DISPENSE DI ANALISI MATEMATICA 2

ANNAMARIA MONTANARI

Indice

1. Lo spazio $\mathbb{R}^n$, metrica euclidea e topologia euclidea. 2
1.1. Distanza Euclidea 4
1.2. Dischi ed insiemi aperti 5
1.3. Insieme derivato e punti di accumulazione 6
2. Limiti per funzioni di più variabili. 8
2.1. Limiti 8
2.2. Limiti per funzioni vettoriali 12
2.3. Esercizi sui limiti 14
3. Successioni di $\mathbb{R}^n$. Insiemi sequenzialmente compatti 16
3.1. Insiemi compatti 18
4. Funzioni continue 19
4.1. Insiemi connessi per archi 20
4.2. Teorema di Bolzano Weierstrass 20
4.3. Esercizi sulla continuità 21
5. Calcolo differenziale. 22
5.1. Derivate direzionali, derivate parziali e Gradiente 22
5.2. Funzioni differenziabili 24
5.3. Matrice Jacobiana e differenziale per funzioni vettoriali 25
5.4. Funzioni di classe C^1 29
5.5. Funzioni di classe C^k 30
5.6. Massimi e minimi relativi liberi. 31

Date: 23 dicembre 2005.

5.7. Esercizi sul calcolo differenziale 32
6. Varietà di $\mathbb{R}^n$. 34
6.1. Massimi e minimi relativi vincolati 38
6.2. Punti critici vincolati e Teorema dei moltiplicatori di Lagrange 38
6.3. Esercizi sulle varietà e sul Teorema dei moltiplicatori di Lagrange 39
7. Teoria della misura di Peano-Jordan 41
8. Integrale multiplo. 44
8.1. Teorema di riduzione 46
8.2. Teorema del cambiamento di variabile. 50
8.3. Esercizi sull'integrale multiplo 52
9. Appendice: Alfabeto greco 54
Indice analitico 55
Riferimenti bibliografici 57

1. Lo spazio $\mathbb{R}^n$, metrica euclidea e topologia euclidea.

Fissato $n \in \mathbb{N}$ indichiamo con $\mathbb{R}^n$ l'insieme delle n-ple ordinate di numeri reali e chiameremo *punti* (o vettori) di $\mathbb{R}^n$ i suoi elementi $x = (x_1, \dots, x_n)$, dove $x_j \in \mathbb{R}$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Pertanto

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad \forall j = 1, \dots, n\}.$$

Definizione 1.1. *Siano $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Definiamo*

(1) *l'uguaglianza $x = y$ se $x_j = y_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$.*
(2) *la somma $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$*
(3) *Per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ il prodotto $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$*
(4) *la differenza $x - y = x + (-1)y$*
(5) *il vettore nullo $0 = (0, \dots, 0)$*
(6) *per ogni $k = 1, \dots, n$ $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ è il vettore con tutte le componenti nulle tranne la k-esima che vale 1)*

Osservazione 1.1. $\mathbb{R}^n$ *munito della somma e del prodotto per uno scalare è uno spazio vettoriale.*

Definizione 1.2. *Un prodotto interno (prodotto scalare) in* $\mathbb{R}^n$ *è un'applicazione*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà:

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $\langle x, x \rangle = 0$ *se se solo se* $x = 0$

ii) SIMMETRIA

$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^n$

iii) LINEARITÀ RISPETTO AL PRIMO ARGOMENTO

$\langle \lambda x, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle$ *e* $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ *per ogni* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$

Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *è un prodotto interno in* $\mathbb{R}^n$ *diremo che* $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *è uno spazio con prodotto interno.*

Dalle prorietà ii) e iii) segue la linearità del prodotto interno rispetto al secondo argomento.

Esempio 1.1. *(*PRODOTTO INTERNO EUCLIDEO*)*

L'applicazione così definita

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j \quad \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

è un prodotto interno in $\mathbb{R}^n$*.*

Osservazione 1.2. *Per ogni* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, si ha*

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Pertanto $\{e_k, k = 1, \ldots, n\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^n$ *e diremo che* $\mathbb{R}^n$ *è uno spazio vettoriale di dimensione finita* n*.*

1.1. **Distanza Euclidea.** Il prodotto interno Euclideo induce una norma ed una distanza su $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.3. *La norma Euclidea è l'applicazione*

$$\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad \|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2},\quad \forall\, x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

dove $\langle\cdot,\cdot,\rangle$ è il prodotto interno Euclideo definito nell'esempio 1.1.

