PROBLEMI BASATI SU FUNZIONI ESPONENZIALI

1) Datazione con carbonio 14 (^{14}C) $\Rightarrow M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$

2) Decadimento radioattivo
- caso del ^{137}Cs : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$
- caso del ^{134}Cs : "
- caso iodio-131 che dimezza in 1 periodo $\Rightarrow N(n) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

NB n = n° periodi

3) Crescita popolazione
- caso di batteri che triplicano in 1 periodo $\Rightarrow N(n) = N_0 \cdot 3^n$
- caso di batteri che raddoppiano in 1 periodo $\Rightarrow N(n) = N_0 \, 2^n$
- caso di popolazione con tasso di crescita in 1 periodo $\Rightarrow N(n) = N_0 (1+i)^n$

4) Legge di raffreddamento di Newton $\Rightarrow T(t) = T_A + (T_0 - T_A) e^{kt}$

5) pH di una soluzione $\Rightarrow pH = -\log_{10} \left(\underbrace{[H_3O^+] \text{ mol/dm}^3}_{\text{concentrazione in mol/dm}^3} \right)$

6) Investimento di un capitale:
regime semplice $\Rightarrow M(t) = C_0(1+it)$
regime composto $\Rightarrow M(t) = C_0(1+i)^t$

Esercizio (simulazione esame prof. Morigi) — Datazione con ^{14}C (decadimento radioattivo)

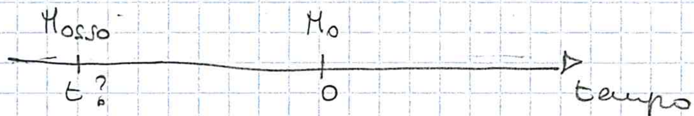
In un frammento di osso di un uomo primitivo la concentrazione di ^{14}C è pari al 12% della concentrazione M_0 di ^{14}C che si misura nell'atmosfera e negli esseri viventi.
Ricordando che la legge di decadimento della quantità $M(t)$ di ^{14}C presente al tempo t (misurato in anni) dopo la sua morte è data da:

$$M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}} ,$$

datare l'epoca in cui è vissuto l'uomo primitivo

Soluzione

$$\underbrace{M(t)}_{\text{atomi di } ^{14}C \text{ presenti individuo di età } t} = \underbrace{M_0}_{\text{atomi di } ^{14}C \text{ presenti nell'atmosfera}} \; 2^{-\frac{t}{5730}}$$



$$M(t) = \underset{\text{di età } t}{M_{osso}} = 12\% \cdot M_0 = 0,12\, M_0$$

quindi in t vale

$$0,12\, \cancel{M_0} = \cancel{M_0}\; 2^{-\frac{t}{5730}}$$ da cui ricavo t con la definizione di logaritmo

$$-\frac{t}{5730} = \log_2 0,12$$

da cui $t = -5730 \cdot \log_2 0,12 = -5730 \cdot \dfrac{\log_{10} 0,12}{\log_{10} 2} = -5730 \cdot \dfrac{-0,920818754}{0,301029996}$

$= 17527,5$ anni

Esercizio (n 4 foglio Achilles 23.10.2013) (proposto anche prof. Morigi) | Decadimento radioattivo

Il cesio isotopo ^{137}Cs perde annualmente il 2,3% della sua massa per disintegrazione radioattiva.
Il decadimento radioattivo è esponenziale, cioè il numero $N(t)$ di atomi residui al tempo t può essere valutato in rapporto al numero N_0 di atomi radioattivi iniziali tramite la formula

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t}$$

a) trovare la costante di decadimento λ per ^{137}Cs e quale è la sua unità di misura?

b) Qual è la relazione tra il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ e λ?
Calcolare il tempo di dimezzamento di ^{137}Cs

c) Dopo quanti anni la radioattività del ^{137}Cs si riduce a 1%?

