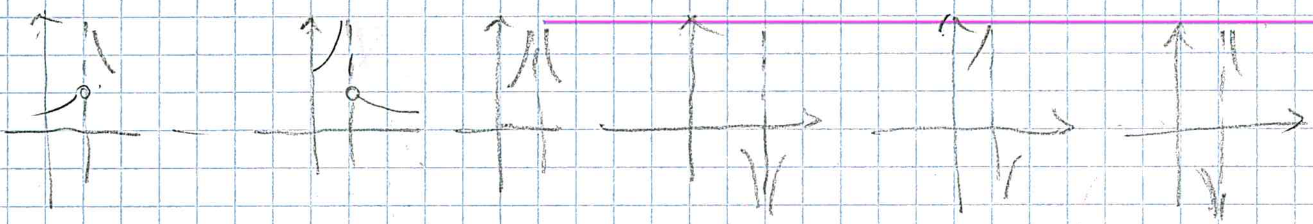
Ricerca degli asintoti

Def.

$x = x_0$ è asintoto verticale della funzione $f(x)$ se

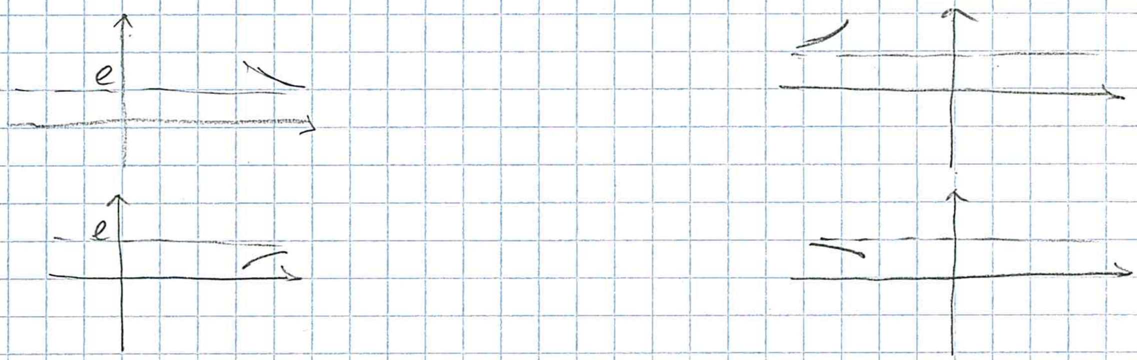
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ oppure se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ o $-\infty$



Def.

$y = l$ è asintoto verticale della funzione $f(x)$ se

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ oppure se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$



Per cercare gli asintoti

- $D = \ldots$
- Ricerca asintoti orizzontali

  Se $D = \mathbb{R}$ non ci sono

  se $D = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to x_0} \ldots = \pm\infty$ ok

- Ricerca asintoti verticali

  $\lim_{x \to \pm\infty}$

  se ci sono nel dominio

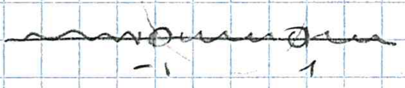
Determinare gli eventuali asintoti orizzontale e verticali di $f(x) = \frac{4x^2-x+1}{x^2-1}$

Soluzione

Dominio: $x^2-1 \neq 0$

$x^2 \neq 1$

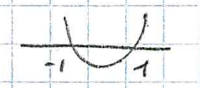
$x \neq \pm 1$ D:



Cerco gli asintoti verticali

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{4x^2-x+1}{x^2-1} = \frac{4-\cancel{1}+\cancel{1}}{0^+} = +\infty$$

$y = x^2-1$



$$\left(\lim_{x \to 1^-} \frac{4x^2-x+1}{x^2-1} = \frac{4-1+1}{0^-} = -\infty \right)$$ quindi $x=1$ è asintoto verticale (a dx e a sx)

$$\lim_{x \to -1^\pm} \frac{4x^2-x+1}{x^2-1} = \frac{4+1+1}{0^\mp} = \mp\infty$$ $\Rightarrow x=-1$ è asintoto verticale a dx e a sx

Cerco gli asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2-x+1}{x^2-1} = \lim \frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 4$$ $y=4$ è asintoto oriz. a dx e a sx

---

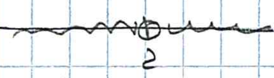
Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e verticali di $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x+4}$

Soluzione

Dominio $x^2+4x+4 \neq 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$x \neq -2$

D:



Cerco gli asintoti verticali

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+3}{\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2}} = \frac{\overbrace{-2+3}^{+1}}{0^+} = +\infty$$ $\Rightarrow x=-2$ è asintoto verticale (a dx e sx)

$$\left(\lim_{x \to -2^-} \frac{x+3}{\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2}} = \frac{\overbrace{-2+3}^{+1}}{0^+} = +\infty \right)$$

Cerco gli asintoti orizzontali

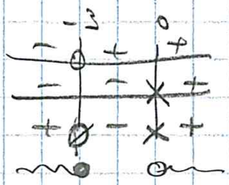
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x^2+4x+4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$ $\Rightarrow y=0$ è asintoto orizzontale a dx e sx

