Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
Esempio di appello III

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1.

a) Si determini per quali valori di k i vettori $\{\mathbf{v}_1 = x^3 + 5, \mathbf{v}_2 = 4x^3 + kx^2, \mathbf{v}_3 = 2x^3 - kx + 17, \mathbf{v}_4 = x^3 + 2x - k\}$ generano $\mathbb{R}_3[x]$.

b) Scelto un valore di k a piacere, si determini, se possibile, un vettore $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_3[x]$ che abbia le 3 seguenti proprietà: $\mathbf{w} \notin \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $\mathbf{w} \notin \text{span}\{\mathbf{v}_3\}$,$\mathbf{w} \in \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

c) Se possibile, si determini una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \in \text{Im } T \cap \text{Ker } T$ e $\mathbf{e}_3$ sia autovettore di T di autovalore -5.

Esercizio 2.
Sia $G_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da: $G_k(x, y, z) = (8x + ky, kx + 2y + z, -7x + y + z)$.

a) Si determini per quali valorio di k si ha che G_k è iniettiva.

b) Scelto un valore di k per cui G_k non è iniettiva, si determinino se possibile, 2 vettori linearmente indipendenti appartenenti a Ker G_k.

c) Posto $k = 0$ si determini, se possibile, una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $G_0 \circ T$ sia l'identità di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3.
Sia $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da: $F_t(x, y, z) = (2x + t^2y + (1 - t)z, tx + 2y, tz)$.

a) Si stabilisca per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha che F_t è diagonalizzabile.

b) Posto $t = 1$, si verifichi che $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$ sono autovettori di F_1 e si determinino, se possibile, una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}A_1P = D$, ove A_1 è la matrice associata ad F_1 rispetto alla base canonica.

c) Se $B \in \text{M}_3(\mathbb{R})$ è una matrice avente gli stessi autovalori di A_1, è vero che B è simile ad A_1?

Esercizio 4.
Trovare tutte le soluzioni intere della congruenza $5x \equiv_{12} 9$.