Teorema 1.1. *La norma Euclidea gode delle seguenti proprietà:*

1) $\|x\|\geq 0$ *per ogni* $x\in\mathbb{R}^n$ *e* $\|x\|=0$ *se se solo se* $x=0$
2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ *per ogni* $x\in\mathbb{R}^n$ *e* $\lambda\in\mathbb{R}$
3) Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
   $|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\cdot\|y\|$ *per ogni* $x,y\in\mathbb{R}^n$
4) disuguaglianza triangolare
   $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ *per ogni* $x,y\in\mathbb{R}^n$

Dimostrazione. Le affermazioni 1) e 2) sono conseguenza di i) e iii).

Per dimostrare 3) per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$ consideriamo

$$0\leq\|x+\lambda y\|^2=\|x\|^2+2\lambda\langle x,y\rangle+|\lambda|^2\cdot\|y\|^2$$

che è una disuguaglianza di secondo grado in λ, pertanto deve essere $\Delta\leq 0$. D'altronde

$$\Delta=(\langle x,y\rangle)^2-\|x\|^2\cdot\|y\|^2$$

è negativo se e solo se $|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\cdot\|y\|$.

Per dimostrare 4) utilizziamo la proprietà 3) come segue

$$\begin{aligned}0\leq\|x+y\|^2=&\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\cdot\|y\|^2\\ \leq&\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\cdot\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

e poichè $\|x+y\|$ e $\|x\|+\|y\|$ sono quantità positive si ha

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|.$$

□

Definizione 1.4. *La distanza Euclidea è l'applicazione*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

che opera nel seguente modo: $\forall\, x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

dove $\langle \cdot, \cdot, \rangle$ *è il prodotto interno Euclideo definito nell'esempio 1.1.*

Teorema 1.2. *La distanza Euclidea gode delle seguenti proprietà:*

1) $d(x, y) \geq 0$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e* $d(x, y) = 0$ *se se solo se* $x = y$
2) SIMMETRIA

   $d(x, y) = d(y, x)$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^n$
3) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

   $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *per ogni* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

Dimostrazione. Dimostriamo solo 3) in quanto le altre proprietà sono banali. Per la proprietà della disuguaglianza triangolare della norma, si ha

$$\begin{aligned} d(x, y) =& \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ \leq& \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(y, z). \end{aligned}$$

□

1.2. **Dischi ed insiemi aperti.** In questa sezione definiremo i dischi aperti e gli insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.5. *Siano* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *ed* $r > 0, r \in \mathbb{R}$. *Definiamo n-disco aperto (o semplicemente disco) di centro* x_0 *e raggio* r *l'insieme*

$$D(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < r\}$$

dove d *è la distanza Euclidea.*

Definizione 1.6. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che $x_0 \in A$ è un punto interno di A se $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $D(x_0, \varepsilon) \subset A$.*

Indichiamo con

$$\operatorname{int} A = \{x_0 \in A : x_0 \, punto \, interno \, di \, A\,\}$$

l'insieme dei punti interni in A.

Diciamo che l'insieme A è aperto se

$$\operatorname{int} A = A,$$

cioè se ogni punto di A è punto interno in A.

Esempio 1.2. *Sono insiemi aperti:*

a) $\varnothing$,
b) $\mathbb{R}^n$,
c) *prodotto cartesiano di intervalli aperti di* $\mathbb{R}$
d) *intersezione finita di aperti,*
e) *unione finita o infinita di aperti.*

Definizione 1.7. *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che C è chiuso se il suo complementare*

$$C^c = \mathbb{R}^n \setminus C = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin C\,\}$$

è aperto.

1.3. **Insieme derivato e punti di accumulazione.**

Definizione 1.8. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (non necessariamente appartenente ad Ω) è un punto aderente a Ω se $\forall\, r > 0$*

$$D(x_0, r) \cap \Omega \neq \varnothing.$$

Chiameremo chiusura di Ω

$$\bar{\Omega} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 \, punto \, aderente \, a \, \Omega\,\}$$

l'insieme dei punti aderenti a Ω. Indicheremo inoltre con

$$\operatorname{Fr}\Omega = \bar{\Omega} \cap \overline{\Omega^c}$$

la frontiera di Ω.

