Esame A

20. 1. 2015

Matematica – C. d. L. in Produzioni Animali e Controllo della Fauna Selvatica

Non è permesso l'utilizzo di libri, telefoni cellulari o appunti.

1. (a) Determinare quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ che contengono esattamente 5 elementi.
   (b) Quanti dei sottoinsiemi determinati al punto (a) contengono il numero 3?

2. Disegnare il grafico della funzione $y = \cos x$ e, a partire da esso, quello della funzione $y = \cos(3x) + \frac{1}{2}$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

   Qual'è il periodo di quest'ultima funzione?

3. Determinare dominio ed eventuali asintoti orizzontali e verticali della funzione:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 1}.$$

4. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \frac{x^2-3}{x+2}$ nel punto di ascissa $x = -1$.

5. Un piatto di minestra bollente (cioè con temperatura $T(0) = 100°$ viene posato su di un tavolo in una stanza alla temperatura di 20°. Sapendo che dopo 10 minuti la temperatura della minestra è di 50° e che la temperatura $T(t)$ della minestra varia secondo la legge di raffreddamento di Newton:

$$T(t) = T_A + (T(0) - T_A)e^{-kt},$$

   ove k è una costante e $T_A = 20°$ è la temperatura dell'ambiente, determinare la temperatura della minestra dopo 20 minuti.

6. Calcolare il seguente integrale indefinito, con il metodo di integrazione per parti: $\int x^8 \log x \, dx$.

7. Determinare tutte le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

ESAME B

20. 1. 2015

Matematica – C. d. L. in Produzioni Animali e Controllo della Fauna Selvatica

Non è permesso l'utilizzo di libri, telefoni cellulari o appunti.

1. (a) Determinare quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ che contengono esattamente 6 elementi.
   (b) Quanti dei sottoinsiemi determinati al punto (a) contengono il numero 8?

2. Disegnare il grafico della funzione $y = \operatorname{sen} x$ e, a partire da esso, quello della funzione $y = \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}$ nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

   Qual'è il periodo di quest'ultima funzione?

3. Determinare dominio ed eventuali asintoti orizzontali e verticali della funzione:

$$y = \log_{\frac{3}{4}} \frac{x^2 - 6x + 9}{x + 2}.$$

4. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \frac{x^2-5}{x+3}$ nel punto di ascissa $x = -2$.

5. Una pietanza viene tolta da un forno alla temperatura $T(0) = 200°$ e viene posata su di un tavolo in balcone alla temperatura di $10°$. Sapendo che dopo 10 minuti la temperatura della pietanza è di $120°$ e che la temperatura $T(t)$ della pietanza varia secondo la legge di raffreddamento di Newton:

$$T(t) = T_A + (T(0) - T_A)e^{-kt},$$

   ove k è una costante e $T_A = 10°$ è la temperatura dell'ambiente, determinare la temperatura della pietanza dopo 20 minuti.

6. Calcolare il seguente integrale indefinito, con il metodo di integrazione per parti: $\int x^5 \log x \, dx$.

7. Determinare tutte le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ x + y = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

Esercizio

a) Determinare quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ che contengono esattamente 5 elementi

b) Quanti dei sottoinsiemi determinati nel punto (a) contengono il numero 3?

Soluzione

a) i sottoinsiemi sono costituiti da elementi <u>non</u> <u>ordinati</u> e <u>non</u> <u>ripetuti</u> quindi

$$C_{9,5} = \frac{P_{9,5}}{P_5} = \frac{\overbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}^{5 \text{ fattori}}}{5!} = \frac{9 \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \overset{2}{\cancel{6}} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 9 \cdot 7 \cdot 2 = \underline{126}$$

con $n = 9$ (numero totale degli elementi)
$k = 5$ (numero degli elementi che formano i sottoinsiemi

b) $\{\underbrace{3, \_, \_, \_, \_}\}$

$$\overset{\shortparallel}{C}_{8,4} = \frac{P_{8,4}}{P_4} = \frac{\overbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}^{4 \text{ fattori}}}{4!} = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \overset{2}{\cancel{6}} \cdot \cancel{5}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = \underline{70}$$

