FUNZIONE SINUSOIDALE

p. 221 libro Abate

$$f(x) = A \cdot \cos\left(\omega (x - x_0)\right) + y_0$$

$|A|$ = ampiezza della funzione

y_0 = valor medio (punto di mezzo dell'immagine di f)

ω = frequenza angolare $\left(\omega = \frac{2\pi}{P}\right)$

x_0 = fase della funzione, $x_0 \in [0, P)$

$P = \dfrac{2\pi}{\omega}$ periodo della funzione (da cui)

$F = \dfrac{1}{P}$ frequenza della funzione

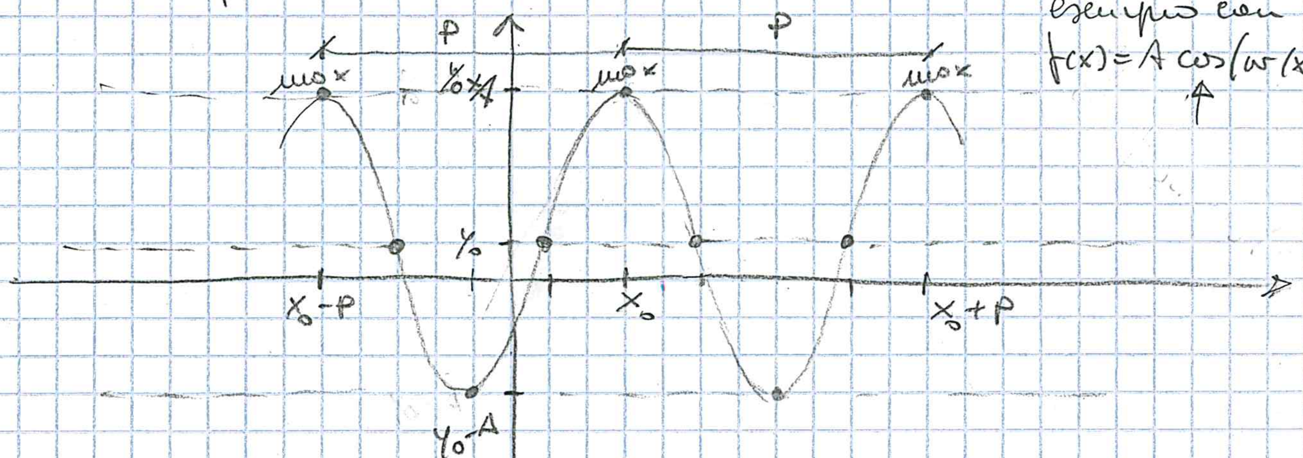
$\text{Im} f = [y_0 - A ; y_0 + A]$ quindi

$y_0 - A$ è il valore di minimo assoluto

$y_0 + A$ è il valore di massimo assoluto

NB Una funzione sinusoidale è completamente determinata da:

- Ampiezza A
- valore medio y_0
- periodo P (oppure frequenza angolare ω)
- fase x_0



esempio con $f(x) = A\cos(\omega(x-x_0)) + y_0$

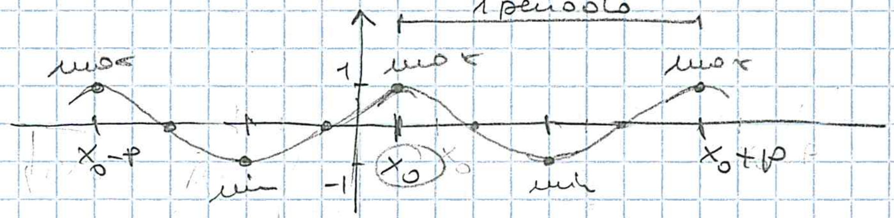
<u>NB</u> se $f(x) = A\cos(\omega(x-x_0)) + y_0 \Rightarrow \underline{x_0 + kP}$ sono punti di max relativo

(se $f(x) = A\,\text{sen}(\omega(x-x_0)) + y_0 \Rightarrow \underline{x_0 + kP}$ NON sono punti max rel.)

①. Usando $f(x) = A\cos(\omega(x-x_0)) + y_0$

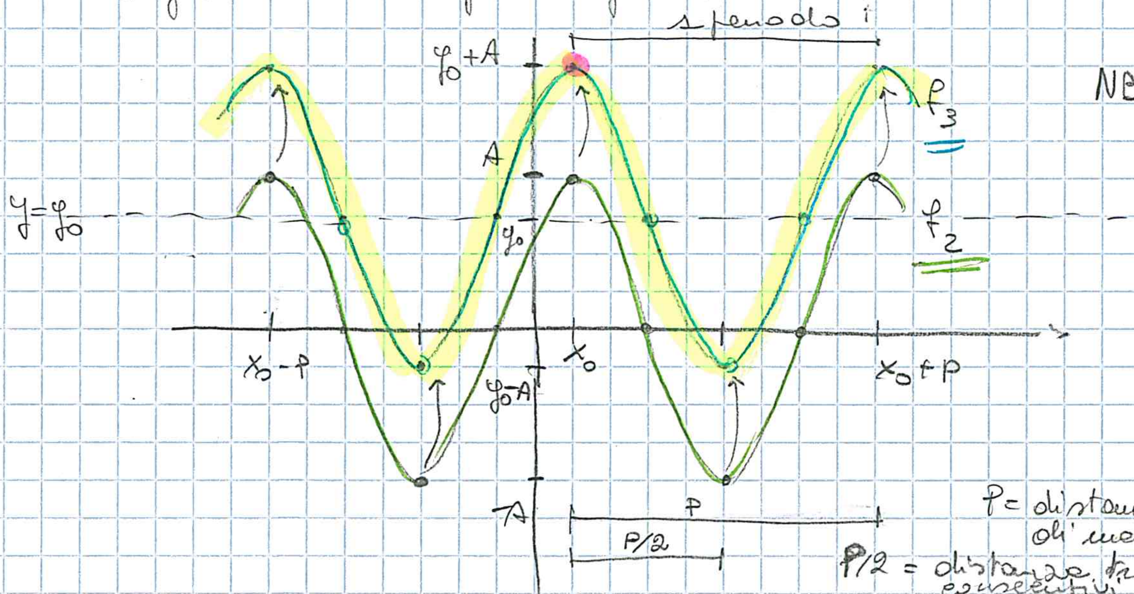
Rappresento $f_1(x) = \cos(\omega(x-x_0))$