Osservazione 1.3. *Ogni punto $x_0 \in \Omega$ è punto aderente ad Ω, cioè vale sempre l'inclusione $\Omega \subseteq \bar{\Omega}$.*

Proposizione 1.1.

$$\overline{\Omega^c} = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}\Omega.$$

Dimostrazione. $x \in \overline{\Omega^c}$ se e solo se per ogni $r > 0$, $D(x,r) \cap \Omega^c \neq \varnothing$, ovvero

$$\varnothing \neq D(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) = D(x,r) \setminus \Omega. \tag{1}$$

la condizione (1) è equivalente a $x \notin \operatorname{int}\Omega$. $\square$

Proposizione 1.2.

$$\operatorname{Fr}\Omega = \bar{\Omega} \setminus \operatorname{int}\Omega$$

Dimostrazione. Se $x \in \operatorname{Fr}\Omega$ allora $x \in \bar{\Omega}$ e $x \in \overline{\Omega^c} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}\Omega$. Viceversa, se $x \in \bar{\Omega} \setminus \operatorname{int}\Omega$ allora $x \in \bar{\Omega}$ e $x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int}\Omega = \overline{\Omega^c}$. $\square$

Proposizione 1.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- i) $\Omega = \bar{\Omega}$
- ii) $\operatorname{Fr}\Omega \subseteq \Omega$
- iii) $\operatorname{Fr}\Omega \cap \Omega^c = \varnothing$
- iv) Ω *è chiuso*

Dimostrazione. Basta osservare che vale sempre l'inclusione $\operatorname{int}\Omega \subseteq \Omega \subseteq \bar{\Omega}$ e che $\operatorname{Fr}\Omega = \operatorname{Fr}(\Omega^c)$. $\square$

Definizione 1.9. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (non necessariamente appartenente ad Ω) è un punto di accumulazione per Ω se $\forall\, r > 0$*

$$D(x_0, r) \cap (\Omega \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing.$$

Chiameremo derivato di Ω

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 \, \textit{punto di accumulazione per} \, \Omega\}$$

l'insieme dei punti di accumulazione per Ω.

Proposizione 1.4. *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) x_0 *è un punto di accumulazione per* Ω

(ii) $\forall\, r > 0$ *l'insieme* $D(x_0, r) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})$ *contiene infiniti punti.*

Dimostrazione. Ovviamente (ii) implica (i). Per dimostrare il viceversa supponiamo per assurdo che esistano un $r > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tali che

$$D(x_0, r) \cap (\Omega \setminus \{x_0\}) = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Posto

$$\delta = \min\{d(x_0, a_1), \dots, d(x_0, a_k)\}$$

risulta

$$D(x_0, \delta/2) \cap (\Omega \setminus \{x_0\}) = \varnothing$$

e questo contraddice (i). □

2. Limiti per funzioni di più variabili.

2.1. **Limiti.** In quanto segue $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definizione 2.1 (Limite di una funzione)**.** *Diciamo che* $f(x)$ *tende ad un valore reale* $\lambda \in \mathbb{R}$ *per* x *che tende a* x_0 *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \, \textit{tale che} \, |f(x) - \lambda| < \varepsilon \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta_\varepsilon) \cap (\Omega \setminus \{x_0\}) \,. \tag{2}$$

In tal caso scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$$

o equivalentemente

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda.$$

Osservazione 2.1. *La condizione* (2) *si può anche scrivere*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \, \textit{tale che } D(x_0, \delta_\varepsilon) \cap (\Omega \setminus \{x_0\}) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - \lambda| < \varepsilon\}.$$

Esempio 2.1. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. *Si ha* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. *Infatti, per ogni* $\varepsilon > 0$, *se vogliamo che valga l'inclusione*

$$D(0, \delta_\varepsilon) \setminus \{0\} \subseteq \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon\} = D(0, \sqrt{\varepsilon})$$

è sufficiente scegliere $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$.