Soluzione

la funzione di riferimento $\overbrace{N(t)}^{\text{n° atomi rimasti al tempo } t} = N_0 \, e^{-\lambda t}$ con N_0 = atomi iniziali

t = tempo decadimento (in anni)

tasso (%) di decadimento annuo = 2,3% = 0,023

a) λ? unità misura di λ?

N_0 (a $t=0$) ; $N_0 - N_0 \cdot 2,3\% = N_0 \cdot 0,977$ (a $t = 1a$) ; asse: t tempo

$$N_{1a} = N_0 - N_0 \cdot 0,023 = N_0 \, (1 - 0,023) = N_0 \cdot 0,977$$

quindi dopo $t = 1a$, usando $N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t}$ vale

$$\cancel{N_0} \cdot 0,977 = \cancel{N_0} \, e^{-\lambda \cdot 1a}$$

tengo l'unità di misura visibile

cerco di ricavare λ, uso la definizione di logaritmo

$$\frac{-\lambda \cdot \cancel{1a}}{\cancel{-1a}} = \frac{\ln 0,977}{-1a}$$

$$\lambda = \underbrace{-\ln 0,977}_{-0,02326867} \; a^{-1} = +0,023 \text{ anni}^{-1}$$

unità di misura di λ

b) tempo di dimezzamento di ^{137}Cs?

N_0 $\qquad N(T) = \frac{N_0}{2}$

$0 \qquad T? \qquad$ tempo

uso $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ $\Rightarrow$ in T vale $\frac{\cancel{N_0}}{2} = \cancel{N_0} e^{-\lambda T}$ con $\lambda = 0{,}023\ a^{-1}$ calcolata prima

$$\frac{1}{2} = e^{-0{,}023\,T}$$

uso la def. di logaritmo

$$\frac{\cancel{-0{,}023}\,T}{\cancel{-0{,}023}} = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0{,}023}$$

$$T = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0{,}023} = \frac{-0{,}693147181}{-0{,}023} \simeq 30 \text{ anni}$$

$\left(T = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-\lambda} \right.$ quindi T e λ sono inversamente proporzionali $\Leftarrow \left. \right)$

c) Dopo quanti anni ^{137}Cs si riduce a 1%?

$\hookrightarrow$ 1% della quantità iniziale N_0 cioè rimane $N_0 \cdot 1\%$

N_0 $\qquad N_0\,1\% = N_0 \cdot 0{,}01$

$0 \qquad t = ? \qquad$ tempo

NB. si riduce del 1% significa che rimane $N_0 - N_0 \cdot 1\%$

uso $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ $\Rightarrow$ in t vale $\cancel{N_0} \cdot 0{,}01 = \cancel{N_0} e^{-0{,}023\,t}$

con $\lambda = 0{,}023\ a^{-1}$ calcolata prima

ricavo t

uso la def. di log.

$$\frac{\cancel{-0{,}023}\,t}{\cancel{-0{,}023}} = \frac{\ln 0{,}01}{-0{,}023}$$

$$t = \frac{\ln 0{,}01}{-0{,}023} = \frac{-4{,}605170186}{-0{,}023} \sim 200 \text{ anni}$$

Esercizio (es n 5 foglio Achilles 23.10.2013 + prof. Mangili)

il cesio isotopo ^{134}Cs ha un tempo di dimezzamento di 2 anni. Calcolare la costante di decadimento λ.

