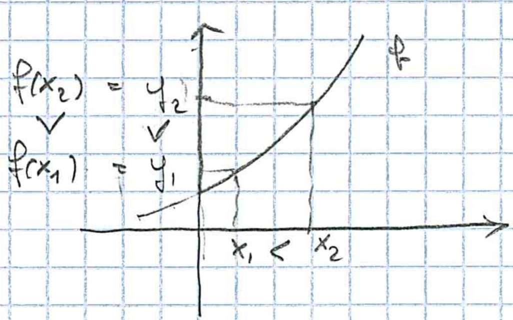
INTERVALLI DI CRESCENZA E DECRESCENZA DI UNA FUNZIONE DERIVABILE

(Dal Teor. di Lagrange si deduce che)

Teor. 1) Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ con $f'(x) > 0$ in (a,b)

$\Rightarrow$ f è strettamente crescente in $[a,b]$

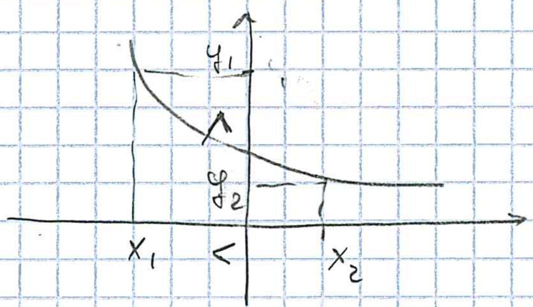
cioè per ogni $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) < f(x_2)$



Teor. 2) Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ con $f'(x) < 0$ in (a,b)

$\Rightarrow$ f è strettamente decrescente in $[a,b]$

cioè per ogni $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) > f(x_2)$



Quindi per trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza

- si calcola $f'(x)$
- si risolve $f'(x) \geq 0$ per studiare il segno di $f'(x)$

se $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$

se $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$

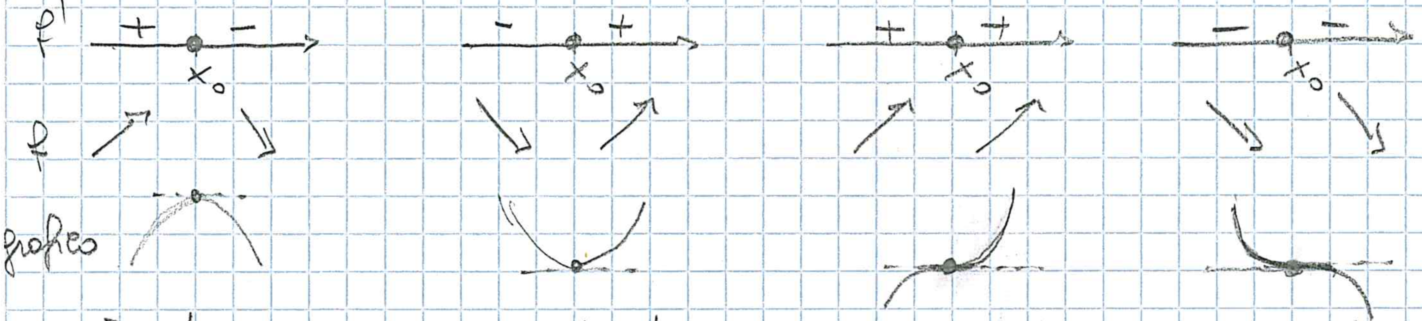
f' $\xrightarrow{\quad + \quad}$
f $\nearrow$

f' $\xrightarrow{\quad - \quad}$
f $\searrow$

Per trovare i punti derivabili di max e min relativi (con il metodo dello studio del segno di $f'(x)$)

- si calcola $f'(x)$
- si risolve $f'(x) \geq 0$ per studiare il segno di $f'(x)$ e trovare dove $f'(x)=0$

Si possono avere le seguenti situazioni:



x_0 è punto di max rel.

