$L \quad \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ appl. lin. $\quad \underline{0} \neq w \in \operatorname{Im} L$ VERSIONE A

$U = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid L(v) = w \}$

$\underline{0} \notin U$ perché $L(\underline{0}) = \underline{0} \neq w \quad \Rightarrow U$ non è sottosp.

Siano $v_1, v_2 \in U \quad L(v_1) = w \quad L(v_2) = w$

$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = w + w = 2w \neq w \quad \Rightarrow U$ non è
chiuso rispetto alla somma

Sia $\lambda \in \mathbb{R} \quad L(\lambda v_1) = \lambda L(v_1) = \lambda w \neq w \quad U$ non è
chiuso rispetto al prod. per uno scalare

$V = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid L(v) \in \langle w \rangle \}$

$\underline{0} \in V$ perché $L(\underline{0}) = \underline{0} \in \langle w \rangle$

Siano $v_1, v_2 \in V \quad L(v_1) \in \langle w \rangle, \; L(v_2) \in \langle w \rangle$

$L(v_1 + v_2) = \underbrace{L(v_1)}_{\in \langle w \rangle} + \underbrace{L(v_2)}_{\in \langle w \rangle} \in \langle w \rangle$ perché $\langle w \rangle$ è un sottospazio

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in V \quad \Rightarrow V$ è chiuso rispetto alla somma

Sia $\lambda \in \mathbb{R} \quad F(\lambda v_1) = \lambda \underbrace{F(v_1)}_{\in \langle w \rangle} \in \langle w \rangle$ perché $\langle w \rangle$ è
un sottospazio $\Rightarrow \lambda v_1 \in V \Rightarrow V$ è chiuso rispetto al
prodotto per uno scalare

Quindi V è un sottospazio

$Z = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid L(v) \notin \langle \underline{w} \rangle \}$

$\underline{0} \notin Z$ perché $L(\underline{0}) = \underline{0} \in \langle \underline{w} \rangle \Rightarrow Z$ non è sottosp.

Siano $v_1, v_2 \in Z \quad L(v_1) \notin \langle w \rangle \quad L(v_2) \notin \langle w \rangle$

$L(v_1 + v_2) = \underbrace{L(v_1)}_{\notin \langle w \rangle} + \underbrace{L(v_2)}_{\notin \langle w \rangle}$ non ~~posso~~ è detto che non appartenga a W

ad esempio se prendo v_1 $v_2 = -v_1$

$L(v_1+v_2) = L(\underline{0}) = \underline{0} \in \langle \underline{w} \rangle \Rightarrow v_1+v_2 \notin Z$

$\Rightarrow Z$ non è chiuso rispetto alla somma

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad L(\alpha v_1) = \alpha L(v_1)$ $\quad$ se $\alpha = 0$ $\quad \alpha L(v_1) = 0 \in \langle w$

$\underset{w}{\cancel{=}}$

$\Rightarrow Z$ non è ~~esattamente~~ chiuso risp. al prodotto per uno scalare.

c) $A = \{ x^2 - x + 7,\ x^2 + 7,\ 5x,\ x - 7,\ 4x^2 + 28,\ -9x \}$

$\quad\ \ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6$

v_6 è multiplo di v_3 $\Rightarrow$ posso cancellarlo e $\langle A \rangle = \langle A \setminus \{v_6\} \rangle$

v_5 è multiplo di v_2 $\Rightarrow$ $\langle A \rangle = \langle A \setminus \{v_6, v_5\} \rangle$

restano 4 vettori v_1, v_2, v_3, v_4 Una base di $\mathbb{R}_2[x]$ contiene 3 vettori lin indip.

noto che $v_1 = v_2 + \left(-\frac{1}{5}\right) v_3 \Rightarrow \langle A \rangle = \langle A \setminus \{v_1, v_5, v_6\} \rangle$

controllo che 3 vettori che restano generino $\mathbb{R}^3$.

passo alle coordinate

$(v_2)_e = (1, 0, 7)$

$(v_3)_e = (0, 5, 0)$

$(v_4)_e = (0, 1, -7)$

Uso Gauss in modo diretto per trovare una base di $\langle v_2, v_3, v_4 \rangle$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -7 \end{matrix} \quad \xrightarrow{R_2/5} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 \end{matrix} \quad \xrightarrow{R_3 - R_2} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{matrix}$$

$\langle v_2, v_3, v_4 \rangle$ ha dim 3 $\Rightarrow$ $\{v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$

Esercizio 2 $\qquad b=4 \qquad$ VERSIONE A

$$T_k(x_1,x_2,x_3) = (4x_1+kx_2,\ kx_1+5x_2+x_3,\ -3x_1+4x_2+x_3)$$

La matrice A_k associata a T_k rispetto alla base canonica è $\begin{pmatrix} 4 & k & 0 \\ k & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

