

Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
Esempio di appello I

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1.

- Si stabilisca se $W = \{(r+s)x^3 + (r+t)x^2 + (s-t)x + (r+t) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$ e in caso affermativo se ne determini una base \mathcal{B} .
- Si completi la base \mathcal{B} trovata al punto precedente ad una base di W .
- Si determinino, se possibile, 3 vettori $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ linearmente indipendenti appartenenti a W e 3 vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linearmente indipendenti non appartenenti a W .

Esercizio 2. (Tratto da un appello della prof.ssa Cantarini)

Si considerino le applicazioni lineari $F_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definite da: $F_s(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $F_s(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - s\mathbf{e}_2 + s\mathbf{e}_3$, $F_s(\mathbf{e}_3) = -s\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$, al variare di $s \in \mathbb{R}$.

- Esiste qualche F_s suriettiva? Per quali valori di s ?
- Per $s = -5$ si scrivano una base di $\text{Im } F_{-5}$ e una di $\text{Ker } F_{-5}$.
- F_0 è diagonalizzabile? In caso affermativo si determini una base di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori di F_0 .
- Esiste qualche F_s per cui $(5, 0, 0) \in \text{Ker } F_s$? Per quali valori di s ?

Esercizio 3.

Esiste una applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $\text{Ker } G = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \rangle$ e $\text{Im } G = \langle \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4 \rangle$? Se sì, determinare la matrice associata ad una tale G rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 .

Esercizio 4.

Quante sono le funzioni iniettive $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$?