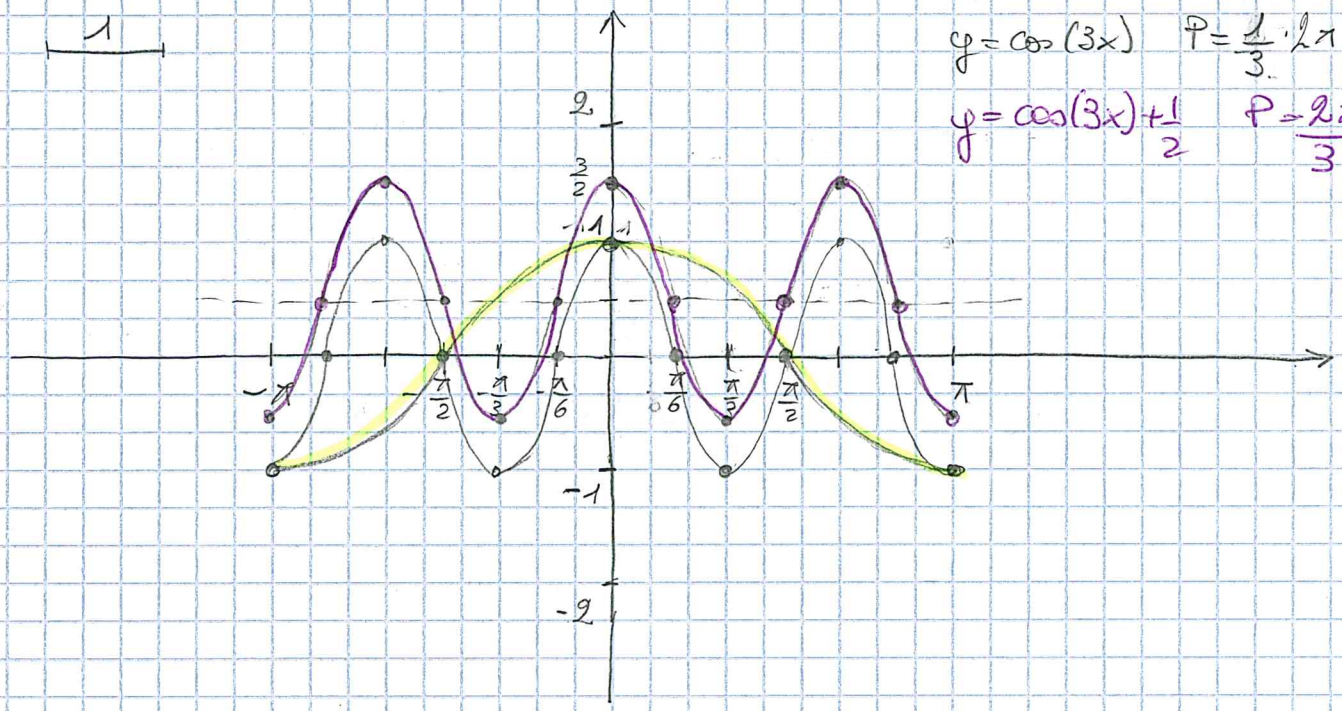
non 9 elementi perché l'elemento 3 è già usato e non si può ripetere quindi il numero totale di elementi si riduce da 9 a 8

Esercizio

Disegnare il grafico della funzione $y = \cos x$ e, a partire da esso, quello della funzione $y = \cos(3x) + \frac{1}{2}$ nell'intervallo $[-\pi; \pi]$

Qual è il periodo di quest'ultima funzione?