Soluzione

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

N_0 $\qquad \frac{N_0}{2}$

$0 \qquad T = 2a$

quindi in $T = 2$

vale $\frac{\cancel{N_0}}{2} = \cancel{N_0} e^{-\lambda \cdot 2a}$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot 2a} \quad \text{uso la def. di log.}$$

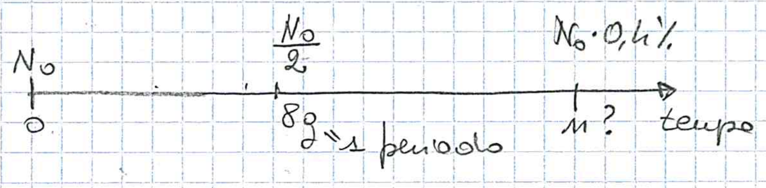
$$\frac{-\lambda \cdot \cancel{2a}}{\cancel{-2a}} = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-2a} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-2a} = \frac{-0{,}693147181}{-2a} = 0{,}35\ a^{-1}$$

Esercizio n 2 foglio Achilles 10.12.2013 | Decadimento radioattivo

L'isotopo iodio-131 ha un tempo di dimezzamento di 8 giorni.
Dopo quanti giorni la quantità di iodio-131 si riduce allo 0,4% della quantità iniziale?

a) 64 b) 32 c) 200 d) 20

Soluzione



$$N(n) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

n = n° di periodi (tempo espresso in periodi)

si usa base $\frac{1}{2}$ perché in un periodo di tempo la quantità dimezza

$$\cancel{N_0} \cdot 0{,}4\% = \cancel{N_0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$0{,}004 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

NB $0{,}004 = \frac{4}{1000} = \frac{1}{250} \sim \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$t = 8$ periodi di decadimento

$= 8 \cdot 8g = \underline{64g}$

oppure facendo i calcoli esatti con la definizione di log

$$n = \log_{\frac{1}{2}} 0{,}004 \underset{\substack{\text{formula}\\\text{cambio}\\\text{base}}}{=} \frac{\ln 0{,}004}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{-5{,}521460918}{-0{,}693147181} = 7{,}9 \sim \underline{8 \text{ periodi}}$$

$= 8 \cdot 8g =$
$= \underline{64g}$

Quindi la soluzione è a

Esercizio [n 3 foglio Achilles 09.10.2013 proposto anche prof. Longi] || Crescita popolazione

In determinate condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni 2 giorni.
Se la crescita è esponenziale, qual è l'aumento % dopo 6 ore? e dopo 18 ore?

Soluzione

Suppongo che al tempo 0 la popolazione sia di numero N_0 (noto)

N_0 — $3 \cdot N_0$ — $3(3N_0) = 3^2 N_0$ — $3(3^2 N_0) = 3^3 N_0$ — $3(3^3 N_0) = 3^4 N_0$

0 — 2g (1p) — 4g (2p) — 6g (3p) — 8g (4p) — t (Tempo)

quindi la legge di crescita è   1 periodo = 2g

$$\boxed{N_p(n) = N_0\, 3^n}$$ con n = n° periodi (tempo espresso in periodi)

uso base 3 perché la popolazione triplica in 1 periodo

trasformo la legge in h (1 periodo = 48 h ⇒ $1h = \frac{1}{48}p$)

$$\boxed{N_h(t) = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{48}t}}$$ con t = tempo in h

|| NB $N_p(\underset{\text{periodo}}{1}) = N_h(\underset{\text{ore}}{48})$

Se $t = 6h \Rightarrow N_h(6) = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{48}\cdot 6} = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{8}}$

Se $t = 18h \Rightarrow N_h(18) = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{48}\cdot 18} = N_0 \cdot 3^{\frac{3}{8}}$

Calcolo l'aumento % nel caso a : $\frac{N - N_0}{N_0} = \frac{N_0 \cdot 3^{\frac{1}{8}} - N_0}{N_0} = \frac{\cancel{N_0}(3^{\frac{1}{8}} - 1)}{\cancel{N_0}} = 3^{\frac{1}{8}} - 1 = 0{,}1472$
$= 14{,}72\,\%$

Calcolo l'aumento % nel caso b : $\frac{N - N_0}{N_0} = \frac{N_0\, 3^{\frac{3}{8}} - N_0}{N_0} = \frac{\cancel{N_0}(3^{\frac{3}{8}} - 1)}{\cancel{N_0}} = 3^{\frac{3}{8}} - 1 = 0{,}5098$
$= 50{,}98\,\%$