- parto da x_0 dove c'è un max (valore 1)
- in x_0+P e in x_0-P ci sono max (in generale in x_0+kP ci sono max)
- a metà tra 2 max c'è un min (valore -1)
- a metà tra un max e un min c'è uno zero



Ora rappresento $f_2(x) = A\cdot f(x) = A\cos(\omega(x-x_0))$

in cui ogni y viene moltiplicata per A (mantenendo le stesse x)
in particolare
- i max diventano A
- i min diventano $-A$
- gli zeri rimangono gli stessi



NB $(x_0; M)$

P = distanza tra 2 punti di massimo consecutivi

P/2 = distanza tra 1 max e 1 min consecutivi

Ora rappresento $f_3(x) = f_2(x) + y_0 = A\cos(\omega(x-x_0)) + y_0$

in cui traslo il grafico rispetto le y del valore y_0

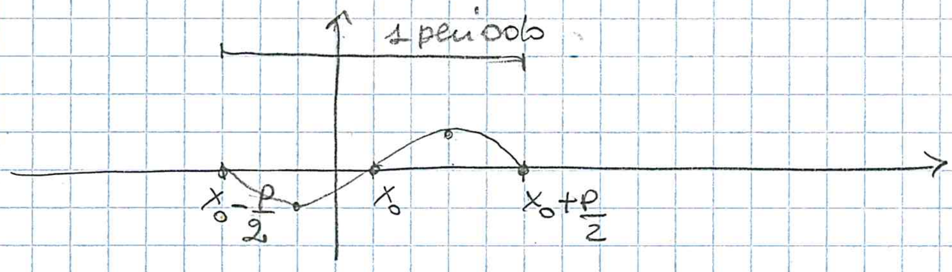
Riassumendo

- in x_0 c'è un punto di max (anche in x_0+P ; x_0-P)
- l'ampiezza A è la metà della distanza tra il max M e il min m cioè $A = \frac{|M-m|}{2}$
- y_0 è il valore medio tra il valore massimo M e il valore minimo m cioè $y_0 = \frac{M+m}{2}$

② • usando $f(x) = A \operatorname{sen}(\omega(x-x_0)) + y_0$

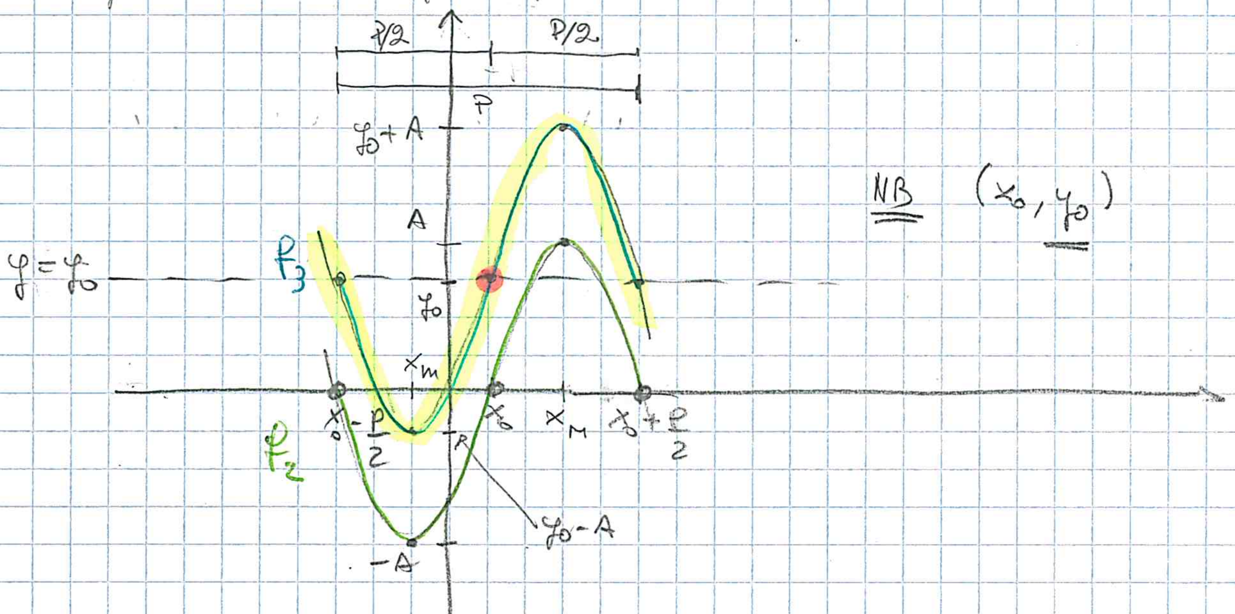
Rappresento $f_1(x) = \operatorname{sen}(\omega(x-x_0))$

- in x_0 c'è uno zero della funzione
- $x_0+\frac{P}{2}$ e $x_0-\frac{P}{2}$ sono degli zeri (in generale $x_0+k\frac{P}{2}$ sono zeri)
- a metà di $[x_0; x_0+\frac{P}{2}]$ c'è un max (valore 1) con $A>0$
- a metà di $[x_0-\frac{P}{2}; x_0]$ c'è un min (valore -1) con $A>0$



Ora rappresento $f_2(x) = A\cdot f_1(x) = A \operatorname{sen}(\omega(x-x_0))$

in cui ogni y viene moltiplicata per A (mantenendo le stesse x)
in particolare
- i max diventano A
- i min diventano -A
- gli zeri rimangono gli stessi



NB (x_0, y_0)

