SISTEMI LINEARI

Il sistema di m equazioni con n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

può essere riscritto in questo modo

$$\underset{m \times n}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}} \cdot \underset{n \times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = \underset{m \times 1}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}$$

$= \text{ ok}$

quindi può essere riscritto come

$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ con $\underset{m\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ matrice dei coefficienti

$\underset{n\times 1}{\underline{X}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vettore delle incognite

$\underset{m\times 1}{\underline{B}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ vettore dei termini noti

la matrice dei coefficienti affiancata dai termini noti è chiamata

$$\underset{m\times(n+1)}{\bar{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

matrice completa del sistema

Per risolvere il sistema si trasforma la matrice completa $\bar{A}$ in una matrice a scala (metodo di riduzione di Gauss Jordan) equivalente (cioè le cui soluzioni sono le stesse del sistema iniziale) mediante le seguenti operazioni elementari:

1) scambio tra 2 righe ($R_i \Leftrightarrow R_j$)
2) sostituisco la riga R_i con la riga λR_i ($R_i \to \lambda R_i$)
3) sostituisco la riga R_i con $R_i + \lambda R_j$ ($R_i \to R_i + \lambda R_j$)
(dove R_j è un'altra riga)

Una volta ottenuta la matrice a scala equivalente è facile ottenere le soluzioni del sistema, se esistono.
perché il sistema si è trasformato in uno equivalente del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \quad\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \quad\quad \dots\dots \\ \quad\quad\quad a_{mn}x_n = c_n \end{cases}$$

da cui è facile ricavare x_n e poi andando a ritroso con sostituzione ricavare le altre variabili

Matrice a scala: è una matrice del tipo

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & P_1 & * & * & \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2 & * & * & \dots & & & \\ & \text{qui tutti} & & & & 0 & 0 & P_3 & * & * & \dots & \\ & \text{zeri} & & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & P_4 & * & * & \dots \\ 0 & \dots & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

P_1, P_2, P_3, P_4 sono $\neq 0$ e sono chiamati pivot (pesi)

Rango di una matrice a scala S di tipo $m \times n$

il rango di S è il n° dei pivot
(quindi è il n° delle righe non nulle)

Esempi consideriamo le seguenti matrici a scala:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 3$$
(3 righe non nulle)

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango} = 2$$
(2 righe non nulle)

Definizione:
Un sistema $AX = B$ che ammette soluzioni si dice COMPATIBILE

Si dimostra che

T_1: il rango di una matrice A $m \times n$ è uguale al rango della matrice a scala equivalente cioè rango A = rango S
(ottenuta applicando su A le operazioni elementari)

T_2: Dato il sistema $AX = B$ con A matrice quadrata $n \times n$
Il sistema ammette soluzione unica $\iff$ rango A = n
(cioè il sistema è compatibile) (significa che $\det A \neq 0$)

T_3: (Teorema di Rouché-Capelli)
Dato il sistema $AX = B$ con A matrice generica $m \times n$
Il sistema ammette soluzioni (unica o infinite)
$\iff$ rango A = rango $\bar{A}$ (matrice completa)
e le soluzioni (infinite) dipendono da $n - r$ parametri
n° delle incognite (colonne) rango

se rango = n $\Rightarrow$ la soluzione è unica

Esempi per stabilire se un sistema è compatibile

Supponiamo di voler risolvere il sistema $A\underline{x} = B$ e di ottenere, applicando il metodo di Gauss-Jordan, la matrice a scala equivalente a

1)
$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)}_{\bar{A}}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{rango } A = 3 \\ \text{rango } \bar{A} = 3 \end{array}\right\} = \Rightarrow$ sistema compatibile, ammette soluzioni

$n = 3$ = $\Rightarrow$ la soluzione è unica

n° incognite (n° colonne)

2)
$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\bar{A}}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{rango } A = 2 \\ \text{rango } \bar{A} = 2 \end{array}\right\} = \Rightarrow$ sistema compatibile ammette soluzioni