NB: quanto è la popolazione dopo 1 g? ($\frac{1}{2}$ periodo)

non è $\frac{1}{2} \cdot 3N_0$ cioè $\frac{3N_0}{2}$

bensì è

$N(\frac{1}{2}) = N_0\, 3^{\frac{1}{2}} = N_0 \sqrt{3}$

Notare bene   Suppongo $\underline{1 \text{ periodo} = 2g}$

Considero la legge basata sui periodi di tempo

$$(1)\ \boxed{N_p(n) = N_0\, 3^n} \qquad \text{con } n = \text{n° periodi di tempo (tempo espresso in periodi)}$$

- la trasformo in una legge equivalente del tipo

$$\boxed{N_g(t) = N_0\, 3^{kt}} \qquad \text{con } t = \text{tempo in giorni}$$

poiché vale $1p = 2g$
devo trovare k in modo che valga

$$N_p(\underset{\text{periodo}}{1}) = N_g(\underset{\text{giorni}}{2})$$

$$\cancel{N_0} \cdot 3^1 = \cancel{N_0} \cdot 3^{k \cdot 2} \quad \text{da cui}$$

$$1 = k \cdot 2$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Quindi la legge diventa $\boxed{N_g(t) = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{2}t}}$
con t = tempo in giorni

- ora trasformo (1) in una legge equivalente di tipo

$$N_h(t) = N_0 \cdot 3^{kt} \qquad \text{con } t = \text{espresso in ore}$$

poiché vale $1p = 48h$
devo trovare k in modo che valga

$$N_p(\underset{\text{periodo}}{1}) = N_h(\underset{\text{ore}}{48})$$

$$\cancel{N_0} \cdot 3^1 = \cancel{N_0} \cdot 3^{k \cdot 48} \quad \text{da cui}$$

$$1 = k \cdot 48$$

$$k = \frac{1}{48}$$

Quindi la legge diventa $\boxed{N_h(t) = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{48} \cdot t}}$
con t = tempo in ore

Esercizio n 3 foglio Achilles 17.12.2013 || Crescita popolazione

Nella fase esponenziale della crescita di un numero N_0 di cellule di una coltura batterica di Escherichia Coli, in condizioni nutrizionali povere, raddoppia ogni 40-50 minuti. Quante ore ci vogliono affinché siano presenti $10^3 N_0$ cellule?

a) 2,5/5 ore b) 7/8 ore c) 70/80 ore d) 40/50 ore

e) 667/833 ore

Soluzione

la popolazione raddoppia in 1 periodo di 40-50 min

$\Rightarrow$ $N(n) = N_0 \cdot 2^n$ con $n = n°$ periodi (tempo in periodi)

Cerco t per cui vale

$$\cancel{N_0} \, 10^3 = \cancel{N_0} \cdot 2^n$$

|| NB $10^3 \sim 2^{10}$ (1024)

$$10^3 = 2^n$$

$$2^{10} = 2^n$$

$n = 10$ periodi $\Rightarrow 10 \cdot 40/50$ min $= 400/500$ min $\sim 7/8$ h

oppure facendo i esatti

$$10^3 = 2^n$$

$$n = \log_2 10^3 \underset{\text{cambio base}}{=} \frac{\ln 10^3}{\ln 2} = \frac{6{,}908}{0{,}6931} \cong 10 \text{ periodi}$$

Quindi la soluzione è b)

Esercizio [n.4 foglio Achilles 09.10.2013 proposto anche prof. Morigi] | Crescita popolazione

Si stima che la popolazione mondiale, attualmente di circa 7 miliardi di individui, aumenti dell'1,1% all'anno. Supponendo che il tasso di crescita rimanga invariato nel tempo, calcolare entro quanti anni la popolazione raddoppierà, quadruplicherà, decuplicherà