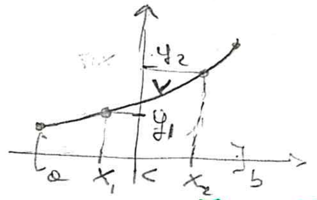
x_0 è punto di min rel.

x_0 è punto di flesso (ascendente) a tangente orizzontale

x_0 è punto di flesso (discendente) a tangente orizzontale

INTERVALLI DI CRESCENZA E DECRESCENZA DI UNA FUNZIONE DERIVABILE

(Dal T. di Lagrange si deducono i seguenti teoremi)



T1) Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$, con $f'(x)>0$ in $]a,b[$

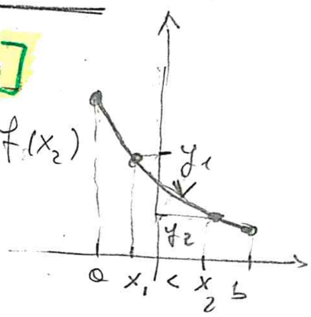
$\Rightarrow$ f crescente strettamente in $[a,b]$

cioè per ogni $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1<x_2$ vale $f(x_1)<f(x_2)$

T2) Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, con $f'(x)<0$ in $]a,b[$

$\Rightarrow$ f è decrescente strettamente in $[a,b]$

cioè per ogni $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1<x_2$ vale $f(x_1)>f(x_2)$



NEI SEGUENTI ESERCIZI CALCOLARE GLI INTERVALLI DI CRESCENZA E DECRESCENZA:

ES $\quad f(x)=\dfrac{4x^2+1}{2x}$ $\qquad$ D: $x \neq 0$

Sol: $f'(x)=\dfrac{8x(2x)-(4x^2+1)\cdot 2}{(2x)^2}=\dfrac{16x^2-8x^2-2}{4x^2}=\dfrac{8x^2-2}{4x^2}$

$=\dfrac{2(4x^2-1)}{2\,4x^2}$

$f'(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x^2}$

NB il segno di $f'(x)$ si presta anche ad un ragionamento veloce: basta valutare $4x^2-1\geq 0$ poiché $2x^2>0$ lo è sempre con $x\neq 0$

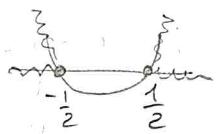
Studio il segno di f' cioè valuto $f'(x)\geq 0$

$\dfrac{4x^2-1}{2x^2}\geq 0$

N: $4x^2-1\geq 0$ USO LA PARABOLA ∪

$4x^2-1=0$

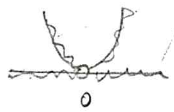
$x^2=\frac{1}{4}$ $\qquad x=\pm\frac{1}{2}$



D: $2x^2>0$ USO LA PARABOLA ∪

$\frac{2}{2}x^2=\frac{0}{2} \Rightarrow x^2=0$

$x=0$



		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		
N	+		−		−		+	
D	+		+		+		+	
N/D	+		−	∄	−		+	← f'
	↗		↘	∄	↘		↗	← f

Quindi

$]-\infty; -\frac{1}{2}]$ f crescente

$[-\frac{1}{2}; 0[$ f decresc.

$]0; \frac{1}{2}]$ f decrescente

$[\frac{1}{2}; +\infty[$ f. crescente

NB in $x_0=-\frac{1}{2}$ la funzione ha un punto di max. relativo

in $x_0=\frac{1}{2}$ la funzione ha un punto di min relativo

(in $x_0=0$ la funzione non esiste)

ES $\boxed{f(x) = x^4 - 2x^3}$ $\quad D: \mathbb{R}$

NB: il segno di $f'(x)$ si presta anche ad un ragionamento veloce: basta valutare $2x-3 \geq 0$ poiché $2x^2 \geq 0$ lo è sempre e si annulla in $x_0=0$

