FUNZIONE LOGARITMICA

DEF LOGARITMO

$\log_a x = b$ significa $a^b = x$

con $a > 0$
con $x > 0$ (perché $a^b > 0$ sempre)

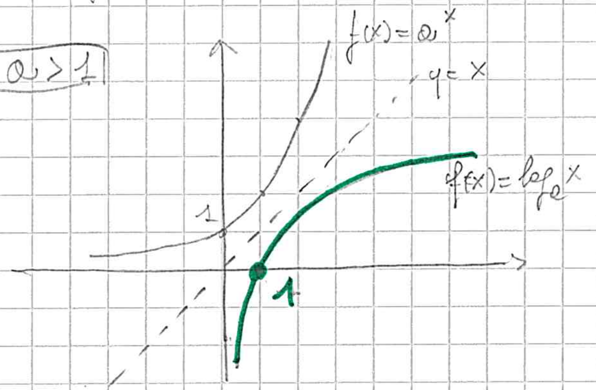
da cui la funzione logaritmo

$f(x) = \log_a x$ $\quad f:]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ con $a > 0$, $a \neq 1$

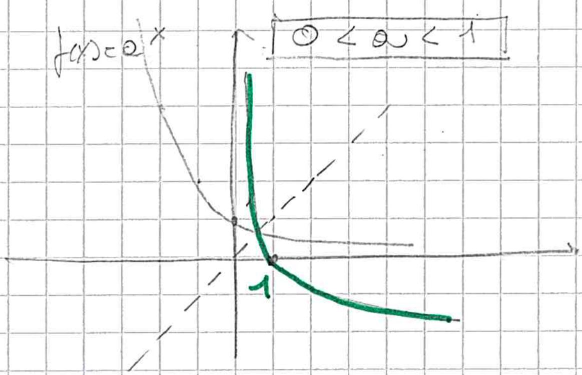
CE: $x > 0$

è la funzione inversa della funzione esponenziale

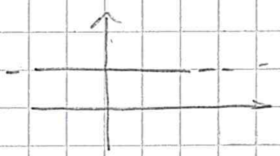
$a > 1$



$0 < a < 1$



NB se $a = 1$ $\quad f(x) = a^x = 1^x$



non è una funzione iniettiva, quindi non ha l'inversa.
Ecco perché nella funzione logaritmo è $a \neq 1$

Poiché $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$
sono l'una la funzione inversa dell'altra si ha che

cioè $f \circ g(x) = x$ $\quad$ e $\quad g \circ f(x) = x$

$f(g(x)) = x$ $\qquad g(f(x)) = x$

$f(\log_a x) = x$ $\qquad g(a^x) = x$

$\boxed{a^{\log_a x} = x}$ $\qquad \boxed{\log_a (a^x) = x}$

PROPRIETA'

$\log_a a = 1$ perché $a^1 = a$

$\log_a 1 = 0$ perché $a^0 = 1$

$\log_a x + \log_b y = \log_a (x+y)$ $\log_a x \cdot \log_a y =$ STOP

$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$ $\frac{\log_a x}{\log_b y} =$ STOP

$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

Calcolare il logaritmo

$\log_2 8 = x \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

$\log_4 \frac{1}{2} = x \Rightarrow 4^x = \frac{1}{2} \Rightarrow (2^2)^x = 2^{-1} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-1}$
$\Rightarrow \frac{2}{2}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\log_3 1 = x \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$

$\log_3 \sqrt{3} = x \Rightarrow 3^x = \sqrt{3} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Calcolare l'argomento

$\log_2 x = 4 \Rightarrow 2^4 = x \Rightarrow x = 16$

$\log_3 x = -1 \Rightarrow 3^{-1} = x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$\log_3 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = x \Rightarrow x = \sqrt{3}$

Calcolare la base

$\log_x 9 = 2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 <$ $x = 3$ acc. / $x = -3$ non acc (perché base > 0)

$\log_x 9 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 9 \Rightarrow \sqrt{x} = 9 \Rightarrow x = 81$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Teor: Se $\log_a x_1 = \log_a x_2 \iff x_1 = x_2$ con $x_1, x_2 \in D$

(questo perché $f(x) = \log_a x$ è una funz. iniettiva)

• $3 \log x = \log 8$ C.E. $x > 0$

$\log x^3 = \log 8$

$x^3 = 8 \Rightarrow x^3 = 2^3 \Rightarrow x = 2$ acc. per il C.E.