Soluzione

$= N_1(1+i) = N_0(1+i)(1+i) = N_0(1+i)^2$

$= N_2(1+i) = N_0(1+i)^2(1+i) = N_0(1+i)^3$

$N_0(1+i) = $ "

$N_0 \qquad N_1 = N_0 + N_0 i \qquad N_2 = N_1 + N_1 i \qquad N_3 = N_2 + N_2 i \qquad \dots \qquad N_0(1+i)^n$

$0 \qquad 1a \qquad 2a \qquad 3a \qquad \dots \qquad n = ? \qquad t$ (tempo)

$N_0 = 7$ miliardi $= 7 \cdot 10^9$

$i = 1,1\% = 0,011$
tasso di crescita

$N_0 i$ = incremento della popolazione dopo 1 anno

Quindi la funzione di crescita della popolazione è di tipo esponenziale

$N(n) = N_0 (1+i)^n$ con i = tasso di crescita annuo $= 0,011$

cioè $\qquad n$ = tempo in periodi ($1p \equiv 1a$)

$N(n) = N_0 (1,011)^n \qquad N_0$ = popolazione al tempo $0 = 7 \cdot 10^9$

- Entro quanti anni la popolazione raddoppia?

$N = 2N_0$ quindi $N(n) = N_0 (1,011)^n$

$2\cancel{N_0} = \cancel{N_0}(1,011)^n$

$2 = 1,011^n$ per definizione di log

$n = \log_{1,011} 2 = \dfrac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1,011} = \dfrac{0,301029996}{0,004751156} =$

$= 63,359$ anni

$(\cong 63$ anni$)$

Ricordare la formula di cambiamento di base del log

$\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$

- Entro quanti anni la popolazione quadruplica?

$N = 4N_0$ come sopra e otteniamo

$n = \log_{1,011} 4 = \dfrac{\log_{10} 4}{\log_{10} 1,011} = \dfrac{0,602059991}{0,004751156} = 126,7$ anni

- Entro quanti anni decuplica?

$N = 10 N_0$ come sopra otteniamo $n = \log_{1,011} 10 = \dfrac{\overbrace{\log_{10} 10}^{=1}}{0,004751156} = 210,5$ anni

Legge di raffreddamento di Newton

La legge afferma che la velocità di raffreddamento di un corpo è proporzionale alla differenza tra la temperatura del corpo e quella dell'ambiente circostante

da cui si ottiene:

$$\underbrace{T(t)}_{\text{temperatura al tempo } t} = T_A + (T_0 - T_A)\,e^{kt}$$

con T_A = temperatura ambiente

T_0 = temperatura del corpo al tempo 0

k = costante

t = tempo trascorso in minuti

Esercizio

Si supponga che un pollo sia tolto dal forno ad una temperatura di 185 °F e venga appoggiato sul tavolo in una stanza dove la temperatura è 75 °F.

Se $T(t)$ è la temperatura del pollo dopo t minuti, allora, in base alla legge di raffreddamento di Newton, abbiamo: $T(t) = T_A + (T_0 - T_A)\,e^{kt}$.

a) Se la temperatura del pollo dopo mezz'ora è di 150 °F, qual è la temperatura del pollo dopo 45 minuti?

b) Dopo quanto tempo il pollo raggiunge la temperatura di 100 °F?

Soluzione

a) $T_0 = 185$ °F (temperatura pollo)