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{x^2+4x+4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Determinare gli eventuali asintoti verticali e orizzontali di $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x}}$

Soluzione

Dominio $\frac{x+3}{x} \geq 0$ $N \geq 0$ $x+3 \geq 0$ $x \geq -3$
$D > 0$ $x > 0$



$D: x \leq -3 \vee x > 0$

Cerco gli asintoti verticali

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{x+3}{x}} = \sqrt{\frac{+3}{0^+}} = \sqrt{+\infty} = +\infty \Rightarrow x=0$ è asintoto verticale a dx

($\lim_{x \to 0^-}$ non ha senso per il dominio)

Cerco gli asintoti orizzontali

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}} = \sqrt{1} = 1$

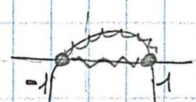
$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}} = \sqrt{1} = 1$

$y=1$ è asintoto orizzont. a dx e sx

Determinare gli eventuali asintoti verticali e orizzontali di $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Soluzione Dominio $1-x^2 \geq 0$ uso le parabole $1-x^2=0$ $x^2=1$ $x=\pm 1$

quindi $D: [-1; 1]$



$\} \geq 0$

$-1 \leq x \leq 1$

- Cerco gli asintoti verticali

$\lim_{x \to -1^+} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{0^+} = 0$

$\lim_{x \to +1^-} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{0^+} = 0$

non ci sono asintoti verticali

- Cerco gli asintoti orizzontali $\Rightarrow$ non ci sono perché non ha senso calcolare $\lim_{x \to +\infty}$ o $\lim_{x \to -\infty}$ perché il dominio è $[-1; 1]$

Determinare gli eventuali asintoti verticali e orizzontali di $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Soluzione Dominio $x^2+1 \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$

- Cerco gli asintoti verticali $\Rightarrow$ non ci sono perché $D = \mathbb{R}$ e non ci sono valori esclusi dal dominio

- Cerco gli asintoti orizzontali

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow y=0$ è AS. ORIZ. DX e SX

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \frac{1}{-\infty} = 0$

Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e verticali di $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x^2}$

Soluzione

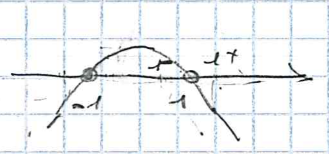
D_f: $1-x^2 \neq 0 \qquad -x^2 \neq -1 \qquad x^2 \neq 1 \qquad x \neq \pm\sqrt{1} \qquad x \neq \pm 1$

quindi D_f: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \quad \lim\limits_{x\to -1^-} \quad \lim\limits_{x\to -1^+} \quad \lim\limits_{x\to 1^-} \quad \lim\limits_{x\to 1^+} \quad \lim\limits_{x\to +\infty}$

Cerco gli asintoti orizzontali:

$y = 1-x^2$ PARABOLA



$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{1-x^2} = \frac{(e^1)^+}{0^-} = -\infty \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ \text{AS. ORIZ.} \end{matrix}$$

$$\left(\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{1-x^2} = \frac{(e^1)^+}{0^+} = +\infty \right)$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{e^x}{1-x^2} = \frac{(e^{-1})^+}{0^+} = +\infty \Rightarrow \begin{matrix} x=-1 \\ \text{AS. ORIZ.} \end{matrix}$$

$$\left(\lim_{x\to -1^-} \frac{e^x}{1-x^2} = \frac{(e^{-1})^+}{0^-} = -\infty \right)$$

Cerco gli asintoti verticali:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{e^x}}{1-x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{e^x}}{\underset{\to -\infty}{-x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{e^x}}{-1} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\overset{\to 0}{e^x}}{\underset{\to -\infty}{1-x^2}} = \frac{0}{-\infty} = 0 \cdot \underset{\to 0}{\frac{1}{-\infty}} = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y=0 \text{ AS. VERT.}$$

Determinare gli eventuali asintoti orizzontali e verticali della funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

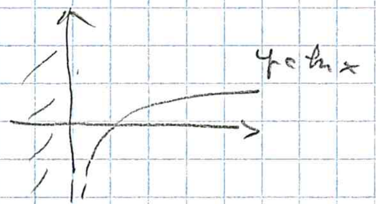
Soluzione

$D_f: \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$

$D_f: (0, +\infty)$ → $\lim\limits_{x \to 0^+}$, $\lim\limits_{x \to +\infty}$

Cerco gli asintoti verticali

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{\to -\infty}{\ln x}}{\underset{\to 0^+}{x}} = \frac{-\infty}{0^+} = (-\infty) \cdot \underset{\downarrow\ +\infty}{\frac{1}{0^+}} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$



quindi $x = 0$ AS. ORIZ. (DX)

Cerco gli asintoti verticali

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{\ln x}}{\underset{\to +\infty}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+ \Rightarrow y = 0 \text{ è AS. VERT (DX)}$$