Proposizione 2.1 (Unicità del limite)**.** *Se esiste* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *allora è unico*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due numeri reali distinti λ, α, $\lambda \neq \alpha$ tali che valga (2) e

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta'_\varepsilon > 0 \, \textit{tale che } |f(x) - \alpha| < \varepsilon \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta'_\varepsilon) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})\,.$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, posto $\delta''_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon, \delta'_\varepsilon\}$, si ha

$$|\lambda - \alpha| \leq |\lambda - f(x)| + |f(x) - \alpha| < 2\varepsilon$$

per ogni $x \in D(x_0, \delta''_\varepsilon) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})$. Per $\varepsilon = |\lambda - \alpha|/4$ si ottiene l'assurdo

$$|\lambda - \alpha| < |\lambda - \alpha|/2.$$

□

Definizione 2.2 (Limite $+\infty$)**.** *Diciamo che* $f(x)$ *tende a* $+\infty$ *per* x *che tende a* x_0 *se*

$$\forall M > 0 \ \exists\, \delta > 0 \, \textit{tale che } f(x) > M \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})\,. \tag{3}$$

In tal caso scriveremo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$

Definizione 2.3 (Limite $-\infty$)**.** *Diciamo che $f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a x_0 se*

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0 \textit{ tale che } f(x) < M \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})\,. \tag{4}$$

In tal caso scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

In seguito indicheremo con $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$.

Sia ora $B \subseteq \Omega$. Indichiamo con $f|_B : B \to \mathbb{R}$ la funzione di restrizione definita da $f|_B(x) = f(x)$ per ogni $x \in B$. Dalla Proposizione 2.1 di unicità del limite segue la seguente

Proposizione 2.2. *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ allora per ogni $B \subseteq \Omega$ tale che $x_0 \in \mathcal{D}(B)$ si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f|_B(x) = \lambda.$$

Osservazione 2.2 (Criterio per stabilire la non esistenza del limite)**.** *Siano $B_1, B_2 \subset \Omega$ tali che $x_0 \in \mathcal{D}(B_1) \cap \mathcal{D}(B_2)$ e*

$$\lim_{x \to x_0} f|_{B_1}(x) \neq \lim_{x \to x_0} f|_{B_2}(x).$$

Allora $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Esempio 2.2. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Posto*

$$B_m = \{(x, mx) : x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$, risulta $B_m \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e $0 \in \mathcal{D}(B_m)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Poichè

$$f|_{B_m}(x,y) = f(x, mx) = \frac{|x| + m|x|}{\sqrt{x^2 + m^2x^2}} = \frac{1+m}{\sqrt{1+m^2}}$$

risulta

$$\lim_{x \to 0} f|_{B_m}(x) = \frac{1+m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Pertanto il limite della restrizione di f a B_m dipende da m e dunque possiamo concludere che $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$.

Per i limiti di funzioni di più variabili reali valgono le stesse proprietà elementari dei limiti per funzioni di una variabile reale. Precisamente, se

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda \in \bar{\mathbb{R}}, \quad g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \alpha \in \mathbb{R}$$

allora

a) $(f+g)(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda + \alpha$
b) se $(\lambda, \alpha) \neq (\mp\infty, 0)$ allora $(f \cdot g)(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda \cdot \alpha$
c) $|f(x)| \xrightarrow[x \to x_0]{} |\lambda|$
d) se $\lambda \neq 0$ allora $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 1/\lambda$.

Sono invece indeterminati i limiti del tipo

i) $\infty - \infty$
ii) $0 \cdot \infty$
iii) $\frac{\mp\infty}{\mp\infty}$
iv) $\frac{0}{0}$
v) $\frac{1}{0}$

Nel caso di limiti indeterminati possono essere utili i seguenti teoremi.

Teorema 2.1 (I Teorema del confronto). *Sia $x_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})$$

e $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda$, $h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda$ allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$$

Dimostrazione. Per la condizione (2) per ogni $\varepsilon > 0$ esistono δ_ε e δ'_ε positivi tali che

$$h(x) \leq \lambda + \varepsilon, \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta_\varepsilon) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})$$

$$\lambda - \varepsilon \leq f(x), \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta'_\varepsilon) \cap (\Omega \setminus \{x_0\}).$$

Posto $\delta''_\varepsilon = \min\{\delta, \delta_\varepsilon, \delta'_\varepsilon\}$ per ogni $x \in D(x_0, \delta''_\varepsilon) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})$ si ha

$$\lambda - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq \lambda + \varepsilon$$

e dungue $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$. $\square$

Teorema 2.2 (II Teorema del confronto). *Sia $x_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$|g(x)| \leq h(x) \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})$$

e $h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Dimostrazione. Poichè la condizione $|g(x)| \leq h(x)$ è equivalente a $-h(x) \leq g(x) \leq h(x)$, basta scegliere nel I Teorema del confronto $f(x) = -h(x)$. □

Teorema 2.3 (Teorema della permanenza del segno). *Sia $x_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda > 0$$

allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})\,.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla condizione (2) scegliendo ad esempio $\varepsilon = \lambda/2$. □

Osservazione 2.3. *Utilizzando il cambiamento di variabile $y = x - x_0$ si ha che*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \bar{\mathbb{R}}$$

se e solo se

$$\exists \lim_{y \to 0} f(y + x_0) = \lambda \in \bar{\mathbb{R}}.$$

2.2. **Limiti per funzioni vettoriali.** Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ e sia f una funzione vettoriale $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$. Ogni componente f_j di f è una funzione da Ω a $\mathbb{R}$.