$T_A = 75$ °F (temperatura ambiente

in $t = 30$ minuti vale $T(30) = 150$ °F

Devo prima calcolare il valore della costante k

quindi in $t = 30$ usando $T(t) = T_A + (T_0 - T_A)\,e^{kt}$ ottengo

$$150 = 75 + (185 - 75)\,e^{k \cdot 30}$$

$$150 = 75 + 110\,e^{k30}$$

$$\frac{150 - 75}{110} = \frac{\cancel{110}\,e^{k30}}{\cancel{110}}$$

$$0{,}68 = e^{k30}$$

ora ricavo k con la definizione di logaritmo

$$k \cdot 30 = \ln 0{,}68$$

$$k = \frac{\ln 0{,}68}{30} = \frac{-0{,}3829922}{30} \cong -0{,}013$$

Ora posso calcolare in $t = 45$ minuti, usando $T(t) = T_A + (T_0 - T_A) e^{kt}$

$$T(45) = 75 + (185 - 75) e^{-0{,}013 \cdot 45} =$$

$$= 75 + 110 \cdot e^{-0{,}574} \simeq 137 °F$$

b) t? per cui $T_0 = 100 °F$

$$T(t) = T_A + (T_0 - T_A) e^{kt}$$

$$100 = 75 + (185 - 75) e^{-0{,}013 \cdot t}$$

$$\frac{100 - 75}{110} = \frac{\cancel{110} \cdot e^{-0{,}013 t}}{\cancel{110}}$$

$$0{,}23 = e^{-0{,}013 t}$$

ricavo t
usando la def. di logaritmo

$$\frac{\cancel{-0{,}013} t}{\cancel{-0{,}013}} = \frac{\ln 0{,}23}{-0{,}013}$$

$$t = \frac{\ln 0{,}23}{-0{,}013} = \frac{-1{,}481604541}{-0{,}013} \cong 114 \text{ minuti}$$

Esercizio [n 2 foglio Achilles 09.10.2013 proposto anche dalla prof. Morigi] || pH di una soluzione

Il pH di una soluzione acquosa sufficientemente diluita è stato definito da Sørensen come

$pH = -\log_{10}([H_3O^+]\ mol/dm^3)$

dove $[H_3O^+]$ indica la concentrazione di H_3O^+

a) calcolare il pH di una soluzione $2{,}0 \cdot 10^{-3}$ M di HCl (con $M = mol/dm^3$)

b) il pH di una soluzione è 9,67, quello di un'altra è 8,67. Calcolare in entrambi i casi la concentrazione di H_3O^+

Soluzione

$pH = -\log_{10}(\underbrace{[H_3O^+]\ mol/dm^3}_{x})$

x = concentrazione di H_3O^+ in $\underbrace{mol/dm^3}_{=M}$

quindi significa

$y = pH = -\log_{10}(x)$ con x

a) $x_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ mol/dm^3$ concentrazione di HCl

da cui il pH è $pH = -\log_{10}(x_0) = -\log_{10}(2{,}0 \cdot 10^{-3})$

$= -\left(\log_{10} 2{,}0 + \log_{10} 10^{-3}\right) =$

$= -\left(\log_{10} 2{,}0 - 3\underbrace{\log_{10} 10}_{=1}\right) =$

$= -\log_{10} 2{,}0 + 3 = 2{,}69$ OK

con la calcolatrice

Ricordare le proprietà del log

- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^n = n \log_a b$

$\log_a a = 1$

definizione di log:

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

b) • $pH = 9{,}67 \Rightarrow x_0 = ?$

$pH = -\log_{10}(x) \Rightarrow 9{,}67 = -\log_{10}(x)$

$\log_{10} x = -9{,}67$

per definizione di log

$x = 10^{-9{,}67} = 2{,}14 \cdot 10^{-10}\ mol/dm^3$ OK

con la calcolatrice

L'investimento di un capitale iniziale C_0, al tasso (%) di interesse annuo i, per un tempo t, può seguire due tipi di regimi

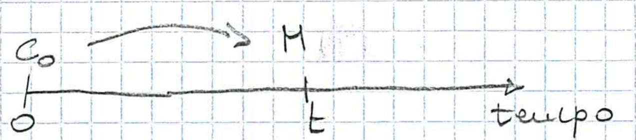
Investire un capitale

1) regime di interesse semplice (investimento per brevi periodi, di solito inferiori ad 1 anno)