Ora rappresento $f_3(x) = f_2(x)+y_0 = A \operatorname{sen}(\omega(x-x_0))$

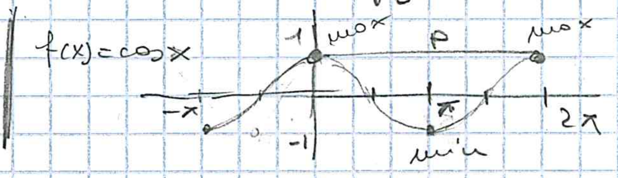
Riassumendo

- x_0 è il punto medio tra un punto di max e uno di min consecutivi quindi $x_0 = \frac{x_M+x_m}{2}$
- l'ampiezza $A = \frac{|M-m|}{2}$
- $y_0 = \frac{M+m}{2}$

(valgono anche queste relazioni:
$x_m = x_M - \frac{P}{2}$; $x_M = x_m + \frac{P}{2}$
$x_0 = x_M - \frac{P}{4}$; $x_0 = x_m + \frac{P}{4}$)

ES Disegnare un periodo completo del grafico di una funzione sinusoidale di media -2 fase 5 ampiezza 3 e frequenza $\frac{\pi}{4}$

Soluzione ① Uso $f(x) = A\cos(\omega(x-x_0)) + y_0$ con



$y_0 = -2$

$x_0 = 5$

$A = 3$

$\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow P = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow P = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 2\cancel{\pi} \cdot \frac{4}{\cancel{\pi}} = 8$

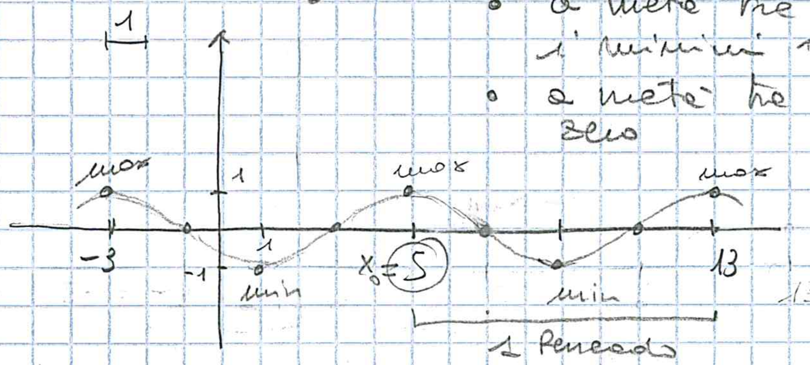
Quindi $f(x) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-5)\right) - 2$

Rappresento

$f_1(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(x-5)\right)$

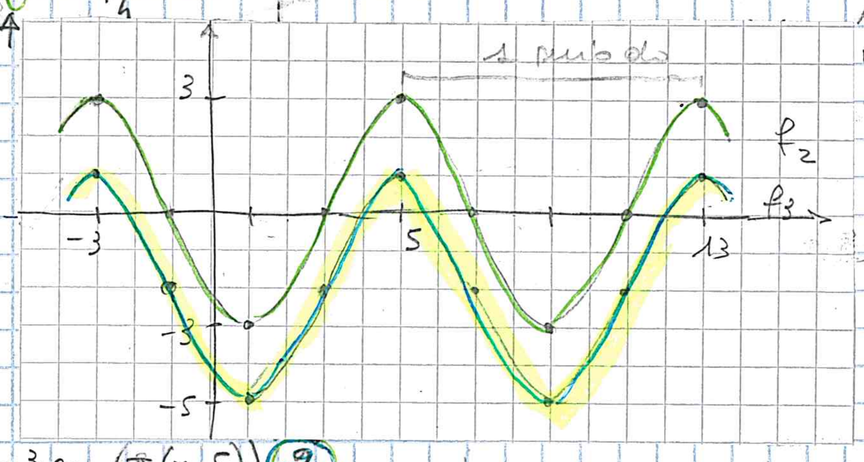
$x_0 = +5$

NB
- in x_0 c'è un max di valore 1
- in x_0+P e in x_0-P ci sono max rel. (in generale in x_0+kP ci sono dei max rel.)
- a metà tra 2 max rel. ci sono i minimi relativi di valore -1
- a metà tra 1 max e 1 min c'è uno zero



$f_2(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}(x-5)\right)$

- moltiplico i max e i min per 3 mantenendo le stesse x e così ottengo f_2



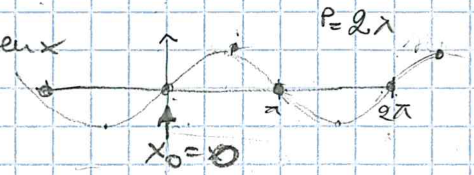
$f_3(x) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}(x-5)\right) - 2$

- ora traslo le y verso il basso di 2 unità per ottenere f_3

Un Periodo va, per esempio dal max al max successivo oppure da un minimo al minimo successivo

Soluzione (2)   Uso $f(x) = A \operatorname{sen}(\omega(x - x_0)) + y_0$

$f(x) = \operatorname{sen} x$



$y_0 = -2$

$x_0 = 5$

$A = 3$

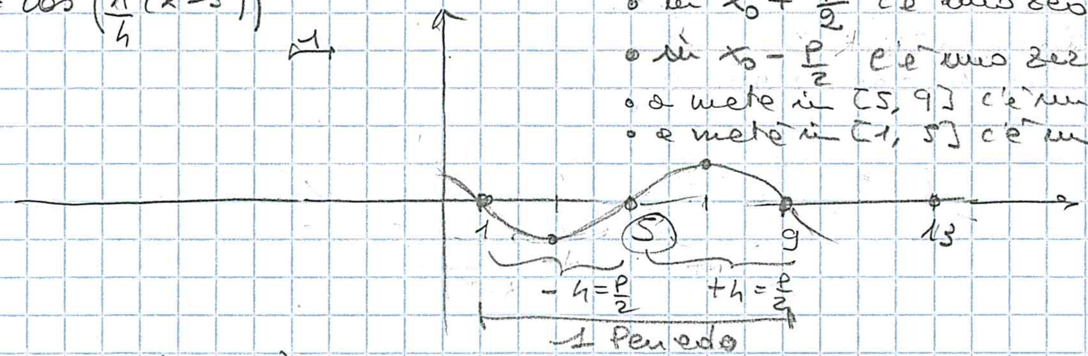
$\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow P = 8$

