MATRICE INVERSA

DEF: Data una matrice A si dice che B è la sua matrice inversa se e solo se $A \cdot B = B \cdot A = I$ e si indica con A^{-1}

Quindi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ e A deve essere una matrice quadrata $m \times m$

Calcolare l'inversa usando il metodo di Gauss-Jordan
- non si possono spostare le righe
- quando si ottiene la matrice triangolare se gli elementi sulla diagonale sono tutti $\neq 0$ allora è invertibile e continuiamo il procedimento.

[NB Una matrice quadrata A $m \times m$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$]

ES Data $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ calcolare, se possibile, la sua inversa A^{-1}

Soluzione

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

gli elementi sulla diagonale sono tutti $\neq 0$ allora la matrice è invertibile.

Trasformo gli elementi sulla diagonale in 1

$$\sim_{-R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim R_1 - 2R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Quindi $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

ES ~~R~~ ~~F~~

Data $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -5\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$, calcolare, se possibile, la sua inversa

Soluzione (*) NB prima calcolo det A poi deduco che l'inversa non c'è

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim R_3-R_1 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \sim$$

$$\sim R_2+2R_1 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \sim R_3+R_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

elemento sulla diagonale $\neq 0$ allora la matrice **non è invertibile**

(*) NB

$$\det A = \det\left[\begin{array}{ccc}1 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -5\\ 1 & -1 & 3\end{array}\right]\begin{array}{cc}1 & -2\\ -2 & 3\\ 1 & -1\end{array} = 9+10+4-6-5-12 = 0$$

$\Downarrow$ quindi matrice non invertibile

ES X

Data $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$ calcolare, se possibile, la sua inversa

~~F~~ (*) Soluzione NB prima calcolo det A poi A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim R_3-R_1 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \sim$$

la matrice è invertibile perché ho elementi non nulli sulla diagonale

$$\sim R_1-3R_3 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 4 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \sim R_2-R_3 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 4 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\sim R_1-R_2 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 3 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \frac{R_1}{2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Quindi la matrice inversa è

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(*) NB

$$\det A = \det\left[\begin{array}{ccc}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{array}\right]\begin{array}{cc}2 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & 1\end{array}$$

$$= \cancel{8}+\cancel{2}+0-6-2-\cancel{4} = -2 \neq 0$$

quindi la matrice è invertibile

E5 Calcolare, se possibile, l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

[esercizio simulazione d'esame prof. Morigi]

Soluzione NB prima calcolo det A poi A^{-1}

(*)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \\ R_2+2R_1 \to \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ R_3-3R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} R_1+\frac{1}{4}R_3 \to \\ R_2+\frac{1}{2}R_3 \to \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

gli elementi sulla diagonale sono $\neq 0$ $\Rightarrow$ la matrice è invertibile

(*) NB $\det A = \det \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right.\left.\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}\right] = \cancel{2}+0-\cancel{6}+0-3+\cancel{4} = -3 \neq 0$

quindi la matrice A è invertibile

Riassumendo il calcolo della matrice inversa A^{-1}

Data una matrice A (quadrata $n \times n$)
calcolare $\det A$ se $\det A \neq 0$ allora la matrice A è invertibile
e si procede con il metodo di Gauss-Jordan
per il calcolo della matrice inversa A^{-1}

Se $\det A = 0 \Rightarrow$ la matrice A non è invertibile e non esiste A^{-1}

L'utilità di A^{-1} (quando esiste) è per la risoluzione
del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ con A matrice quadrata $n \times n$
cioè
Dato un sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ con A matrice quadrata $n \times n$
se $\det A \neq 0$ allora
il sistema ammette soluzione (unica)
che si può ottenere con il calcolo di $A^{-1} \cdot b$
cioè la soluzione $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

Esempio

Dato $A\underline{x} = \underline{b}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ e $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
risolvere il sistema

Soluzione

$\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow$ esiste A^{-1}
calcolo A^{-1} e ottengo $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

ora la soluzione è

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \text{ vale } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

quindi $x_1 = 10$
$x_2 = -1$
$x_3 = -2$

Es | Data $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ calcolare, se possibile, la sua matrice inversa e poi risolvere il sistema $A\underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soluzione

(*) NB prima calcolo $\det A$ poi A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ R_2 - R_1 \to \\ R_3 - 2R_1 \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ R_3 - R_2 \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} R_1 - 3R_3 \to \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

gli elementi sulla diagonale sono tutti $\neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile

$$\begin{array}{c} R_1 - 3R_2 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi la matrice inversa è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(*) NB $\det A = \det \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 2 & 7 \end{array}\right] = \cancel{28} + 18 + \cancel{21} - \cancel{24} - 21 - \cancel{21} = 1 \neq 0$

quindi la matrice A è invertibile

Ora posso risolvere il sistema $A\underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

poiché la soluzione sarà $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$

3×3 3×1 3×1

quindi

$x_1 = 31$

$x_2 = -1$

$x_3 = -8$

15

Date le matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ e la matrice $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Verificare se B è inversa di A

Soluzione

Calcolo $A \cdot B$ e poi $B \cdot A$ se in entrambi i casi ottengo I allora significa che B è inversa di A (e che A è l'inversa di B)

Vale $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e

Vale $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B è inversa di A

FR.

1 Esercizi di calcolo di Determinanti ~~e autovalori~~ e delle matrice inverse

Dopo aver verificato che le seguenti matrici sono invertibili calcolare l'inversa con l'algoritmo di Gauss.

Verificare che la matrice trovata sia effettivamente l'inversa e che il determinante dell'inversa sia il reciproco del determinante della matrice data.

1.
$$A=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix})$$

2.
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix})$$

3.
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \qquad (A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix})$$

4.
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix})$$

5.
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

6.
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad (A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & -7 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix})$$