$M = C_0(1+it)$ legge di crescita lineare (RETTA)

2) regime di interesse composto (investimento per lunghi periodi, di solito maggiori di 1 anno)

$$M = C_0(1+i)^t$$ legge di crescita di tipo esponenziale



C_0 = capitale iniziale al tempo 0

i = tasso (%) di interesse annuo

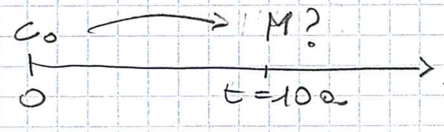
t = tempo, durata dell'investimento

M = montante, capitale finale al tempo t

Esercizio (n 5 foglio Achilles 09.10.2013 non proposto dalla prof. Rorigi)

È più vantaggioso investire un capitale per 10 anni in regime di interesse semplice al tasso annuo del 5% o, sempre per 10 anni, in regime di interesse composto ad un tasso annuo del 4%?
Qual è l'aumento % nei due casi?

Soluzione



C_0 = capitale iniziale

a) Regime interesse semplice con $i = 5\% = 0,05$

$$M = C_0(1+i\,t) = C_0(1+\underset{\overset{\uparrow}{i}}{0,05}\cdot\underset{\overset{\uparrow}{t}}{10}) = C_0\cdot 1,5 = 1,5\cdot C_0$$

b) Regime di interesse composto con $i = 4\% = 0,04$

$$M = C_0(1+i)^t = C_0(1+0,04)^{10} = C_0\cdot 1,04^{10} = 1,04^{10}\cdot C_0$$

Quindi è più conveniente investire per 10 anni ad un regime composto perché $M_c > M_s$

Aumento % in regime semplice: $\frac{M-C_0}{C_0} = \frac{1{,}5C_0 - C_0}{C_0} = \frac{\cancel{C_0}(1{,}5-1)}{\cancel{C_0}} =$

$= 0{,}5 = 50\%$

Aumento % in regime composto: $\frac{M-C_0}{C_0} = \frac{1{,}04^{10}C_0 - C_0}{C_0} =$

$= \frac{\cancel{C_0}(1{,}04^{10}-1)}{\cancel{C_0}} =$

$= 0{,}48 = 48\%$

In generale

Aumento % in regime semplice: $\frac{M-C_0}{C_0} = \frac{C_0(1+it)-C_0}{C_0} =$

$= \frac{\cancel{C_0}(\cancel{1}+it-\cancel{1})}{\cancel{C_0}} = it$

Aumento % in regime composto: $\frac{M-C_0}{C_0} = \frac{C_0(1+i)^t - C_0}{C_0} =$

$= \frac{\cancel{C_0}((1+i)^t-1)}{\cancel{C_0}} =$

$= (1+i)^t - 1$

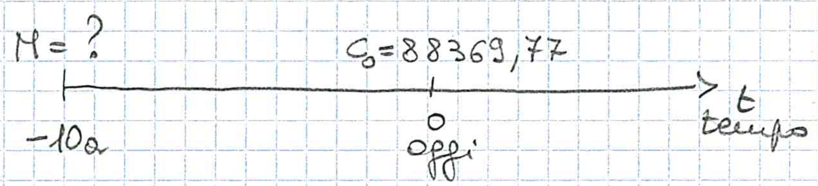
Esercizio (es n 9 foglio Achilles 02.10.2013 NON proposto dalla prof. Morigi) | Investire un capitale

Un capitale è investito da lungo tempo ad un tasso (%) di interesse annuo del 1%. Se attualmente il capitale è 88369,77 E, quale era l'ammontare del capitale 10 anni fa?

Soluzione

il capitale è investito da lungo tempo $\Rightarrow$ regime composto

$\Rightarrow \quad M = C_0 (1+i)^t$ $\qquad i = 1\% = 0{,}01$



$$M = 88369{,}77\,(1+0{,}01)^{-10} \sim 80'000\,E$$