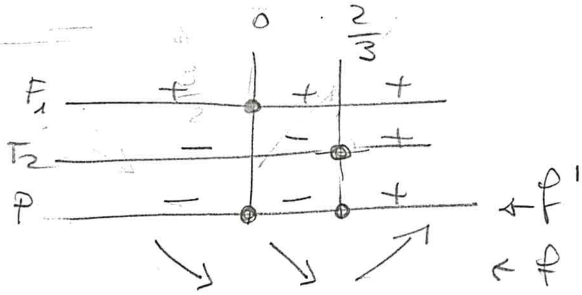
Sol: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = \underbrace{2x^2}_{\geq 0}(2x-3)$

Studio il segno di $f'(x)$ cioè valuto $f'(x) \geq 0$

$2x^2(2x-3) \geq 0$ $\quad F_1: 2x^2 \geq 0$ PARABOLA ∪

$\frac{2x^2}{2} = \frac{0}{2} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$F_2: 2x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$



$]-\infty; 0]$ f è decrescente

$[0; \frac{2}{3}]$ f è decrescente

$[\frac{2}{3}; +\infty[$ f è crescente

In $x_0 = 0$ la funzione non ha né max né min relativo, ma è un punto di flesso a tangente orizzontale

In $x_0 = \frac{2}{3}$ la funzione ha un punto di min. relativo

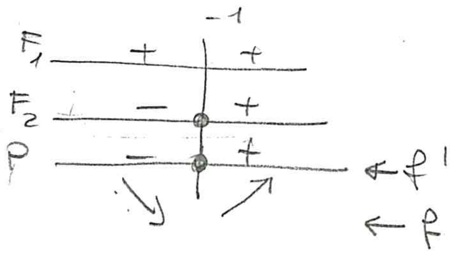
ES $\boxed{f(x) = x \cdot e^x}$ $\quad D: \mathbb{R}$

Sol: $f'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = \underbrace{e^x}_{\geq 0}(1+x)$

Studio il segno di $f'(x)$ cioè valuto $f'(x) \geq 0$

$e^x(1+x) \geq 0$ $\quad F_1: e^x > 0$ sempre $(\forall x \in \mathbb{R})$

$F_2: 1+x \geq 0 \quad x \geq -1$



$]-\infty; -1]$ f decrescente

$[-1; +\infty[$ f crescente

In $x_0 = -1$ la funzione ha un punto di min. relativo

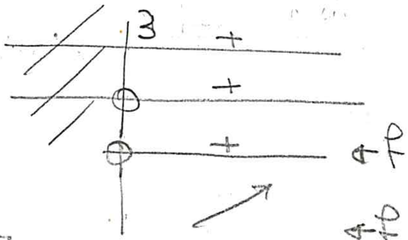
ES $\boxed{f(x) = \sqrt{x-3}}$ $\quad D: x \geq 1$

Sol $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

Studio il segno di $f'(x)$ cioè valuto $f'(x) \geq 0$

$\frac{1}{2\sqrt{x-3}} \geq 0$ $\quad$ N: 1 sempre +

D: $2\sqrt{x-3} > 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} > 0 \quad x-3 > 0 \quad x > 3$



f è crescente in $[1, +\infty[$

f non ha punti di max o min relativo

Esercizio [Esame]

Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza e i punti di massimo e minimo relativo della funzione $f(x) = \ln x - \frac{3}{2}x$

Soluzione

Dominio $D: x > 0$

Calcolo $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{2} = \frac{2-3x}{2x}$

Studio il segno di $f'(x)$ cioè valuto $f'(x) \geq 0$

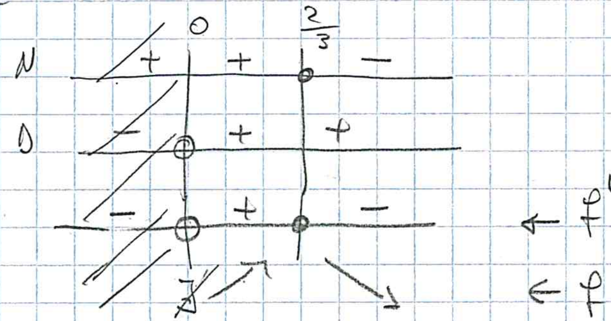
$\frac{2-3x}{2x} \geq 0$

$N \geq 0$ $\quad 2 - 3x \geq 0 \quad -3x \geq -2$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} \leq \frac{2}{3}$$