Soluzione



$y = \cos x$ periodo $P = 2\pi$

$y = \cos(3x)$ $P = \frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi$

$y = \cos(3x) + \frac{1}{2}$ $P = \frac{2\pi}{3}$

Esercizio

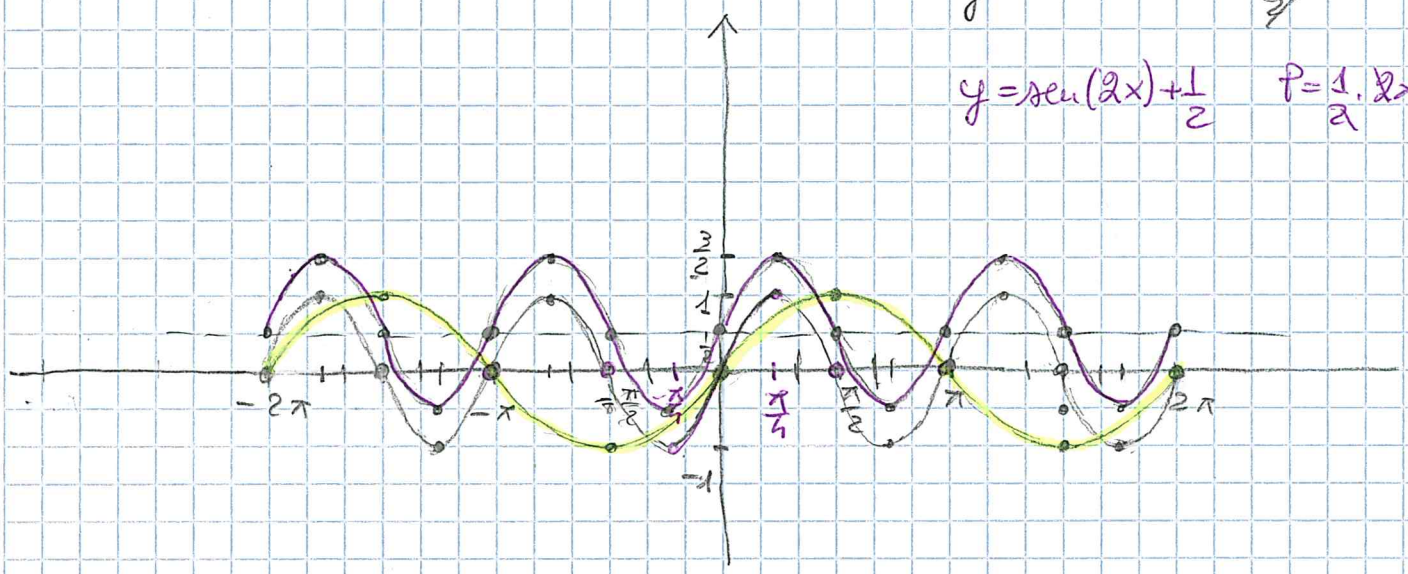
Disegnare il grafico della funzione $y = \operatorname{sen} x$ e, a partire da esso, quello della funzione $y = \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}$ nell'intervallo $[-2\pi; 2\pi]$

Qual è il periodo di quest'ultima funzione?

Soluzione

1

	periodo
$y = \operatorname{sen} x$	$P = 2\pi$
$y = \operatorname{sen}(2x)$	$P = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi = \pi$
$y = \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}$	$P = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$



Esercizio

Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali e verticali della funzione

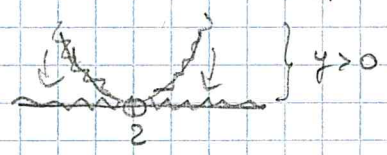
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-4x+4}{x+1}$$

Soluzione

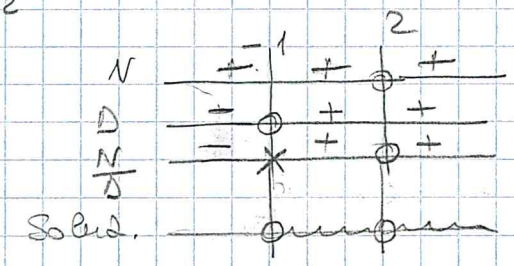
- Dominio $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{x+1} > 0 \\ \cancel{x+1 \neq 0} \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{x^2-4x+4}{x+1} > 0$

$N \geq 0 \quad x^2-4x+4 > 0$ uso la parabola $\cup$

$x^2-4x+4=0 \qquad x_{1,2} = \dfrac{+4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$



$D > 0 \quad x+1 > 0 \quad x > -1$



Dominio: $-1 < x < 2 \ \vee \ x > 2$

(oppure $x > -1 \ \wedge \ x \neq 2$)

- cerco gli asintoti orizzontali

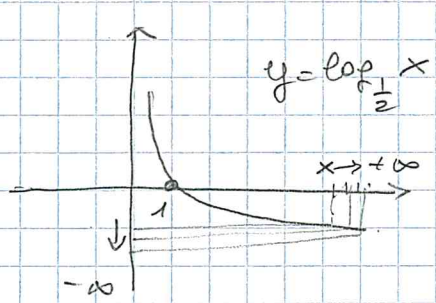
$$\lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-4x+4}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x =$$

$$= \log_{\frac{1}{2}}(+\infty) = -\infty$$

quindi non ha asintoti orizzontali

$$\cancel{\lim_{x \to -\infty}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-4x+4}{x+1}$$

non ha senso per il dominio



Cerco gli asintoti <u>verticali</u>

$$\lim_{x\to -1^+} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-4x+4}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \log_{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^2-4(-1)+4}{(-1)+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1^+} \log_{\frac{1}{2}} \frac{9}{0^+} =$$

$-0{,}9$ $\qquad -0{,}9+1=0^+$

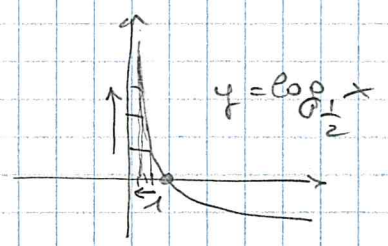
$$= \log_{\frac{1}{2}}(+\infty) = -\infty \Longrightarrow x=-1$$