$n = 3$ $\neq$ $\Rightarrow$ ha infinite soluzioni con

$n - \text{rango} = 3 - 2 = 1$ parametro

3)
$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)}_{\bar{A}}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{rango } A = 2 \\ \text{rango } \bar{A} = 3 \end{array}\right\} \neq \Rightarrow$ sistema **non** compatibile

(non ha soluzioni, sistema impossibile)

$\cancel{n = 3}$

ES

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 8 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 3 = 0 \end{cases}$$

[es. 1 file prof. Achilles 16.10.2013]

Soluzione Trasformiamo in forma normale

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 \qquad\quad + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ matrice dei coefficienti

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$ vettore dei termini noti $\qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Forma matriciale del sistema

$$A\,X = B \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Risoluzione con l'algoritmo di Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right] \sim \xrightarrow{R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -11 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \xrightarrow{R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 16 \\ 0 & 2 & 0 & -11 \end{array}\right] \sim \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & 21 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{l} R_2 : (-1) \rightarrow \\ R_3 \left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \end{array}\right] \sim \xrightarrow{R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \end{array}\right]$$

$$\sim \xrightarrow{R_2 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \end{array}\right] \sim \xrightarrow{R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{2} \end{array}\right]$$

$$-16 + \frac{21}{2} = \frac{-32 + 21}{2} = \frac{-11}{2} \qquad 29 - 2 \cdot \frac{11}{2} = 18$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -\frac{11}{2} \\ -\frac{21}{2} \end{bmatrix}$$

trasformiamo in sistema

$$\begin{cases} x_1 = 18 \\ x_2 = -\frac{11}{2} \\ x_3 = -\frac{21}{2} \end{cases}$$

NB rango $A = 3$
rango $\bar{A} = 3$ $\Big\} =$ $\Rightarrow$ sistema compatibile (cioè ammette soluzione)

$n = 3$ $=$ $\Rightarrow$ la soluzione è <u>unica</u>
n° incognite
(n° colonne)

Determinare tutte le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x+5y-4z-1=0 \\ x+y+5z+1=0 \end{cases}$$

(esercizio esame di simulazione prof. Morigi)

<u>Soluzione</u>

trasformo il sistema in forma normale

$$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x+5y-4z=1 \\ x+y+5z=-1 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

in forma matriciale $A \cdot v = B$

è
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Risolvo con l'algoritmo di Gauss Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ \\ R_3-R_1\to \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2-2R_1\to \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & +2 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ \\ R_3+R_2\to \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{R_3}{10}\to \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} R_1+3R_3\to \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2-2R_3\to \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} R_1-2R_2\to \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

rango $A = 3$
rango $\bar{A} = 3$
$n = 3$
quindi sistema compatibile con unica soluzione

Quindi questo corrisponde a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

il sistema ha una soluzione

B5 Risolvere il seguente sistema

CASO DI SISTEMA IMPOSSIBILE

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

Soluzione

Risolvo usando il metodo di Gauss Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 - \frac{5}{2}R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ R_3 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

rango $A = 2$
rango $\overline{A} = 3$ $\Big\}$ $\neq$ $\Rightarrow$ sistema non compatibile

(non ammette soluzioni $\Rightarrow$ sistema impossibile)

ES

Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$$

[esempio n 10.26 p. 465 libro Abate]

CASO DI SISTEMA IMPOSSIBILE

Soluzione

Risolvo usando il metodo di risoluzione di Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & 7 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ \\ R_3-2R_1 \to \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 11 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2+R_1 \to \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 11 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ \\ R_3-R_2 \to \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right]$$

Dall'ultima riga si ottiene $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 14$ sistema impossibile

NB $\left.\begin{array}{l} rg\, A = 2 \\ rg\, \bar{A} = 3 \end{array}\right\} \neq \Rightarrow$ sistema non compatibile (impossibile) non ha soluzioni