Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
4 settembre 2015

Il parametro b è uguale a:
(il resto della disione del proprio numero di matricola per 4)+1

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (6 punti)

a) Si stabilisca se $W = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \middle| r, s, t, u \in \mathbb{R}, br - s + u = 0 \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Si determinino, se possibile, 4 vettori linearmente indipendenti $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{v} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in W$ e $\mathbf{v} \notin W$.

c) Si determinino, se possibile, due sottospazi distinti U_1 e U_2 di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ di dimensione 2 che siano entrambi contenuti in W.

Esercizio 2. (12 punti)
Si considerino le applicazioni lineari $F_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definite da: $F_h(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, $F_h(\mathbf{e}_2) = -h\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, $F_h(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 - 3h^2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

a) Si determini Ker (F_h), al variare di $h \in R$.

b) Sia a un valore di h tale che F_a non sia iniettiva, si determini, se possibile, una applicazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $G \neq F_a$ ma Ker $G =$ Ker F_a e Im $G =$ Im F_a.

c) Si stabilisca per quali valori di h i vettori $F_h(\mathbf{e}_1), F_h(\mathbf{e}_2), F_h(\mathbf{e}_3), 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$ generano $\mathbb{R}^3$.

d) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2, b\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$. Posto $h = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ associata ad F_0 rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

Esercizio 3. (9 punti)
Si considerino le applicazioni lineari $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definite da: $T_k(x, y, z) = (-3x + 4z, 6x + (k + 1)y + kz, 3x + z)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a) Si stabilisca per quali k si ha che T_k è diagonalizzabile.

b) Si stabilisca per quali k si ha che T_k è invertibile.

c) Posto $k = -1$, sia A la matrice associata a T_{-1} rispetto alla base canonica. Se una matrice $\in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ ha gli stessi autovalori di A, è vero che allora B è necessariamente simile ad A? Si motivi la risposta.

Esercizio 4. (4 punti)

a) Si determinino tutte le soluzioni intere della congruenza:

$$34x \equiv_{85} b - 12$$

b) Si determinino tutti gli elementi invertibili in $\mathbb{Z}_{15}$.