Calcolo combinatorio: Integrazione

Permutazioni cicliche

Se gli elementi di una permutazione sono disposti in maniera circolare, in modo che non sia possibile individuare il primo e l ultimo elemento, si parla di permutazione ciclica o in linea chiusa; il numero delle permutazioni cicliche di n oggetti è:

$$(n-1)!$$

Esempio:

In quanti modi diversi quattro persone possono sedersi attorno ad un tavolo? Tale numero è $3! = 6$.

Dimostrazione della formula di Stifel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Possiamo dividere le combinazioni $C_{n,k}$ in due gruppi disgiunti: fissiamo un alemento e nel primo gruppo mettiamo tutte le combinazioni che contengono tale elemento (in tutto $C_{n-1,k-1} = \binom{n-1}{k-1}$), nel secondo gruppo mettiamo tutte le combinazioni che non contengono tale elemento (in tutto $C_{n-1,k-1} = \binom{n-1}{k-1}$),

Dimostrazione combinatoria del teorema del binomio

Vogliamo dimostrare che:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Cconsideriamo il prodotto

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_n+y_n)$$

Sviluppando si ottiene la somma di $2n$ termini, ciascuno dei quali il prodotto di n fattori. Inoltre, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, ciascuno dei $2n$ termini contiene come fattore x_i o y_i . Ora, quanti dei termini della somma suddetta hanno come fattori k termini del tipo x_i e $n-k$ termini del tipo y_i ? Dato che ogni termine costituito da k degli x_i è individuato dalla scelta di un sottoinsieme di k elementi tra gli n elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, vi sono $\binom{n}{k}$ termini siffatti. Pertanto, posto $x_i = x$, $y_i = y$, per $i = 1, \ldots, n$, si ha che

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$