quindi $f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}(x-5)\right) - 2$

Rappresento

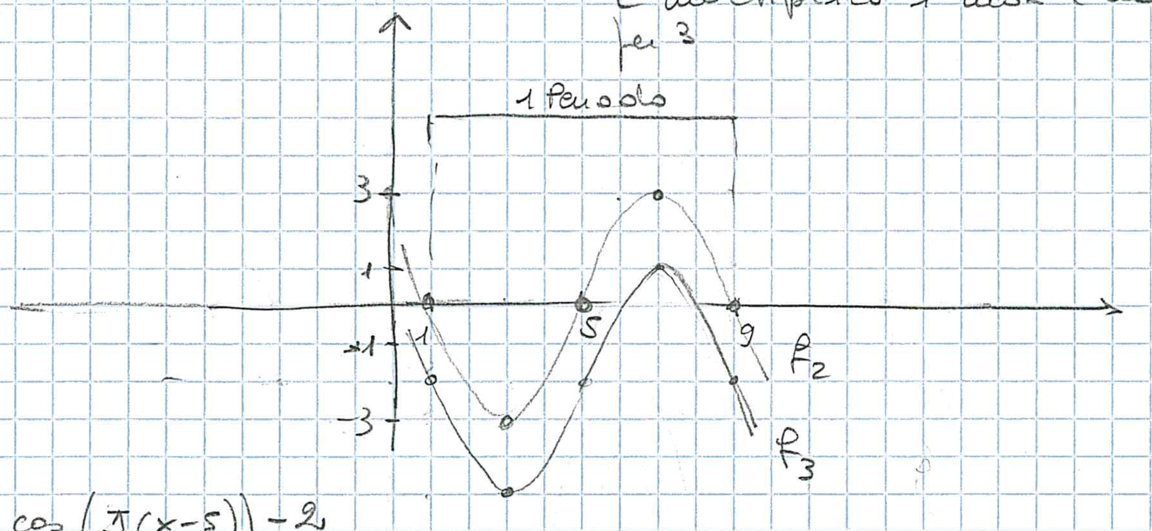
$f_1(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(x-5)\right)$

NB
- in x_0 c'è uno zero della funzione
- in $x_0 + \frac{P}{2}$ c'è uno zero
- in $x_0 - \frac{P}{2}$ c'è uno zero
- a metà in $[5, 9]$ c'è un max
- a metà in $[1, 5]$ c'è un min



$f_2(x) = \underset{\uparrow}{3} \cos\left(\frac{\pi}{4}(x-5)\right)$

- lascio inalterati gli zeri e moltiplico i max e min per 3



$f_3(x) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}(x-5)\right) \underset{\uparrow}{\underline{-2}}$

- traslo le y verso il basso di 2 unità (l'effetto è che gli zeri iniziali ora sono in corrispondenza di $y = -2$)

ES | Disegnare un periodo completo del grafico di una funzione sinusoidale di media 3, di fase -2, di ampiezza 4 e periodo 3π

Soluzione ① uso $f(x) = A\cos(\omega(x-x_0)) + y_0$

$y_0 = 3$

$x_0 = -2$

$A = 4$

$P = 3\pi^{\sim 9} \Rightarrow P = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}} = \frac{2}{3}$