$$x \leq \frac{2}{3}$$

$D > 0 \quad \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} > \frac{0}{2} \quad x > 0$



questa parte va eliminata per il dominio

in $]0; \frac{2}{3}]$ f è crescente

in $[\frac{2}{3}; +\infty[$ f è decrescente

in $x_0 = \frac{2}{3}$ la funzione ha un punto di massimo relativo

Esercizio [Esame 2011]

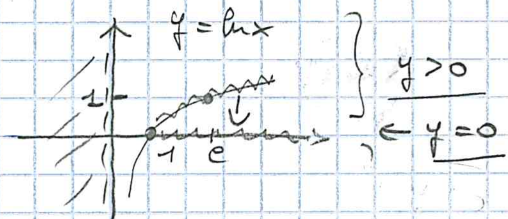
Considerata la funzione $f(x) = x(\ln x - 1)$
si calcolino gli intervalli di crescenza e decrescenza e
i punti di massimo e minimo relativi.

Soluzione

- Dominio D: $x > 0$
- Calcolo $f'(x) = 1 \cdot (\ln x - 1) + \overset{1}{\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}} = \ln x - \cancel{1} + \cancel{1} = \ln x$
- Studio il segno di $f'(x)$ cioè valuto

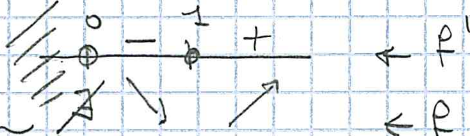
$f'(x) \geq 0$ → risolvo graficamente usando il grafico di $y = \ln x$

$\ln x \geq 0$



da cui ottengo $x \geq 1$

Quindi



questa parte la escluso per il dominio

in $]0; 1]$ f è decrescente

in $[1; +\infty[$ f è crescente

in $x_0 = 1$ la funzione ha un punto di minimo relativo

Esercizio [Esame 2009]

Si calcolino gli intervalli in cui la funzione $f(x) = (x-2)\sqrt{x-1}$ è crescente o decrescente

derivate composte

Soluzione

Dominio $D: x-1 \geq 0 \implies x \geq 1$

Calcolo $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x-1} + (x-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}}$

$$= \frac{2(\sqrt{x-1})^2 + x - 2}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{2x-2+x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-1}}$$

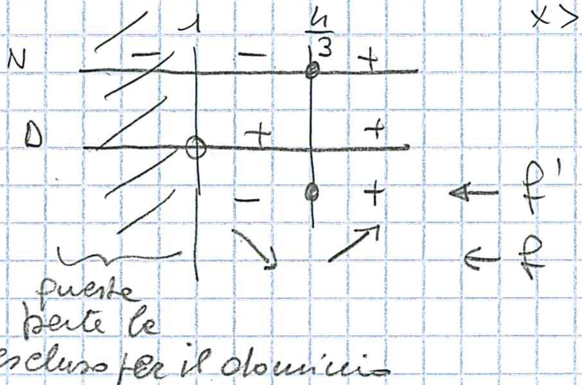
Studio il segno di $f'(x)$ cioè voluto

$f'(x) \geq 0 \qquad \frac{3x-4}{2\sqrt{x-1}} \geq 0 \qquad N \geq 0 \quad 3x-4 \geq 0 \quad x \geq \frac{4}{3}$

$D > 0 \quad \frac{\cancel{2}\sqrt{x-1}}{\cancel{2}} > \frac{0}{2} \implies \sqrt{x-1} > 0$

$x - 1 > 0$

$x > 1$



in $[1; \frac{4}{3}]$ f è decrescente

in $[\frac{4}{3}; +\infty[$ f è crescente

in $x_0 = \frac{4}{3}$ la funzione ha un punto di minimo relativo