T_k è iniettiva $\Longleftrightarrow$ det $A_k \neq 0$

calcolo det A_k sviluppando secondo la prima riga

$$\det A_k = 4\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - k\det\begin{pmatrix} k & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 4-k(k+3) =$$

$$= -k^2-3k+4 = -(k^2+3k-4) = -(k+4)(k-1)$$

det $A_k = 0 \Longleftrightarrow k=-4$ o $k=1$

T_k non è iniettiva per $k=-4$ e $k=1$

scelgo $a=+1$

Per trovare il nucleo di A_1 risolvo il sistema $A_1\underline{x}=\underline{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ R_2-4R_1 \\ R_3+3R_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -19 & -4 & 0 \\ 0 & 19 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1+5x_2+x_3=0 \\ 19x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

$$x_1 = -5x_2 - x_3 = \frac{20}{19}x_3 - x_3 = \frac{1}{19}x_3$$

$$x_2 = -\frac{4}{19}x_3 \qquad \text{Ker } A_1 = \langle (1,-4,19) \rangle$$

$$\mathrm{Im}\, A_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

So già che $\dim \mathrm{Im}\, A_1 = 3 - 1 = 2$ quindi

$$\mathrm{Im}\, A_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(Quei 2 vettori appartengono all'immagine e sono indip., quindi generano un sottosp. di dim 2, che deve coincidere con $\mathrm{Im}\, A_1$)

il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}\, A_1$ perché

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

dà una matrice a scala, e anche il vettore

$(0,1,2) = (0,0,1) + (0,1,1) \notin \mathrm{Im}\, A_1$

perché altrimenti anche $(0,0,1) = (0,1,2) - (0,1,1)$ apparterrebbe a $\mathrm{Im}\, A_1$

inoltre $(0,0,1)$ e $(0,1,2)$ sono lin indipendenti

A_0 ha matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata a G è A_0^{-1}. Uso Gauss per determinare A_0^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{4}R_1 \\ \frac{1}{5}R_2 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ R_3+3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 4 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ R_3-4R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{4} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ R_3 \cdot 5 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{4} & -4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2-\frac{1}{5}R_3 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{4} & -4 & 5 \end{array}\right)$$

~~la~~ mat G è l'applicazione associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{15}{4} & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$I_{\beta e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\beta}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{id} \underset{e}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{A_0} \underset{e}{\mathbb{R}^3}$$

$$A_{\beta e} = A_0 I_{\beta e} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -15 & 21 & 5 \\ -15 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3 $\qquad b = 5 \qquad$ VERSIONE A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

calcolo $T(3e_1 + 3e_2 + 3e_3) = A \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Quindi $3e_1 + 3e_2 + 3e_3$ è autovettore di autovalore 5

Cerco il polinomio caratteristico di A $\quad \det(A - xI)$

Utilizzo il metodo di Sarrus

$$\begin{matrix} 1-x & 5 & -1 & 1-\cancel{x} & 5 \\ 1 & 5-x & -1 & 1 & 5-x \\ 1 & 5 & -1-x & 1 & 5 \end{matrix}$$

$\det(A - xI) = (1-x)(-1-x)(5-x) - 5 - 5 - [x - 5 - 5(1-x) + 5(-1-x)]$

$= (x^2-1)(5-x) - 10 - (x - 5 - \cancel{5} + \cancel{5x} - 5 - \cancel{5x}) =$

$= 5x^2 - 5 - x^3 + x - 10 + 15 - x = -x^3 + 5x^2 = +x^2(5-x)$

Autovalori : 0 con molt. alg 2

5 " " " 1

Cerco $V_0 = \operatorname{Ker} F$, risolvendo il sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = 0$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

le soluz. dipendono da $3-1=2$ parametri

V_0 ha dim 2 ~~…~~ ~~…~~

V_5 ha dim 1 e poiché dal punto a) sappiamo che $3e_1+3e_2+3e_3 \in V_5$ abbiamo $V_5 = \langle (3,3,3) \rangle$ $= \langle (1,1,1) \rangle$

Quindi F è diagonalizzabile per trovare una base β tale che $A_{\beta\beta}$ sia diagonale dobbiamo trovare una base di autovettori.

V_5 ha per base $(1,1,1)$

cerco una base di V_0 $\qquad x_1+5x_2-x_3=0$

x_2, x_3 hanno valore arbitrario, x_1 si ricava

$$\begin{aligned} x_1 &= s-5t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= s \end{aligned} \qquad V_0 = \langle (1,0,1), (0,-5,1) \rangle$$

Una base β richiesta è $\beta = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,-5,1)\}$

e $A_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

la matrice $I_{\beta e}$ di cambio di base

$$I^{\bar{e}}_{\beta e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Posto $P_1 = I_{\beta e}$ abbiamo $P_1^{-1} A P_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

se scegliamo P_2 in modo che le sue colonne siano autovettori di autovalori 5, 0, 0 rispettiv. abbiamo un'altra matrice tale che $P_2^{-1} A P_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Possiamo prendere ad esempio $P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

autovettore di autovalore 5

autovettori di autov. 0

Esercizio 4 $\qquad b=2$

$$93x \equiv_{226} -6$$

$226 = 93 \cdot 2 + 40$ $\qquad$ $40 = 226 - 93 \cdot 2$

$93 = 40 \cdot 2 + 13$ $\qquad$ $13 = 93 - 40 \cdot 2$

$40 = 13 \cdot 3 + 1$ $\qquad$ $1 = 40 - 13 \cdot 3$

$\rightarrow$ ultimo resto non nullo

$MCD(226,93) = 1$ $\Rightarrow$ la congruenza ha soluz.

$$1 = 40 - 13 \cdot 3 = 40 - (93 - 40 \cdot 2) \cdot 3 = 7 \cdot 40 - 93 \cdot 3$$

$$= 7(226 - 93 \cdot 2) - 93 \cdot 3 = 7 \cdot 226 - 17 \cdot 93$$

La congruenza diventa, passando a $\mathbb{Z}_{226}$:

$$[93]_{226} [x]_{226} = [-6]_{226} \quad (*)$$

sappiamo che $[1]_{226} = [-17]_{226} \cdot [93]_{226}$

moltiplicando entrambi i membri di $(*)$ per $[-17]$

otteniamo $[x]_{226} = [6 \cdot 17]_{226}$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$

$$[102]_{226}$$

quindi $x = 102 + K\,226$ con $K \in \mathbb{Z}$