Es. Calcolare i punti di max e min assoluti della funzione $f(x)=\sqrt{(4-x)(x-1)}$ nel suo insieme di definizione

derivate composte

Soluzione

$$f(x)=\sqrt{(4-x)(x-1)}=\sqrt{4x-4-x^2+x}=\sqrt{-x^2+5x-4}$$

$D_f:\ -x^2+5x-4\geq 0$ uso la parabola

$$-x^2+5x-4=0$$
$$\underbrace{(4-x)}_{=0}\underbrace{(x-1)}_{=0}=0$$

$4-x=0 \quad x=4$

$x-1=0 \quad x=1$

$$+1\leq x\leq 4$$

quindi $D_f:\ [+1;4]$ intervallo limitato e chiuso per cui vale il T. Weierstrass

- Calcolo $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}\cdot(-2x+5)=\frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}$$

- Cerco i punti a derivata nulla

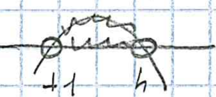
$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}=0 \Rightarrow -2x+5=0 \quad \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}}=\frac{-5}{-2} \quad x=\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow x_1=\frac{5}{2}$ punto a derivata nulla

- Cerco i punti "non derivabili"

$D':\ -x^2+5x-4>0$ stessi passaggi di sopra

$D'=(+1,4)$



quindi

$x_2=+1$ e $x_3=4$ non punti $\notin D'$ e $\in D$

quindi sono punti "non derivabili" (cioè dove non esiste f' ma esiste f)

- Tabella per trovare max / min assoluto

	x_0	$f(x_0)$
punti a derivata nulla	$x_0=\frac{5}{2}$	$f\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{\left(4-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-1\right)}=\sqrt{\frac{8-5}{2}\cdot\frac{5-2}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\boxed{\frac{3}{2}}$
punti non derivabili	$x_1=+1$	$f(+1)=\sqrt{(4+1)(+1-1)}=\sqrt{5\cdot 0}=\boxed{0}$
	$x_2=4$	$f(4)=\sqrt{(4-4)(4-1)}=\sqrt{0\cdot 3}=\boxed{0}$
estremi	$a=+1$	già calcolato
	$b=4$	già calcolato

Quindi
- $\frac{3}{2}$ è il valore di max assoluto nel punto $x_0=\frac{3}{2}$
- 0 è il valore di min assoluto nei punti $x_0=1$ e $x_0=4$

controllo che siano tutti valori $\in [1;4]$ altrimenti li scarto

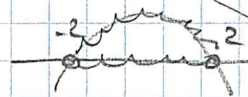
Si determinino il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ nel suo dominio di definizione

Derivata di composte

Soluzione

- $D_f: 4-x^2 \geq 0$ uso la parabola

$4-x^2=0$
$-x^2=-4$
$x^2=4$
$x=\pm 2$



$-2 \leq x \leq 2$

$D_f: [-2; 2]$ intervallo limitato e chiuso quindi è valido il T. Weierstrass

- Calcolo $f'(x)=\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}\cdot(-\cancel{2}x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

- Cerco i punti a derivata nulla

$f'(x)=0 \quad \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \quad -x=0 \quad \boxed{x=0}$

- Cerco i punti non derivabili:

$D' = 4-x^2>0$ come sopra esclusi gli estremi $-2<x<2$

$D'=(-2, 2) \neq D$ quindi $\boxed{x_0=-2}$ e $\boxed{x=2}$

sono punti non derivabili (esiste la funzione, ma non la derivata)

- Tabella finale

	x_0	$f(x_0)$
punti a derivata nulla	$x_1=0$	$f(0)=\sqrt{4-0^2}=\boxed{2}$
punti non derivabili	$x_2=-2$	$f(-2)=\sqrt{4-(-2)^2}=\boxed{0}$
	$x_3=2$	$f(2)=\sqrt{4-(2)^2}=\boxed{0}$
estremi	$a=-2$	già calcolato
	$b=2$	già calcolato

Quindi:

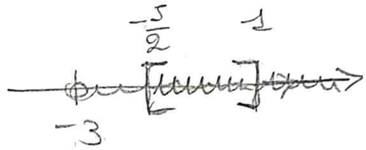
2 è il valore di max assoluto nel punto $x_0=0$

0 è il valore di min assoluto nel punto $x_0=-2$ e nel punto $x_0=2$

(ESAME DEL 2011) 7

55 Si trovi il massimo e il minimo assoluto di $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$ in $\left[-\frac{5}{2}; 1\right]$

