Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
Esempio di appello II

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (Tratto da un appello della prof.ssa Cantarini)
Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \langle (1,t,0,0),(1,1,0,t),(2,1+t,t,1+t),(2,2,t,2+t) \rangle.$$

a) Si determinino, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la dimensione di A_t ed una sua base $\mathcal{B}_t$

b) Si stabilisca per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ appartiene ad A_t e per uno dei valori trovati si calcolino le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_t$.

Esercizio 2.

a) Si determini per quali valori di k i vettori $\{\mathbf{v}_1 = (1,k), \mathbf{v}_2 = (k+2,15), \mathbf{v}_3 = (3,3k)\}$ sono linearmente dipendenti.

b) Scelto a piacere un valore di k, si determini se possibile un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tale che $\mathbf{w} \notin \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

c) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da: $F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1$, $F(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2$, $F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3$. Si stabilisca per quali valori di k si ha che F è suriettiva.

d) Sia $\mathcal{B} = \{3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^2$. Si determini la matrice $A_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ associata ad F rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3.
Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice A rispetto alla base canonica, ove $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 11 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Si determinino gli autovalori di A e un autospazio.

b) Si stabilisca se A è diagonalizzabile e in caso affermativo si determini una matrice diagonale D simile ad A; si determini inoltre, se possibile, una matrice diagonale C che non sia simile ad A.

c) Si stabilisca se A è invertibile.

Esercizio 4.
In quanti modi possibili si possono colorare le 8 lettere della parola "W L'ITALIA" utilizzando solo i colori bianco, rosso e verde?