$f(x) = 4\cos\left(\frac{2}{3}(x - \underbrace{(-2)}_{x_0})\right) + 3$

$f(x) = 4\cos\left(\frac{2}{3}(x+2)\right) + 3$ NB $\cancel{x_0 = 2}$ $x_0 = -2$

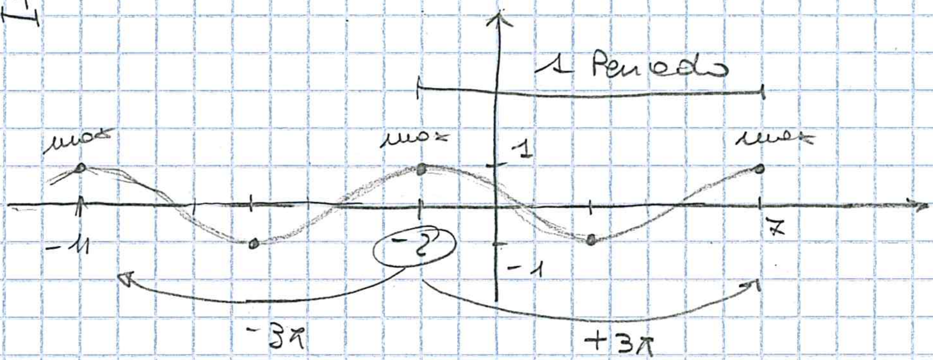
Rappresento

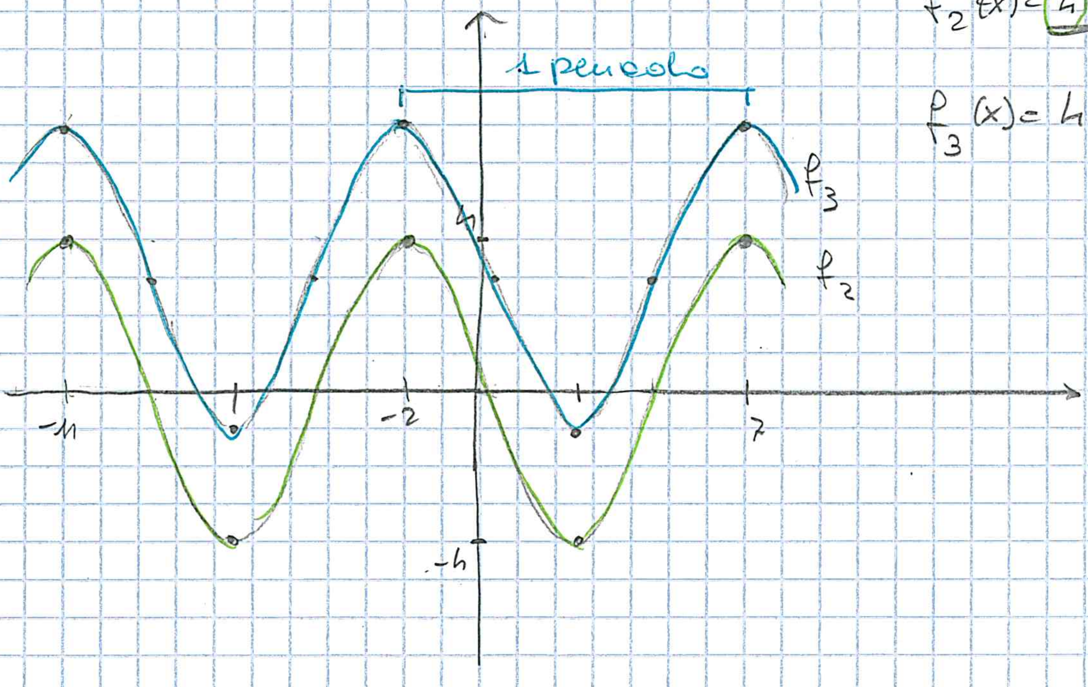
$f(x) = \cos\left(\frac{2}{3}(x+2)\right) + 3$

$\downarrow$

$x_0 = -2$

f_1





$f_2(x) = 4\cos\left(\frac{2}{3}(x+2)\right)$

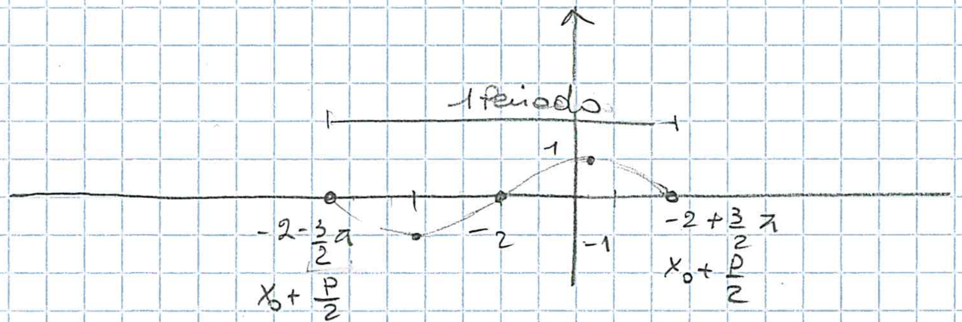
$f_3(x) = 4\cos\left(\frac{2}{3}(x+2)\right) \underline{+3}$

Soluzione ② Usando $f(x) = A \operatorname{sen}(\omega(x - x_0)) + y_0$

$$f(x) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}(x+2)\right) + 3$$

Rappresento

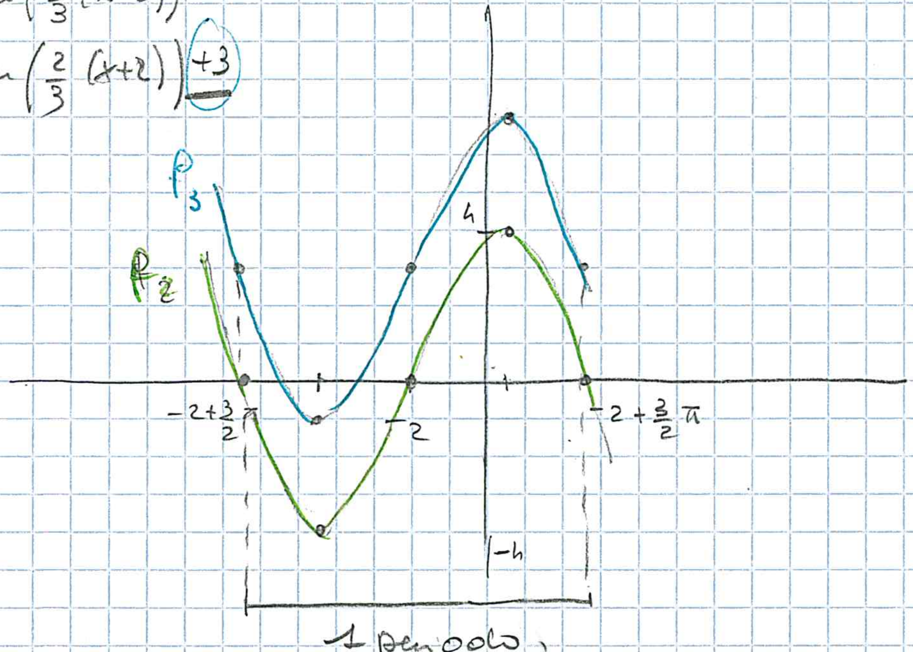
$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}(x+2)\right) + 3$ NB $x_0 = -2$ $P = 3\pi \sim 9$



Ora rappresento

$f_2(x) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}(x+2)\right)$

$f_3(x) = 4 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}(x+2)\right) \underline{+3}$



BS3

Disegnare un periodo completo del grafico di una funzione sinusoidale di media -2 fase 5 ampiezza 3 e periodo $\frac{\pi}{4}$

