[Es n 6 foglio Achilles 10.12.2013]

Esercizio riassuntivo

Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) risolvere il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan
($\underline{x}$ denota il vettore colonna delle incognite x_1, x_2, x_3)

b) calcolare A^{-1} e $A^{-1}\underline{b}$

c) calcolare (se possibile) AB e BA

Soluzione a) $x_1 = -\frac{13}{3}$ $\quad x_2 = \frac{22}{3}$ $\quad x_3 = \frac{-8}{3}$

Soluzione b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

(importante $\Rightarrow$) $A^{-1}\underline{b} = \underset{\uparrow \text{ soluzioni}}{\underline{x}}$

cioè $A^{-1}\underline{b} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ \frac{22}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$

perché per definizione di inversa vale $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
quindi da
$A\underline{x} = \underline{b}$ moltiplicando entrambi i membri per A^{-1} a sx si ha

$A^{-1}(A\underline{x}) = A^{-1}\underline{b}$

$\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

$I\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ ma $I\underline{x} = \underline{x}$
quindi
$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

soluzione c) AB non è definita

$BA = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Soluzione

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ R_2-3R_1 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ R_3+R_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} \\ -R_2 \\ \frac{1}{3}R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & +1 & -1 & +10 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ R_2+R_3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{22}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} R_1-R_2 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 1 & 0 & +\frac{22}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{array}\right)$$

quindi $x_1 = -\frac{13}{3}$; $x_2 = \frac{22}{3}$; $x_3 = -\frac{8}{3}$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ R_2-3R_1 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

stessi passaggi della soluzione (a)

$$\begin{array}{c} \\ \\ R_3+R_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ -R_2 \\ \frac{1}{3}R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & +3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} \\ R_2+R_3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} R_1-R_2 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$A^{-1}\underline{b} = \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{3} \\ \frac{22}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

IMPORTANTE

soluzioni del sistema

c) $\underset{3\times 3}{A} \cdot \underset{2\times 3}{B} = \ldots$

$3 \neq 2$ prodotto non definito

$$\underset{2\times 3}{B} \cdot \underset{3\times 3}{A} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

$3 = 3$ prodotto ben definito

Esercizio riepilogativo [Es n 6 file Achilles 17.12.2013]

Date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

a) risolvere il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan ($\underline{x}$ denota il vettore colonna delle incognite x_1, x_2, x_3)

b) calcolare A^{-1}

c) calcolare, se ciò è possibile, $b'b$ e bb' dove b' è la trasposta di $\underline{b}$

Soluzione a) $x_1 = 1$
$x_2 = 1$
$x_3 = 1$

Soluzione b) A è una matrice invertibile e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

soluzione c) $b'b = [20]$

$$b'b' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Vedere dopo lo svolgimento

6/ Date $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

ES n 6
file Achilles
17/12/2013

a) Risolvere il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ con l'algoritmo di Gauss - Jordan

Soluzione

$$A|\underline{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow R_2 = R_2 + R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow R_3 = R_3 - R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

IMPORTANTE

$$\Rightarrow \text{Scambio } R_3 \text{ con } R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow R_3 = \frac{1}{2} R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow R_2 = R_2 - R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow R_1 = R_1 - R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$ soluzione $(1; 1; 1)$

b) Calcolare A^{-1} (*) (NB non fare scambi di righe)

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{r} \\ R_2+R_1 \to \\ R_3-R_1 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

NB è nullo e non lo posso considerare come pivot
allora sommo 2 righe in modo che sia $\neq 0$
(non posso fare scambi di righe)

$$R_2+R_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim R_3-R_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1+\frac{1}{2}R_3 \\ R_2+\frac{3}{2}R_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{2}R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

gli elementi sulla diagonale sono $\neq 0$ quindi la matrice è invertibile

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

(*) prima calcolo det A poi A^{-1}

NB $\det A = \det \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$= 0 + 0 - 1 - 0 - 1 + 0 = -2 \neq 0 \Rightarrow$ quindi la matrice è invertibile

- Verifica che A^{-1} è proprio l'inversa di A

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{ok}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{ok}$$

Calcolare, se possibile

$$\underline{b}' \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \end{bmatrix}$$

Questi sono casi importanti.

NB

$b' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$1 \times 3 \cdot 3 \times 1 \rightarrow 1 \times 1$

il prodotto <u>è possibile</u>

$$b \cdot b' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$3 \times 1 \cdot 1 \times 3 \rightarrow 3 \times 3$

il prodotto <u>è possibile</u>