Sol. Dominio: $\begin{cases} x+3>0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-3 \\ x \neq -3 \end{cases} \Rightarrow D: (-3; +\infty)$



Calcolo le derivate con le regole del quoziente

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{x+3}} \cdot 1 \cdot (\cancel{x+3}) - \ln(x+3) \cdot 1}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

1) cerco i punti a derivata nulla cioè $f'(x) = 0$

$$\frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln(x+3) = 0$$

$-\ln(x+3) = -1$

$\ln(x+3) = 1$

usando la definizione di log

$e^1 = x+3$

$x = e - 3 \Rightarrow \boxed{x_0 = e - 3} \sim -0{,}3 \in \left[-\frac{5}{2}; 1\right]$

punto a tg orizzontale

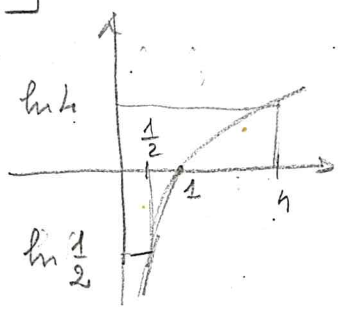
2) cerco i punti non derivabili confrontando D con D':

$D' = \begin{cases} x+3>0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > -3 \Rightarrow D' = (-3, +\infty) = D$

non ci sono punti non derivabili

3) Valuto il valore della funzione nei punti critici trovati (compresi gli estremi dell'intervallo $\left[-\frac{5}{2}; 1\right]$)

	x	$y = f(x)$
punti a derivata nulla	$x_0 = e - 3$	$y = \frac{\ln(e - \cancel{3} + \cancel{3})}{e - \cancel{3} + \cancel{3}} = \frac{1}{e} > 0 \sim 0{,}37$
punti non derivabili	$\nexists$	
estremi	$a = -\frac{5}{2}$	$y = \frac{\ln\left(-\frac{5}{2}+3\right)}{-\frac{5}{2}+3} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \ln\frac{1}{2} < 0$
	$b = 1$	$y = \frac{\ln(1+3)}{1+3} = \frac{\ln 4}{4} = \frac{1}{4}\ln 4 > 0 \sim 0{,}35$



Quindi $\frac{1}{e}$ è il valore del max assoluto nel punto $x_0 = e-3$

e $2\ln\frac{1}{2}$ è il valore del min assoluto nel punto $x_0 = -\frac{5}{2}$

ES Trovare il max e il min assoluto della funzione $f(x) = -\sqrt{x+1}$ nell'intervallo $[-1, 3]$ e rappresentarne il grafico

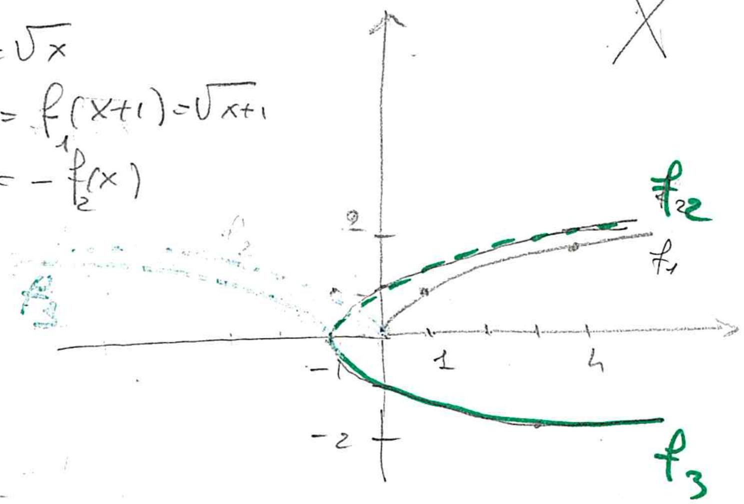
Sol $\quad f(x) = -\sqrt{x+1}$

$f_1 = \sqrt{x}$

$f_2 = f_1(x+1) = \sqrt{x+1}$

$f_3 = -f_2(x)$

D: $x+1 \geq 0 \quad x \geq -1$



Calcolo $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x+1}}$.