<u>Soluzione ①</u> $\quad f(x) = A\cos(\omega(x-x_0)) + y_0$

$y_0 = -2$

$x_0 = 5 \Rightarrow$ poi c'è un max e quindi in $x_0 + kP$ ci sono i max

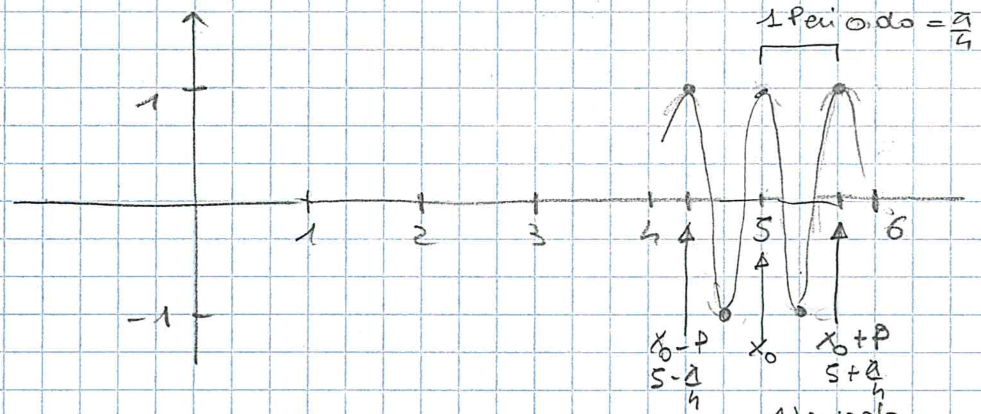
$A = 3$

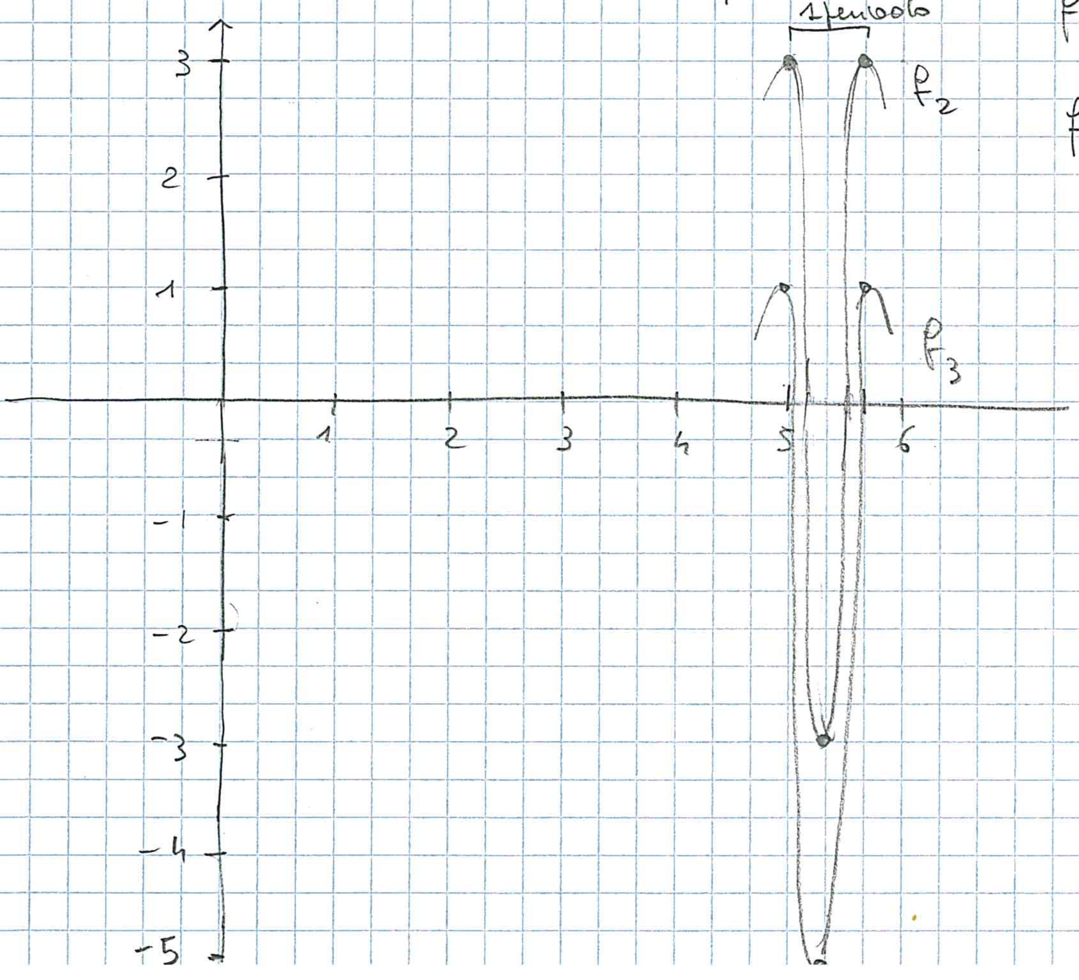
$P = \frac{\pi}{4} \sim 0{,}8 \Rightarrow P = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 2\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 8$

$f(x) = 3\cos(8(x-5)) - 2$

Rappresento

$f_1(x) = \cos(8(x-5))$





$f_2(x) = \underset{A}{3}\cos(8(x-5))$

$f_3(x) = 3\cos(8(x-5)) \underset{\uparrow}{-2}$

Determinare il periodo, la fase, la media e l'ampiezza delle seguenti funzioni: $f(x) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ e disegnarne il profilo in un periodo completo

Soluzione

$$f(x) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \qquad f(x) = A\cos(\omega(x - x_0)) + y_0$$

$$= 2\cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{3\cdot 4}\right)\right)$$

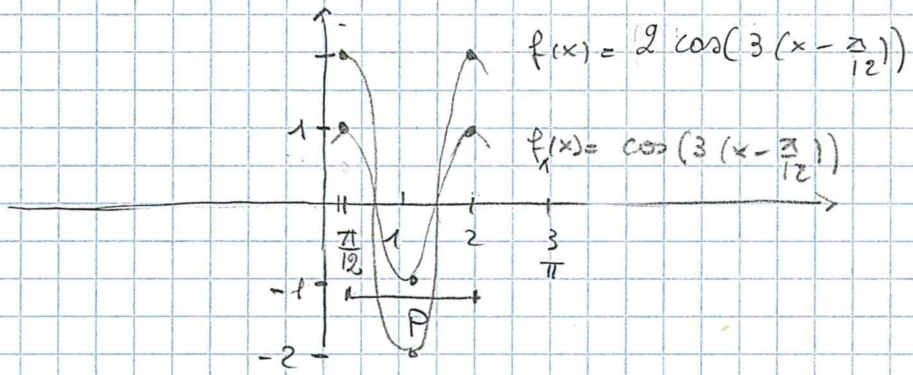
$$= 2\cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\right) \quad \text{quindi}$$