Definizione 2.4. *Diciamo che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$$

se

$$(5) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } d(f(x), \lambda) < \varepsilon \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta_\varepsilon) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})\,.$$

In (5) d è la distanza Euclidea in $\mathbb{R}^m$, e $D(\cdot,\cdot)$ è il disco della metrica Euclidea in $\mathbb{R}^n$.

Vale la seguente caratterizzazione per il limite di funzioni vettoriali.

Proposizione 2.3. *Una funzione vettoriale $f = (f_1, \dots, f_m)$ ha limite se e solo se ogni sua componente f_j ha limite reale per ogni $j = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione. Se vale la condizione (5) allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ *tale che*

$$|f_j(x) - \lambda_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (f_k(x) - \lambda_k)^2} = d(f(x), \lambda) < \varepsilon \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta_\varepsilon) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})$$

per ogni $j = 1, \dots, m$. Dunque ogni componente f_j verifica la condizione (2).

Viceversa, se ogni componente f_j verifica la condizione (2) per ogni ε e per un opportuno $\delta_\varepsilon^{(j)}$, posto

$$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_\varepsilon^{(1)}, \dots, \delta_\varepsilon^{(m)}\}$$

si ha

$$d(f(x), \lambda) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (f_k(x) - \lambda_k)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{m} \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta_\varepsilon) \cap (\Omega \setminus \{x_0\})$$

e dunque f verifica la condizione (5). $\square$

Teorema 2.4 (Limite della composizione)**.** *Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, e $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathcal{D}(B)$, $g : B \to \mathbb{R}^p$, $\lim_{y \to y_0} g(y) = z_0$. Se $y_0 \notin B$ oppure $y_0 \in B$ e $g(y_0) = z_0$ allora*

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = z_0.$$

Esempio 2.3. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita*

$$g(y) = \begin{cases} 1, & se\, y = 0; \\ 0, & se\, y \neq 0. \end{cases}$$

Si ha $\lim_{y \to 0} g(y) = 0 \neq \lim_{x \to 0} g(f(x)) = g(0) = 1.$

2.3. **Esercizi sui limiti.**

(1) Determinare il dominio Ω della funzione f e stabilire se esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

nei seguenti casi:

(a) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il limite $\nexists$.

(b) $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il limite è $+\infty$.

(c) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2-xy+y^2}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il limite $\nexists$.

(d) $f(x,y) = \frac{x^3-y^2}{x^2+xy+y^2}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il limite $\nexists$.

(e) $f(x,y) = \frac{xy^2-3x^2}{x^2-2xy+y^2}$

R. $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq \pm y\}$, il limite $\nexists$.

(f) $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il limite $\nexists$.

(g) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il limite vale 0.

(h) $f(x,y) = \frac{x^2 \sin y}{x^2+y^2}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il limite vale 0.

(i) $f(x,y) = xy^2 \ln(x^2+y^4)$

R. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il limite vale 0.

(j) $f(x,y) = \frac{2x^2+3xy-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il limite vale 0.

(k) $f(x,y) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il limite $\nexists$.

(l) $f(x,y) = \frac{x^4}{x^2+y^2}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il limite vale 0.

(m) $f(x,y) = x \ln y$

R. $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, il limite $\nexists$.

(n) $f(x,y) = (\cos x - 1) \ln y$

R. $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, il limite $\nexists$.

Suggeriamo la referenza [1] per gli esercizi svolti su questo argomento.

(2) Determinare il dominio della funzione f e stabilire se esiste

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$$

nei seguenti casi:

(a) $f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, il limite vale 0.

(b) $f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2}$

R. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq 0\}$, il limite $\nexists$.

(c) $f(x,y,z) = \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, il limite vale 0.

