Teorema di Weierstrass

Data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,

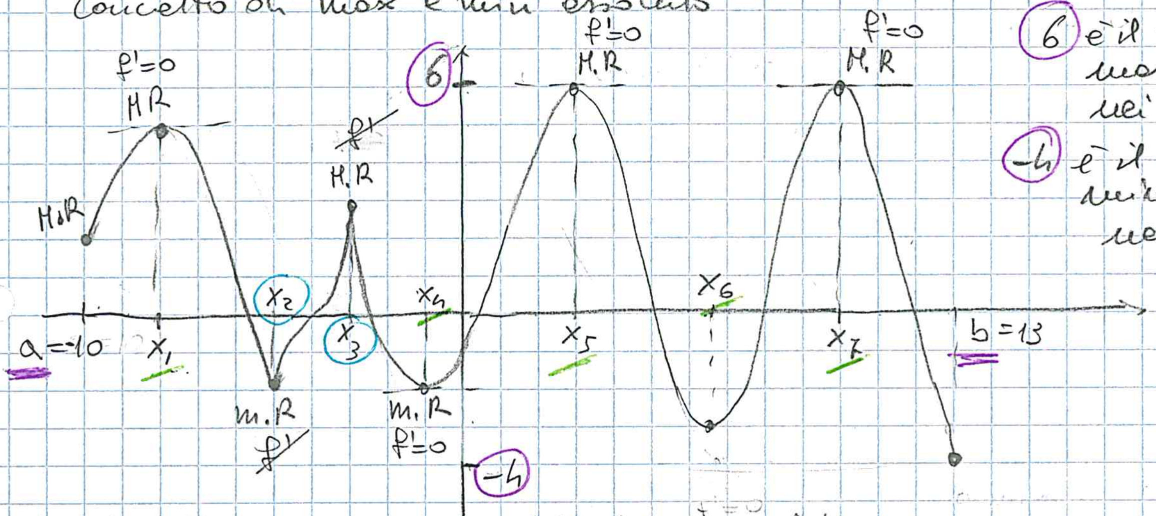
definita nell'intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ e

continua in $[a,b]$

allora f ha (ed è unico) il valore di massimo assoluto

e ha (ed è unico) il valore di minimo assoluto

Concetto di max e min assoluto



6 è il valore di massimo assoluto nei punti x_5 e x_7

-4 è il valore di minimo assoluto nel punto b

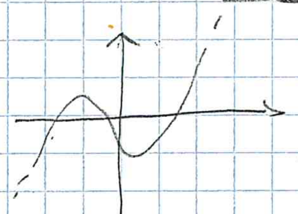
a, x_1, x_3, x_5, x_7 sono punti di max relativo

b, x_2, x_4, x_6 sono punti minimo relativo

- x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 sono punti a derivata nulla ($f'(x)=0$, con tangente orizzontale)
- x_2, x_3 sono punti non derivabili (non esiste f' in questi punti)
- gli estremi a, b vanno valutati direttamente

NB il valore di max/min assoluto è unico.
e va cercato tra i punti a derivata nulla, tra i punti non derivabili e tra gli estremi.

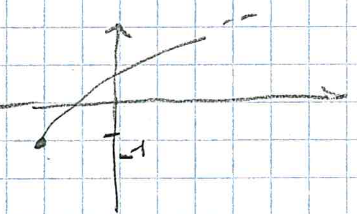
NB se la funzione non è definita in $[a,b]$
può avere il min/max assoluto oppure può non averlo
cioè non è garantita l'esistenza del min/max assoluto



$D_f = \mathbb{R}$

min ~~assoluto~~

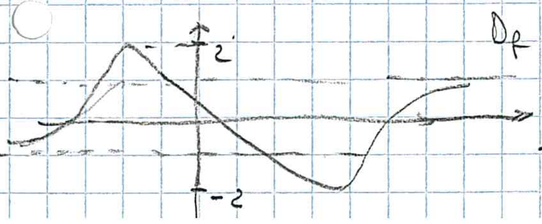
max ~~assoluto~~



$D_f: [-2, +\infty)$

-1 è il min assoluto

max ~~assoluto~~



$D_f = \mathbb{R}$

2 è il max assoluto

-2 è il min assoluto

Ricerca del minimo e del massimo assoluto in $[a,b]$

- calcolare il dominio D e controllare che sia $[a,b] \subseteq D$
- calcolare la derivata $f'(x)$
- calcolare i punti $x_1, x_2 \dots$ "a derivata nulla" cioè $f'(x)=0$
- calcolare i punti $x_3, x_4 \dots$ "non derivabili"

  cioè calcolare il dominio D' di $f'(x)$ e confrontarlo con D, si possono avere queste situazioni

  1) se $D' = D \Rightarrow$ non ci sono punti non derivabili
  2) se $D' \neq D$ $(D' \subseteq D) \Rightarrow$ ci sono punti non derivabili e sono i punti $\notin D'$ e che $\in D$