Ampiezza $A = 2$ Ampiezza

media $y_0 = 0$

fase $x_0 = \frac{\pi}{12}$

frequenza $\omega = 3 \Rightarrow$ periodo $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3} \approx 2$



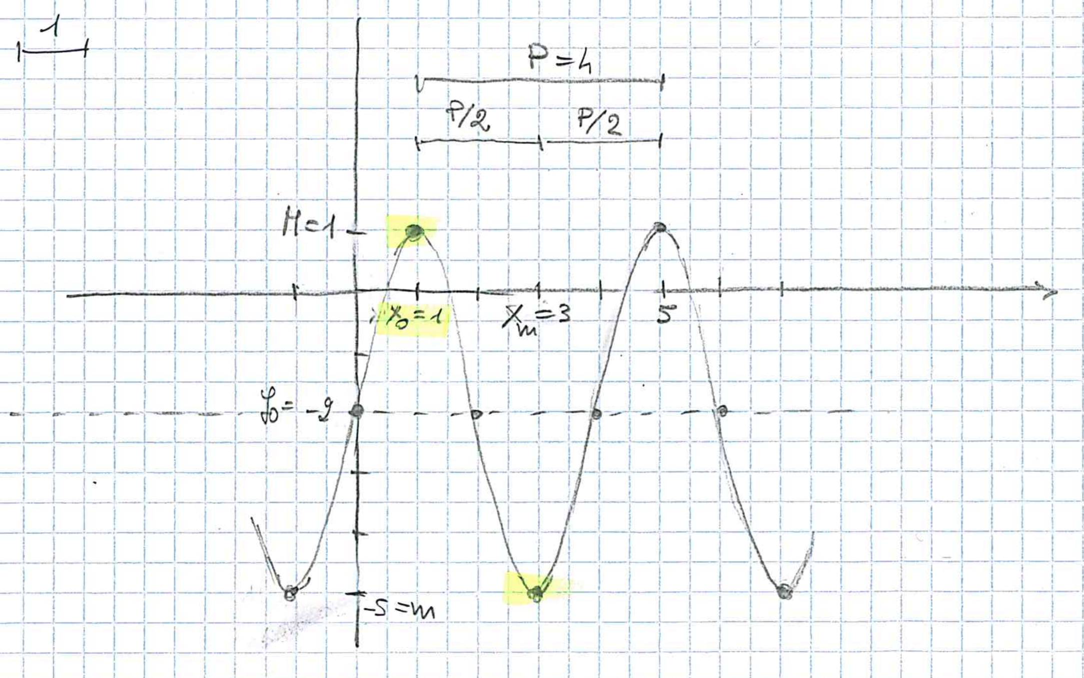
E5 Scrivi l'espressione esplicita di funzione periodica, continua e con un massimo nel punto (1, 1) e un minimo nel punto (3, −5)
[p. E40 pb 5.5 libro Abate]

Soluzione ① Usando una funzione
$f(x) = A\cos(\omega(x-x_0)) + y_0$ con $\omega = \frac{2\pi}{P}$

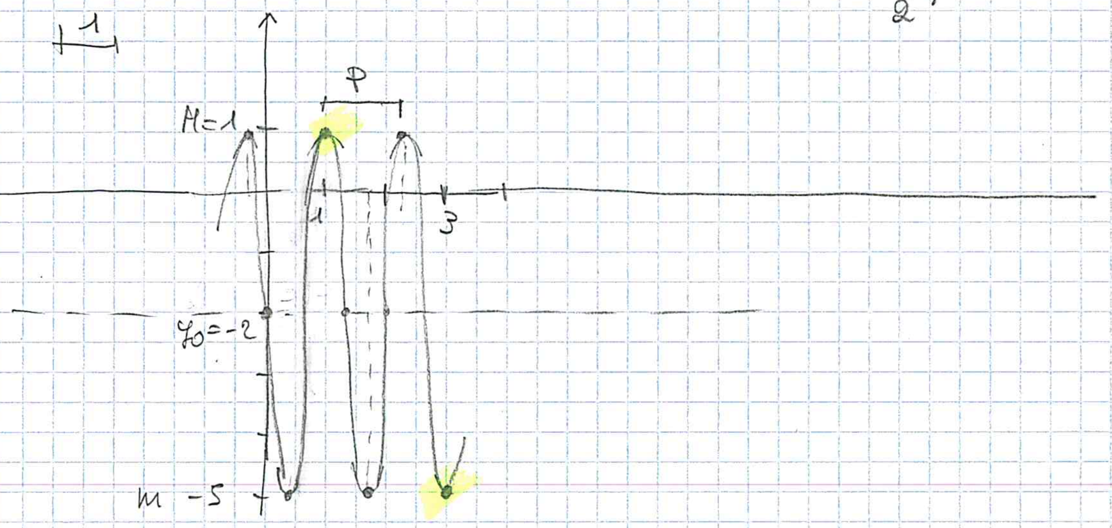
Devo far valere le condizioni:
(1, 1) punto di massimo $\Rightarrow x_M = 1 \quad M = 1$
(3, −5) punto di minimo $\Rightarrow x_m = 3 \quad m = -5$

Quindi
- nel caso del coseno x_0 è un punto di massimo $\Rightarrow x_0 = x_M = 1$
- la distanza tra un punto di max e uno di min consecutivi è $\frac{P}{2}$
$\Rightarrow |x_M - x_m| = |1-3| = 2 = \frac{P}{2} \Rightarrow P = 4$ periodo
$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
- l'ampiezza A è la metà della distanza tra il valore di massimo M e il valore di minimo m $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{|M-m|}{2} = \frac{|1-(-5)|}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow A = 3$
- y_0 è il punto medio tra il valore di massimo M e il valore di minimo m $\Rightarrow \frac{M+m}{2} = \frac{1+(-5)}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow y_0 = -2$