• $\log(x-1) - \log(2-x) = 0$

C.E. $\begin{cases} x-1>0 \\ 2-x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>1 \\ x<2 \end{cases}$

$-x > -2$

$x < 2$

$\log(x-1) = \log(2-x)$

$x - 1 = 2 - x$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$ accettabile per il C.E.

C.E.: $1<x<2$

• $2 \log x - \frac{1}{2} \log 4 = 0$

C.E. $x > 0$

$2 \log x = \frac{1}{2} \log 4$

$\log x^2 = \log 4^{\frac{1}{2}}$

$\log x^2 = \log \sqrt{4}$

$\log x^2 = \log 2$

$x^2 = 2$

$x = \pm 2$

$x = 2$ accettabile per il C.E.

$x = -2$ non accettabile

→ $\log x + \log(x+1) = \log 3x$ CE $\begin{cases} x>0 \\ x+1>0 \\ 3x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x>-1 \\ x>0 \end{cases}$

$\boxed{x>0}$

$\log[x(x+1)] = \log 3x$

$x(x+1) = 3x$

$x^2 + x - 3x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0$

NON acc. per il CE

$x = 2$ accettabile per il CE

→ $\log_2(x-1) = 1$ CE $x-1>0$ $\boxed{x>1}$

$\log_2(x-1) = \log_2 2$ NB $1 = \log_2 2$

$x - 1 = 2$

$x = 3$ acc. per il CE

→ $\log_2(x-1) = 0$ NB $0 = \log_2 2^0$ CE $x>1$

$\log_2(x-1) = \log_2 2^0 \; = 1$

$\log_2(x-1) = \log_2 1$

$x - 1 = 1$

$x = 1+1$

$x = 2$ acc. per il C.E

NB $2 = \log_2 2^2$

→ $\log_2(x-1) = 2$ CE $x-1>0$ $x>1$

$\log_2(x-1) = \log_2 2^2$

$\log_2(x-1) = \log_2 4$

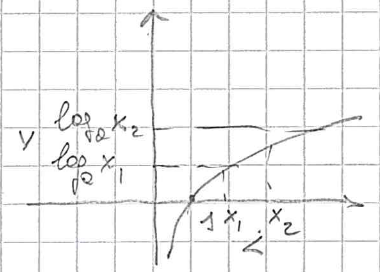
$x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$ accettabile per il CE

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

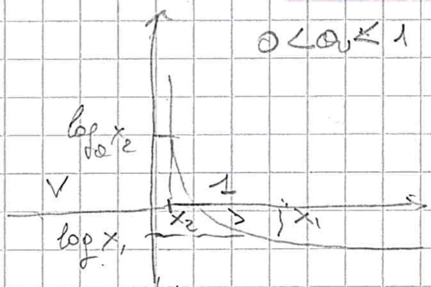
$f(x) = \log_a x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$

CE $x > 0$

$a > 1$



$0 < a < 1$



Teorema

Se $a > 1$

$\log_a x_1 \underset{>}{<} \log_a x_2 \Rightarrow x_1 \underset{>}{<} x_2$

(mantiene il verso della disequazione)

"STESSO VERSO"

Teorema

Se $0 < a < 1$

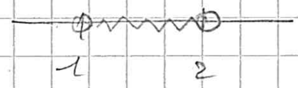
$\log_a x_1 \underset{>}{<} \log_a x_2 \Rightarrow x_1 \underset{<}{>} x_2$

(cambia il verso della disequazione)

"CAMBIO VERSO"

