Esercizio [Esame] [derivata composta]

Trovare la retta tangente al grafico della funzione

$f(x) = (x-2)\sqrt{x-1}$ nel punto $x_0 = 2$

Soluzione Dominio $D: x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$x_0 = 2$

$y_0 = f(x_0) = f(2) = \overbrace{(2-2)}^{=0}\sqrt{2-1} = 0$

$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{x-1} + (x-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 = \sqrt{x-1} + \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}} =$

$= \frac{\sqrt{x-1} \cdot 2 \cdot \sqrt{x-1} + x - 2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2(\sqrt{x-1})^2 + x - 2}{2\sqrt{x-1}}$

$= \frac{2x-2+x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-1}}$

$f'(x_0) = f'(2) = \frac{3 \cdot 2 - 4}{2\sqrt{2-1}} = \frac{6-4}{2\sqrt{1}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = 1$

Quindi la retta tangente in $x_0 = 2$ è

$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$y - 0 = 1(x-2)$

$y = x - 2$

(i) trovare la retta tangente al profilo della funzione $f(x) = x\,e^{-x}$ nel punto di ascissa -1

(ii) Calcolare della stessa funzione gli intervalli di crescenza e decrescenza

Derivate composte

Soluzione

D_f: $\mathbb{R}$

- $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x)$

(i) • cerco la retta tangente $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ con $x_0 = -1$

$$y_0 = f(x_0) = f(-1) = -1\,e^{-(-1)} = -e$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = e^{-(-1)}(1-(-1)) = e^1 \cdot 2 = 2e$$

quindi $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y - (-e) = 2e(x - (-e))$$

$$y + e = 2e(x + e)$$

$$y = 2ex + 2e^2 - e$$

(ii) • partendo da $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ già calcolata

- Studio il segno di $f'(x)$ cioè

$f'(x) \geq 0$ $\qquad \underbrace{e^{-x}}_{F_1}\underbrace{(1-x)}_{F_2} \geq 0$ $\qquad F_1 \geq 0 \quad e^{-x} \geq 0$ sempre $\forall x \in \mathbb{R}$

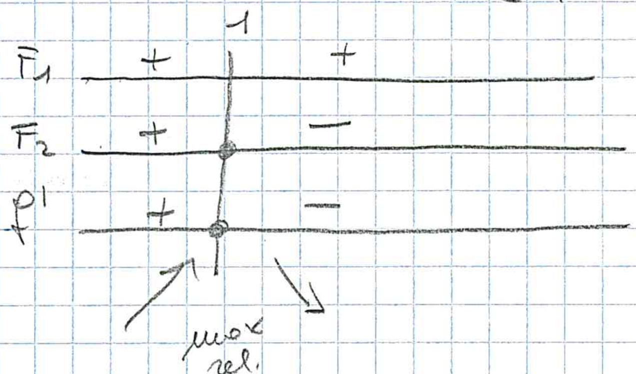
$F_2 \geq 0 \quad 1 - x \geq 0 \quad -x \geq -1$

$x \leq 1$

in $(-\infty; 1]$ la funzione è crescente

in $[1, +\infty)$ la funzione è decrescente

[in $x_0 = 1$ la funzione ha un punto di max relativo]



(i) Trovare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \ln(4x - x^2)$ nel punto di ascissa 2

(ii) Calcola della stessa funzione gli intervalli di crescenza e decrescenza e se ci sono classifica i punti a derivata nulla

derivate composte

Soluzione

- D_f: $4x - x^2 \geq 0$ uso la parabola $\cap$

$4x - x^2 = 0$

$x(4 - x) = 0$

$x = 0$

$4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$

D_f: $(0; 4)$

$0 < x < 4$

- Calcolo $f'(x) = \dfrac{1}{4x - x^2} \cdot (4 - 2x) = \dfrac{4 - 2x}{4x - x^2}$

(i) • cerco la retta tg $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ con $x_0 = 2$

$y_0 = f(x_0) = f(2) = \ln(4 \cdot 2 - 2^2) = \ln 4$

$f'(x_0) = f'(2) = \dfrac{4 - 2(2)}{4(2) - (2)^2} = 0 \Rightarrow$ NB $x_0 = 2$ è un punto a derivata nulla quindi a tangenza orizzontale

quindi $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$y - \ln 4 = 0(x - 2)$

$y = \ln 4$

(ii) • partendo da $f'(x) = \dfrac{4 - 2x}{4x - x^2}$

Studio il segno di $f'(x)$ cioè

$f'(x) \geq 0$ $\quad \dfrac{4 - 2x}{4x - x^2} \geq 0$ $\quad N \geq 0$ $\quad 4 - 2x \geq 0$ $\quad -2x \geq -4$ $\quad \dfrac{2x}{2} \leq \dfrac{4}{2}$ $\quad x \leq 2$

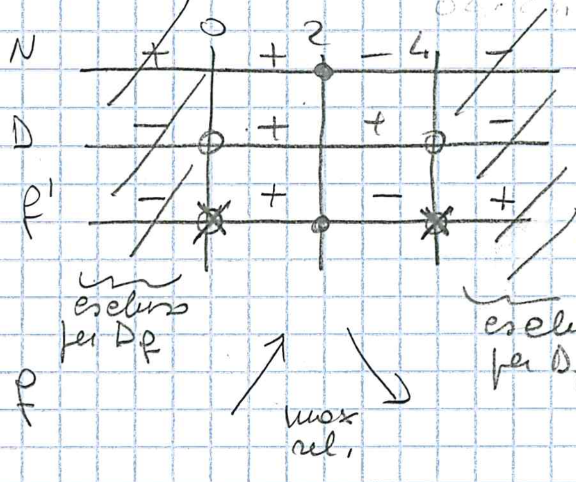
$D > 0$ $\quad 4x - x^2 > 0$ parabola come sopra $0 < x < 4$

quindi

in $(0; 2]$ f è crescente

in $[2; 4)$ f è decrescente

in $x_0 = 2$ c'è un punto di max relativo



Es Determinare l'espressione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sqrt{-x^2+3x-1}$ nel punto di ascissa 2

Soluzione

$$f(x) = \sqrt{-x^2+3x-1}$$

- $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x^2+3x-1}} \cdot (-2x+3) = \frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-1}}$$

- $x_0 = 2$

$$y_0 = f(x_0) = f(2) = \sqrt{-(2)^2+3(2)-1} = \sqrt{-4+6-1} = \sqrt{1} = 1$$

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{-2(2)+3}{2\sqrt{-(2)^2+3(2)-1}} = \frac{-4+3}{2\cdot 1} = \frac{-1}{2}$$

retta tg al grafico di $f(x)$ in $x_0 = 2$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{f(x_0)}}{y - y_0} = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$