- Creare una tabella riassuntiva

	x_0	$f(x_0)$
punti a derivata nulla	x_1	$f(x_1) = \dots$
	x_2	$f(x_2) = \dots$
punti non derivabili	x_3	$f(x_3) = \dots$
	x_4	$f(x_4) = \dots$
estremi dell'intervallo	a	$f(a) = \dots$
	b	$f(b) = \dots$

tra questi valori si riconoscono i valori di max e min assoluti

NB in questa tabella si inseriscono i punti x_1 x_2 x_3 x_4 solo se stanno nell'intervallo $[a,b]$

Esercizio [Esame 2012]

Si determinino il valore di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x) = x^3 - 3x - 1$ nell'intervallo $[0;2]$ ($a = 0$, $b = 2$)

Soluzione

- Dominio $D: \mathbb{R}$
- $[0,2] \subseteq D$
- Calcolo $f'(x) = 3x^2 - 3$
- Cerco i punti a derivata nulla cioè calcolo $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow x_0 = -1 \notin [0,2]$$ punto che non metto in tabella

$$\boxed{x_0 = 1} \in [0,2]$$ punto che metto in tabella

- Cerco i punti "non derivabili" cioè calcolo D' e lo confronto con D:

$D' = \mathbb{R} \Rightarrow D' = D \Rightarrow$ non ci sono punti "non derivabili"

- tabella riassuntiva

	x_0	$f(x_0)$	
punti a derivata nulla	$x_0 = 1$	$f(1) = (1)^3 - 3(1) - 1 = \cancel{1} - 3 - \cancel{1} = -3$	$\Rightarrow \boxed{-3}$ è il valore di minimo assoluto nel punto $x_0 = 1$
punti non derivabili	/		
estremi dell'intervallo iniziale	$a = 0$	$f(0) = (0)^3 - 3(0) - 1 = -1$	
	$b = 2$	$f(2) = (2)^3 - 3(2) - 1 = 8 - 6 - 1 = 1$	$\Rightarrow \boxed{1}$ è il valore di massimo assoluto nel punto $x_0 = 2$

Varianti dell'esercizio $\longrightarrow$

Variante 1

Risolvo lo stesso esercizio nell'intervallo $\underset{a}{[-3};\ \underset{b}{2]}$;

sfruttando i calcoli già fatti

compilo la tabella riassuntiva :

NB.
I punti non derivabili
$x_0 = -1 \in [$
$x_0 = 1 \in$

	x_0	
punti a derivata nulla	$x_0 = -1$	$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 1 = -1 + 3 - 1 = 1$
	$x_0 = 1$	$f(1) = -3$
punti non derivabili	/	
estremi	$a = -3$	$f(-2) = (-3)^3 - 3(-3) - 1 = -27 + 9 - 3 = -21 \Rightarrow$
	$b = 2$	$f(2) = 1$

$\Rightarrow \boxed{-21}$ è il valore di min assoluto nel punto $x_0 = -3$

$\boxed{1}$ è il valore di max assoluto nei punti $x_0 = -1$ e $x_0 = -3$

Trovare il max e il min assoluto della funzione
$f(x) = -\sqrt{x} + 2$ in $[0; 4]$

Soluzione

$f(x) = -\sqrt{x} + 2$ $\qquad D_f: x \geq 0 \qquad D: [0, +\infty)$

$[0,4] \subseteq D$ ok

- $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

- Cerco i punti a derivata nulla

  $f'(x) = 0 \qquad -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow -1 = 0$ impossibile $\Rightarrow$ non ci sono punti a derivata nulla

- Cerco i punti non derivabili

  $D' = x > 0 \Rightarrow D': (0, +\infty) \neq D \Rightarrow \boxed{x_0 = 0}$ è un punto non derivabile

  $0 \notin D'$ $\qquad \hookrightarrow \in [0, 4]$ ok

- Tabella

	x_0	$f(x_0)$
punti a derivata nulla	/	
punti non derivabili	$x_0 = 0$	$f(0) = -\sqrt{0} + 2 = 2$
estremi	$a = 0$	
	$b = 4$	$f(4) = -\sqrt{4} + 2 = 0$