(d) $f(x,y,z) = z \ln(x^2+y^2)$

R. $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq 0\}$, il limite $\nexists$.

(e) $f(x,y,z) = \frac{x \cos z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

R. $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, il limite $\nexists$.

3. Successioni di $\mathbb{R}^n$. Insiemi sequenzialmente compatti

Definizione 3.1. *Sia (x_k) una successione di elementi di $\mathbb{R}^n$. Si dice che (x_k) è convergente a $x \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla metrica euclidea d se*

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, x) = 0,$$

cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_k, x) < \varepsilon$ per ogni $k > k_\varepsilon$.

In tal caso scriveremo $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, oppure $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$.

Teorema 3.1 (Unicità del limite)**.** *Se $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$, $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$ allora $x = y$.*

Dimostrazione. Per la disuguaglianza triangolare della distanza Euclidea d

$$d(x,y) \le d(x,x_k) + d(x_k,y) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

□

Corollario 3.1. *Sia (x_k) una successione convergente a $x \in \mathbb{R}^n$. Allora per ogni sottosuccessione (x_{h_k}) di (x_k) si ha*

$$\lim_{k\to\infty} x_{h_k} = x.$$

Definizione 3.2. *Una successione (x_k) di elementi di $\mathbb{R}^n$ si dice di Cauchy se*

$$\lim_{k,m\to\infty} d(x_k, x_m) = 0.$$

Teorema 3.2. *Se (x_k) è una successione convergente a $x \in \mathbb{R}^n$ allora (x_k) è di Cauchy.*

Dimostrazione. Per la disuguaglianza triangolare si ha

$$d(x_k, x_m) \le d(x_k, x) + d(x, x_m) \xrightarrow[k,m\to+\infty]{} 0.$$

□

Il seguente teorema permette di stabilire se una successione è convergente senza conoscere il valore limite.

Teorema 3.3 (Completezza sequenziale di $\mathbb{R}^n$)**.** *Se (x_k) è una successione di Cauchy in $(\mathbb{R}^n, d)$, allora esiste $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$.*

Dimostrazione. Se (x_k) è una successione di Cauchy, allora per l'Osservazione 1.2 si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|\langle x_k - x_m, e_j\rangle| \leq d(x_k, x_m) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\langle x_k - x_m, e_j\rangle|^2} < \varepsilon \quad \forall m, k > k_\varepsilon,$$

dunque per ogni fissato $j = 1, \ldots, n$ la successione di numeri reali $(\langle x_k - x_m, e_j\rangle)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e per la completezza di $\mathbb{R}$ [5] esiste $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tale che

$$\langle x_k, e_j\rangle \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda_j,$$

cioè per ogni ε esiste $k_{j,\varepsilon}$ tale che $|\langle x_k, e_j\rangle - \lambda_j| < \varepsilon$ per ogni $k > k_{j,\varepsilon}$. Sia ora $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ sia $k_\varepsilon = \max\{k_{1,\varepsilon}, \ldots, k_{n,\varepsilon}\}$. Allora per ogni $k > k_\varepsilon$

$$d(x_k, \lambda) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\langle x_k, e_j\rangle - \lambda_j|^2} < \varepsilon\sqrt{n}$$

e dunque $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda$. □

La nozione di limite di una successione in $(\mathbb{R}^n, d)$ consente di dare una caratterizzazione sequenziale della chiusura di un insieme di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 3.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sono equivalenti*

(i) $x \in \bar{A}$

(ii) *esite una successione (x_k) di punti di A tale che $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$*

Dimostrazione.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Se $x \in \bar{A}$ allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ $D(x, 1/k) \cap A \neq \varnothing$ e dunque esiste almeno un elemento $x_k \in D(x, 1/k) \cap A$. (x_k) è una successione di elementi di A e $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$ perchè $d(x_k, x) < 1/k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Se esiste una successione (x_k) di punti di A tale che $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un k_ε tale che $d(x_k, x) < \varepsilon$ per ogni $k > k_\varepsilon$. Ma allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un k_ε tale che $x_k \in D(x, \varepsilon) \cap A$ per ogni $k > k_\varepsilon$ e dunque $x \in \bar{A}$.

□

3.1. **Insiemi compatti.**

Definizione 3.3. *Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice compatto (o sequenzialmente compatto) se da ogni successione (x_k) di elementi di A si può estrarre una sottosuccessione (x_{h_k}) [1] convergente ad un elemento $x \in A$.*

Definizione 3.4. *Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice limitato se esiste $M > 0$ tale $\|x\| \leq M$ per ogni $x \in A$.*

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione degli insiemi compatti.