1) Cerco i punti $f'(x) = 0$ cioè $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = 0 \Rightarrow +1 = 0$ impossibile

$\Rightarrow$ non trovo punti con derivata nulla

2) cerco i punti non derivabili

D': $x+1 > 0 \quad x > -1$

Quindi $D \neq D'$ $\quad x_0 = -1 \in D'$, $\notin D$ $\Rightarrow x_0 = -1$ è un punto non derivabile

3) Cerco il max e il min assoluto

	x_0	$f(x)$	
punto non derivabile e anche estremo	$a = x_0 = -1$	$-\sqrt{-1+1} = 0$	$\Rightarrow$ 0 valore di max assoluto nel punto $x_0 = -1$
estremo	$b = 3$	$-\sqrt{3+1} = -\sqrt{4} = -2$	$\Rightarrow$ -2 valore di min assoluto nel punto $x_0 = 3$
punti a derivate nulle	/		

Es) Trovare i valori di max e min assoluto delle funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$ nell'intervallo $[-3;3]$ (3)

Sol $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$ $D: \mathbb{R}$

$f(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 2x = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$

1) Cerco i punti per cui $f'(x) = 0$

$\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 0}$ punto critico

2) Cerco i punti non derivabili.

$D' : x^2-1 \neq 0 \quad / \quad x^2 \neq 1 \quad x \neq \pm 1$

$\Rightarrow D \neq D'$ e $\boxed{x_1 = +1}$; $\boxed{x_2 = -1}$ sono punti non derivabili

3) Cerco il max e il min assoluto

x_0	$f(x)$
0	$\sqrt[3]{0-1} = \sqrt[3]{-1} = \boxed{-1}$
1	$\sqrt[3]{1^2-1} = \sqrt{0} = 0$
-1	$\sqrt[3]{(-1)^2-1} = \sqrt{0} = 0$
$a = -3$	$\sqrt[3]{(-3)^2-1} = \sqrt[3]{9-1} = \sqrt[3]{8} = \boxed{2}$
$b = 3$	$\sqrt[3]{3^2-1} = \sqrt[3]{9-1} = \sqrt[3]{8} = \boxed{2}$

Quindi -1 è il valore di min assoluto

2 è il valore di max assoluto

ESAME

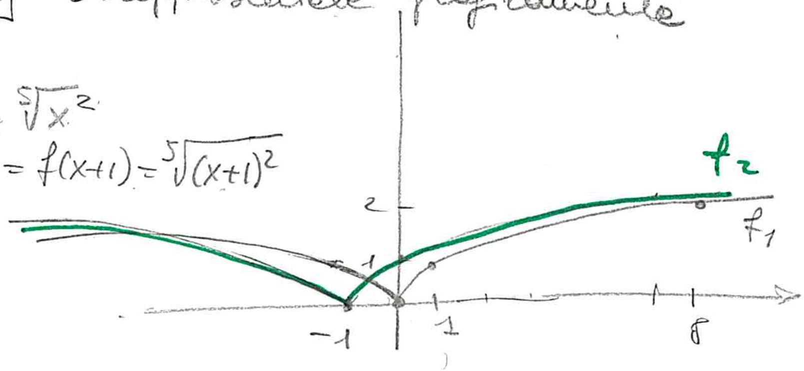
ES Trovare il valore di minimo e massimo assoluto della funzione $f(x)=\sqrt[5]{(x+1)^2}$ nell'intervallo $[-9;0]$ e rappresentarla graficamente

Sol

$D: \mathbb{R}$

$f_1(x)=\sqrt[5]{x^2}$

$f_2(x)=f(x+1)=\sqrt[5]{(x+1)^2}$



Calcolo $f'(x)$

$f(x)=(x+1)^{\frac{2}{5}}$

$f'(x)=\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{2}{5}-1}=\frac{2}{5}(x+1)^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5\sqrt[5]{(x+1)^3}}$

1) Cerco i punti a derivata nulla : $f'(x)=0$

cioè $\frac{2}{5\sqrt[5]{(x+1)^3}}=0 \Rightarrow 2=0$ impossibile

2) Cerco i punti non derivabili:

D': $x+1\neq 0 \quad x\neq -1 \Rightarrow D\neq D' \Rightarrow x_0=-1$ è un punto dove esiste la funzione ma non esiste la derivata $\Rightarrow$ punto non derivabile

3) Cerco il max e il min assoluto

	x_0	$f(x)$
x_0	-1	$\sqrt[5]{(-1+1)^2}=\boxed{0}$
$a=$	-9	$\sqrt[5]{(-9+1)^2}=\sqrt[5]{(-8)^2}=\sqrt[5]{(2^3)^2}=\sqrt[5]{2^6}=\boxed{2\cdot\sqrt[5]{2}}$
$b=$	0	$\sqrt[5]{(0+1)^2}=\sqrt[5]{1}=1$

Quindi 0 è il min assoluto e $2\cdot\sqrt[5]{2}$ è il max assoluto