Quindi 0 è il valore di min assoluto in $x_0 = 4$

e 2 " " max " in $x_0 = 0$

NB L'esercizio si poteva essere risolto anche graficamente

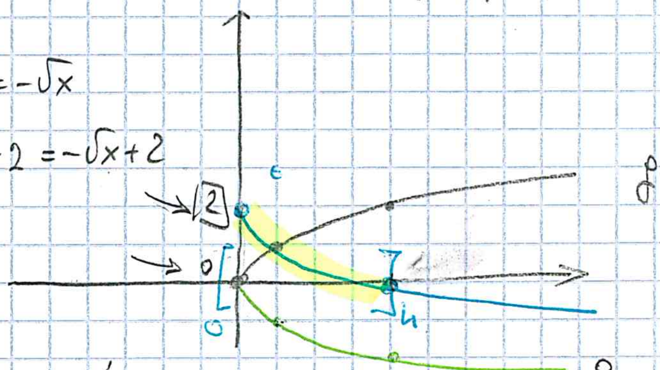
$f(x) = -\sqrt{x} + 2$

$g(x) = \sqrt{x}$

$g_1(x) = -g(x) = -\sqrt{x}$

$g_2(x) = g_1(x) + 2 = -\sqrt{x} + 2$

Nell'intervallo $[0, 4]$, deduco dal grafico il valore di max e min assoluto



$\Downarrow$

0 è il valore min assoluto in $x_0 = 4$

2 è il valore max " in $x_0 = 0$

Trovare il max e il min assoluto di $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 3$ in $[-1, 0]$

Soluzione

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 3 = x^{\frac{2}{3}} - 3$ $\quad D_f: \mathbb{R}$ $\quad [-1, 0] \in D$ ok

- $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3} - 1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

- Cerco i punti a derivata nulla

$f'(x) = 0 \quad \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 2 = 0$ imp $\Rightarrow$ non esistono punti a derivata nulla

- Cerco i punti non derivabili

$D' = x \neq 0 \Rightarrow D' \neq D \Rightarrow \boxed{x_0 = 0}$ punto non derivabile

$0 \notin D$ $\quad \hookrightarrow \in [-1, 0]$

- tabella

	x_0	$f(x_0)$
punti a derivata nulle	/	
punti non derivabili	$x_0 = 0$	$f(0) = \sqrt[3]{0^2} - 3 = -3$
estremi	$a = -1$	$f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} - 3 = 1 - 3 = -2$
	$b = 0$	

Quindi:
-3 è il valore di min assoluto nel punto $x_0 = 0$

-2 è il valore di max assoluto nel punto $x_0 = -1$

L'esercizio si presta anche ad essere risolto graficamente

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 3$

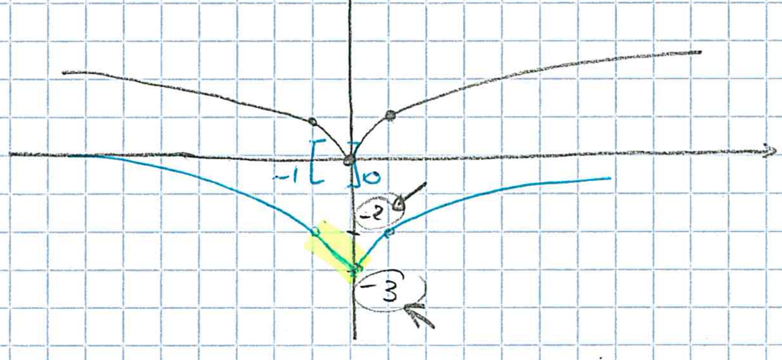
$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} < 1$ cresce lentamente $\quad D_f = \mathbb{R}$ $\quad$ PARI

$f_1(x) = f(x) - 3 = \sqrt[3]{x^2} - 3$

quindi

-3 è min assoluto

-2 è max assoluto



Esercizio [Esame 2011]

Si calcolino i massimi e minimi assoluti della funzione

$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ nell'intervallo $[\underset{a}{0}, \underset{b}{3}]$

X

Soluzione

Dominio D: $x^2+4 \neq 0$ sempre $\Rightarrow D = \mathbb{R}$

e $[0,3] \subseteq D$

- calcolo $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+4) - x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$$

- cerco i punti a derivata nulla cioè calcolo $f'(x)=0$

$$\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} = 0 \Rightarrow -x^2+4=0$$

$$-x^2 = -4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

!!! punto da NON mettere in tabella

$x_0 = -2 \notin [0,3]$

$\boxed{x_0 = 2} \in [0;3]$

punto da mettere in tabella

- cerco i punti "non derivabili" cioè calcolo D' e lo confronto con D:

$D' = (x^2+4)^2 \neq 0 \Rightarrow x^2+4 \neq 0$ sempre $\Rightarrow D' = \mathbb{R}$

Quindi $D' = D \Rightarrow$ non ci sono punti "non derivabili" da mettere in tabella

- tabella riassuntiva

	x_0	$f(x_0)$
punti a derivata nulla	$x_0 = 2$	$f(2) = \frac{2}{(2)^2+4} = \frac{2}{4+4} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{8}_{4}} = \frac{1}{4} = 0,25 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4}}$ è il valore di max assoluto nel punto $x_0 = 2$
punti non derivabili	—	
estremi dell'intervallo	$a = 0$	$f(0) = \frac{0}{(0)^2+4} = 0 \Rightarrow \boxed{0}$ è il valore di minimo assoluto nel punto $x_0 = 0$
	$b = 3$	$f(3) = \frac{3}{(3)^2+4} = \frac{3}{9+4} = \frac{3}{13} \sim 0,230769\ldots$