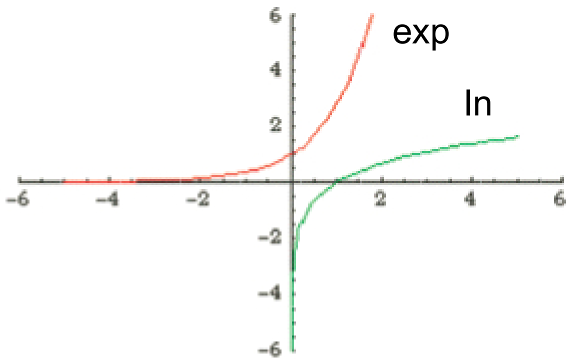


FIGURE 1 – Graphe des fonctions ln (en vert) et exp (en rouge).

1. Le nombre e est aussi défini par : $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\cdots$