Corso di Geometria a.a. 2009/10, Compitino di autoverifica

1. Sia $M_{n,n}(\mathbb{K})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo, e siano

   - $\mathbb{A}$ il sottoinsieme delle matrici antisimmetriche,
   - $\mathbb{S}$ quello delle matrici simmetriche,
   - $GL_n(\mathbb{K})$ il sottoinsieme delle matrici invertibili.
   - $\mathcal{S}$ il sottoinsieme delle matrici con determinante nullo.
   - $\mathcal{N}$ il sottoinsieme delle matrici A una cui potenza A^k è nulla (tali matrici si chiamano *nilpotenti*)

   (a) verificare che $\mathbb{A}$ e $\mathbb{S}$ sono sottospazi vettoriali, e determinare la loro dimensione.

   (b) Dire, giustificando la risposta, se $M_{n,n}(\mathbb{K})$ è somma diretta di $\mathbb{A}$ e $\mathbb{S}$.

   (c) $GL_n(\mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $M_{n,n}(\mathbb{K})$? Se non lo è, determinare il sottospazio generato da tale sottoinsieme.

   (d) Stessa domanda per $\mathcal{S}$ e $\mathcal{N}$.

   (se dà fastidio lavorare con un campo qualunque supponete pure $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{C}$.)

2. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Dimostrare che le matrici $I, A, A^2, \cdots A^N, \cdots$ sono linearmente dipendenti. Per $n = 2$ determinare, in funzione di A, la dimensione del sottospazio generato da $I, A, A^2, \cdots A^N, \cdots$.

3. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,m}(\mathbb{K}), C \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ e si consideri la matrice "a blocchi"
$$\Delta = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

   (a) mostrare che $\det \Delta = \det A \det B$.

   (b) Siano A', B', C' della stessa forma di A, B, C e Δ' costruita analogamente. Trovare una formula per esprimere il prodotto $\Delta\Delta'$ in termini di A, B, C, A', B', C'.

4. Sia $P_3[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una indeterminata di grado minore o uguale a 3. Consideriamo i sottoinsiemi:

(a) $A_1 := \{p(X) \in P_3[X]$ tali che $p(2) = 1\}$,

(b) $A_2 := \{p(X) \in P_3[X]$ tali che $p(\sqrt{3}) = 0\}$,

(c) $A_3 := \{p(X) \in P_3[X]$ tali che $p(2)p(5) = 0\}$,

(d) $A_4 := \{p(X) \in P_3[X]$ tali che $p(1 + i) = 0\}$.

Per ciascuno di tali sottoinsiemi dire se è un sottospazio vettoriale. In caso affermativo calcolarne la dimensione, in caso negativo determinare il sottospazio generato da tale sottoinsieme e calcolarne la dimensione.

5. Dati tre sottospazi vettoriali $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ di uno spazio vettoriale $\mathbf{V}$, dire quali relazioni di inclusione ci sono tra

   $\mathbf{A} + (\mathbf{B} \cap \mathbf{C})$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} + \mathbf{C})$,

   e tra

   $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ e $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$.

6. (*) Siano $x_1, \ldots, x_n$ elementi di un campo $\mathbb{K}$, e si consideri la matrice quadrata di ordine n

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

   Calcolarne il determinante (si suggerisce di procedere per induzione su n).