Quindi
$f(x) = A\cos(\omega(x-x_0)) + y_0$ diventa $f(x) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) - 2$
$\Downarrow$
$x_0 = 1$



NB anche $f(x) = 3\cos\left(\frac{3\pi}{2}(x-1)\right) - 2$ soddisfa le stesse condizioni del testo ma il punto di max $(1,1)$ e il punto di min $(3;-5)$ <u>non</u> sono consecutivi
e il periodo P vale $\frac{4}{3}$ (cioè $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi} = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$)



<u>Soluzione 2</u> Usando $f(x) = A\,\text{sen}(\omega(x-x_0)) + y_0$

- La distanza tra un punto di minimo e uno di massimo consecutivi è $\frac{P}{2}$

$\Rightarrow |x_M - x_m| = |1-3| = 2 \Rightarrow \frac{P}{2} = 2 \Rightarrow P = 4$ (come prima ok)

$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{4}_2} = \frac{\pi}{2}$

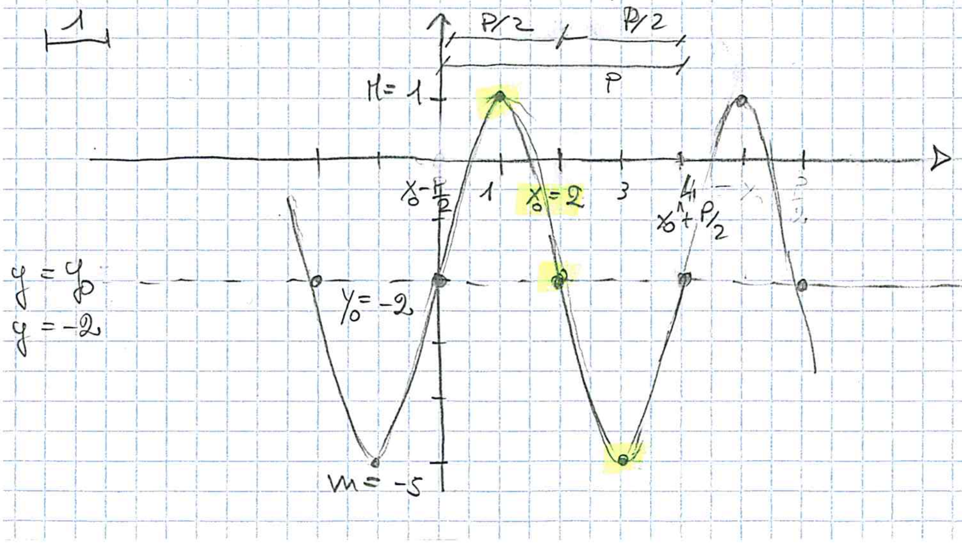
- x_0 è a metà tra un punto di minimo e un punto di max consecutivi

$\Rightarrow \frac{x_M + x_m}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow x_0 = 2$

- l'ampiezza A è la metà della distanza tra il valore di massimo M e il valore di minimo m $\Rightarrow \frac{|M-m|}{2} = \frac{|1-(-5)|}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (come prima ok)

- y_0 è a metà tra il valore di massimo (M) e il valore di minimo (m) $\Rightarrow \frac{M+m}{2} = \frac{1+(-5)}{2} = -2$ (come prima ok)

Quindi $f(x) = A\,\text{sen}(\omega(x-x_0)) + y_0$
diventa $f(x) = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right) - 2$ ($\Rightarrow x_0 = 2$)



<u>NB</u> ciò che cambia tra la soluzione 1 e la soluzione 2 è il <u>valore</u> di x_0 e il suo <u>ruolo</u>
(il grafico finale <u>non</u> cambia)

15 Determinare le costanti A, B, C, D in modo che il grafico della funzione $y = A + B\,\text{sen}(Cx + D)$ abbia periodo pari a $\frac{\pi}{3}$, un massimo di valore 2 nel punto $x_0 = \pi$ e un minimo di valore -4

[es. della simulazione d'esame 2014/2015 prof. Morigi]

Soluzione Dai dati del problema deduco queste informazioni:

- $P = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 2\cancel{\pi} \cdot \frac{3}{\cancel{\pi}} = 6$
- $M = 2$ con $x_M = \pi$
- $m = -4$ (x_m = ignoto)
- $f(x) = a\,\text{sen}(\omega(x - x_0)) + y_0$ (ho assegnato all'ampiezza il simbolo "a" per non confonderlo con "A" citato nel testo)

- Quando la funzione $f(x)$ si basa sul seno si ha che x_0 è il valore medio tra un punto di max e uno di min consecutivi con $x_m = x_M - \frac{P}{2} = \pi - \frac{\cancel{6}^3}{\cancel{2}} = \pi - 3$

$\Rightarrow x_0 = \frac{x_M + x_m}{2} = \frac{\pi + \pi - 3}{2} = \frac{2\pi - 3}{2} = \pi - \frac{3}{2}$

- L'ampiezza "a" è la metà della distanza tra il valore di max M e il valore di minimo m $\Rightarrow a = \frac{|M - m|}{2} = \frac{|2 - (-4)|}{2} = \frac{6}{2} = 3$

- y_0 è il valor medio tra il valore massimo M e il valore minimo m

$\Rightarrow y_0 = \frac{M + m}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

Quindi $f(x) = a\,\text{sen}(\omega(x - x_0)) + y_0$ diventa

$f(x) = 3\,\text{sen}\left(6\left(x - \left(\pi - \frac{3}{2}\right)\right)\right) - 1$

da cui $f(x) = 3\,\text{sen}\left(6x - 6\left(\pi - \frac{3}{2}\right)\right) - 1$

e per ricondurla in $f(x) = A + B\,\text{sen}(Cx + D)$

significa che $A = -1$; $B = 3$; $C = 6$; $D = -6\left(\pi - \frac{3}{2}\right)$