è asintoto verticale

$$\lim_{x\to 2^-} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2-4x+4}{x+1} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{(2)^2-4(2)+4}{2+1}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \frac{4-8+4}{3}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} 0^+ = +\infty$$



quindi $x=2$ è asintoto verticale

Non ho bisogno di calcolare anche $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ perché ho già potuto concludere che $x=2$ è asintoto verticale

NB $\cancel{\lim_{x\to -1^-}}$ $f(x)$ non ha senso per il dominio

Esercizio

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = \frac{x^2-3}{x+2}$ nel punto di ascissa $x=-1$

Soluzione

- Dominio $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$
- calcolo la derivata prima

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)-(x^2-3)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2+3}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

L'equazione della retta tangente in x_0 è

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x-x_0) \qquad \text{con } x_0=-1$$

$$y_0 = f(x_0) = f(-1) = \frac{(-1)^2-3}{(-1)+2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = \frac{(-1)^2+4(-1)+3}{(-1+2)^2} = \frac{1-4+3}{1} = 0$$

quindi

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x-x_0) \quad \text{diventa}$$

$$y-(-2) = 0\cdot(x-(-1))$$

$$y+2=0$$

$$y=-2$$

Esercizio

Un piatto di minestra bollente (cioè con temperatura $T(0)=100°$) viene posato su un tavolo in una stanza alla temperatura di 20°.
Sapendo che dopo 10 minuti la temperatura della minestra è di 50° e che la temperatura $T(t)$ della minestra varia secondo la legge di raffreddamento di Newton:

$$T(t) = T_A + (T(0) - T_A)\, e^{-kt}$$

ove k è una costante e $T_A = 20°$ è la temperatura dell'ambiente, determinare la temperatura della minestra dopo 20 minuti

Soluzione È necessario ricavare prima il valore di k:

$T_0 = 100°$ $\qquad T_A = 20°$

$t = 10'$ $\Rightarrow$ $T(10') = 50°$ da questa relazione ricavo il valore di k

$$T(t) = T_A + (T_0 - T_A)\, e^{-kt}$$

in $t=10$ $\quad 50° = 20° + (100° - 20°)\, e^{-k \cdot 10'}$

$$50 = 20 + 80\, e^{-k \cdot 10}$$

$$\frac{50-20}{80} = \frac{\cancel{80}\, e^{-k \cdot 10}}{\cancel{80}}$$

$$\frac{3\cancel{0}}{8\cancel{0}} = e^{-k \cdot 10}$$

$$e^{-k \cdot 10} = \frac{3}{8}$$ uso la definizione di logaritmo

$$-k \cdot 10 = \ln\left(\frac{3}{8}\right)$$

$$\frac{\cancel{-}k \cdot \cancel{10}}{\cancel{-10}} = \ln\left(\frac{3}{8}\right) \cdot \frac{1}{-10}$$

$$k = -\frac{1}{10} \ln \frac{3}{8} = 0{,}098 \Rightarrow T(t) = T_A + (T_0 - T_A)\, e^{-0{,}098t}$$

Ora cerco la temperatura dopo 20 minuti cioè calcolo

$$T(20') = 20° + (100° - 20°)\, e^{-0{,}098 \cdot 20} =$$

$$= 20 + 80 \cdot 0{,}141 = 31{,}27°$$

Esercizio

Calcolare usando il metodo di integrazione per parti il seguente integrale indefinito:

$$\int x^8 \ln x \, dx$$

Soluzione

$$\int f'(x) g(x) \, dx = \underbrace{f(x)}_{\int f'(x)} g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx$$

$$\int \underbrace{x^8}_{f'(x)} \underbrace{\ln x}_{g(x)} dx = \underbrace{\frac{x^9}{9}}_{f} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{\frac{x^{\cancel{9}\,8}}{9}}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{x}}}_{g'} dx =$$

$$= \frac{x^9}{9} \ln x - \frac{1}{9} \int x^8 \, dx =$$

$$= \frac{x^9}{9} \ln x - \frac{1}{9} \frac{x^9}{9} + c$$

Esercizio

Determinare tutte le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

Soluzione uso il metodo di risoluzione di Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{R_3 + 3R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right] \underset{\substack{-R_2 \\ \frac{1}{4}R_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}_{2}} \end{array}\right]$$

Tornando al sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 & \Rightarrow x = 1 - y \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y - z = -1 & \Rightarrow y = -1 + z \Rightarrow y = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Quindi la soluzione è

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$