① $\log_2 (x-1) > \log_2 (2-x)$

CE $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases}$



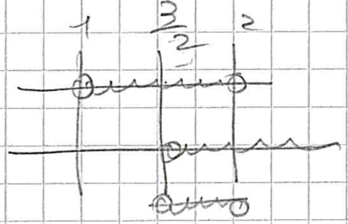
CE $1 < x < 2$

$x - 1 > 2 - x$

$2x > 3$

$x > \frac{3}{2}$

$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$



$\boxed{\frac{3}{2} < x < 2}$

② $\log_{\frac{1}{2}} (x-1) > \log_{\frac{1}{2}} (2-x)$

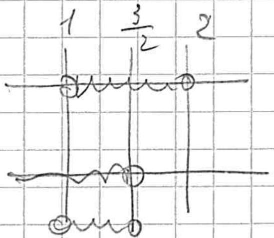
CE come sopra $1 < x < 2$

$x - 1 < 2 - x$

$2x < 3$

$x < \frac{3}{2}$

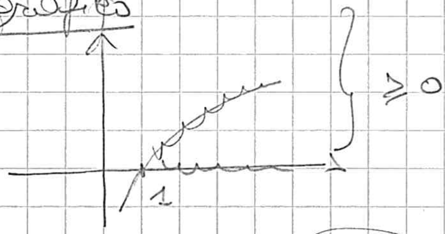
$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}$



$1 < x < \frac{3}{2}$

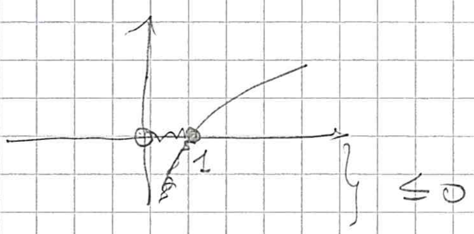
Disequazioni risolte con l'uso del grafico

→ $\log_{\sqrt{2}} x \geq 0$



calcolo quando
$\log_2 x = 0$
$2^0 = x$
$x = 1$
poi uso il grafico

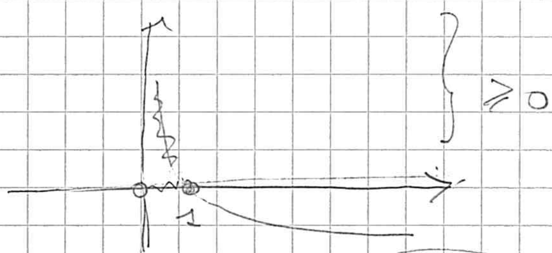
quindi $x \geq 1$



→ $\log_{\sqrt{2}} x \leq 0$

calcolo $\log_{\sqrt{2}} x = 0$
$2^0 = x$
$x = 1$
poi uso il grafico

quindi $0 < x \leq 1$



→ $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 0$

calcolo $\log_{\frac{1}{2}} x = 0$

quindi $0 < x \leq 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = x$
$x = 1$ poi uso il grafico

→ $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 0$

quindi
$x \geq 1$

Disequazioni risolte con i calcoli

→ $\log_2 x \geq 0$ NB $0 = \log_2 2^0$

$\log_2 x \geq \log_2 2^0$

$\log_2 x \geq \log_2 1$ base $a = 2 > 1$ $\Rightarrow$ mantengo il verso

$x > 1$ *

quindi $\begin{cases} x > 1 & * \\ x > 0 & CE \end{cases} \Rightarrow x > 1$

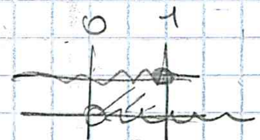
→ $\log_2 x \leq 0$

$\log_2 x \leq \log_2 2^0$

$\log_2 x \leq \log_2 1$ base $a = 2 > 1$ $\Rightarrow$ mantengo il verso

$x \leq 1$ *

quindi $\begin{cases} x \leq 1 & * \\ x > 0 & CE \end{cases} \Rightarrow$



$0 < x \leq 1$

→ $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^0$

$\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$ base $a = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ cambio il verso

$x \leq 1$ *

quindi $\begin{cases} x \leq 1 & * \\ x > 0 & CE \end{cases} \Rightarrow$

$0 < x \leq 1$

→ $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 0$

$\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^0$

$\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} 1$ base $a = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ cambio il verso

$x \geq 1$ *

quindi $\begin{cases} x \geq 1 & * \\ x > 0 & CE \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$