Teorema 3.4. *Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione.

compatto $\Longrightarrow$ chiuso: Sia $x \in \bar{A}$, allora per la Proposizione 3.1 esiste una successione (x_k) di elementi di A tale che $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$. Per la compattezza di A esiste una sottosuccessione x_{h_k} convergente ad un elemento $y \in A$. Per l'uicità del limite $x = y \in A$. Ma allora $\bar{A} \subseteq A$ e dunque $A = \bar{A}$, cioè A è chiuso.

compatto $\Longrightarrow$ limitato: Supponiamo per assurdo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esista un elemento $x_k \in A$ tale che $\|x_k\| > k$. La successione (x_k) ammette una sottosuccessione (x_{h_k}) convergente ad un elemento $y \in A$. Ma allora esiste un $k_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_1$

$$k \leq h_k < \|x_{h_k}\| \leq \|x_{h_k} - y\| + \|y\| < 1 + \|y\|$$

[1] Ricordiamo che per una sottosuccessione la famiglia di indici $\{h_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ è tale che $h_k \geq k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

e questo è assurdo perchè il termine a destra della disuguaglianza è limitato mentre k si può prendere arbitrariamente grande.

chiuso e limitato $\Longrightarrow$ compatto: sia (x_k) una successione di elementi A, allora esiste $M > 0$ tale che $\|x_k\| < M$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ma allora per ogni $j = 1, \dots, n$ la successione delle componenti j-esime $(\langle x_k, e_j \rangle)$ è limitata in $\mathbb{R}$ e per il Teorema di Bolzano Weierstrass reale esiste una sottosuccessione $(\langle x_{h_k}, e_j \rangle)$ convergente ad un elemento $\lambda_j \in \mathbb{R}$ per $k \to \infty$. Sia $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Procedendo come nella dimostrazione della completezza sequenziale di $\mathbb{R}^n$ si prova che x_{h_k} converge a λ per $k \to \infty$. Per la Proposizione 3.1 segue che $\lambda \in \bar{A}$ e poichè A è chiuso $\bar{A} = A$ e dunque $\lambda \in A$.

$\square$

4. Funzioni continue

Definizione 4.1. *Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subset \mathbb{R}^n$. Diciamo che f è continua in $x_0 \in A$ se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } \quad d\,(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta_\varepsilon) \cap A. \tag{6}$$

Diciamo che f è continua in A se è continua in ogni punto $x_0 \in A$. Indicheremo con $C(A, \mathbb{R}^m)$ l'insieme delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}^m$ continue in A.

Osservazione 4.1. *Se $x_0 \in A \cap \mathcal{D}(A)$ la condizione (6) è equivalente a $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Se invece $x_0 \in A \setminus \mathcal{D}(A)$ allora esiste un $\delta > 0$ tale che $D(x_0, \delta_\varepsilon) \cap A = \{x_0\}$ e dunque la condizione (6) è sempre verificata.

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione delle funzioni continue.

Teorema 4.1. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) *f è continua in A*

(ii) *Per ogni $x_0 \in A$ e per ogni disco $D(f(x_0), \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$ esiste un disco $D(x_0, \delta_\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ tale che $D(x_0, \delta_\varepsilon) \cap A \subseteq f^{-1}\left(D(f(x_0), \varepsilon)\right)$.*

(iii) *Per ogni aperto* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *esiste un aperto* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *tale che* $f^{-1}(U) = V \cap A$.

(iv) *Per ogni chiuso* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *esiste un chiuso* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *tale che* $f^{-1}(U) = V \cap A$.

Dimostrazione. Le implicazioni (i)$\Longleftrightarrow$ (ii)$\Longleftarrow$(iii) sono banali. Per dimostrare che (ii)$\Longrightarrow$(iii) sia U un aperto di $\mathbb{R}^m$, allora per ogni $y \in U$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $D(y, \varepsilon) \subseteq U$. Sia $y = f(x)$ per qualche $x \in f^{-1}(U)$ e sia $\delta_\varepsilon > 0$ tale che vale (ii). Posto $V = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} D(x, \delta_\varepsilon)$, si ha che V è aperto e

$$f^{-1}(U) \subseteq V \cap A = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} D(x, \delta_\varepsilon) \cap A \subseteq f^{-1}(U)$$

L'equivalenza di (iii) e di (iv) segue da

$$f^{-1}(U) = V \cap A \Longleftrightarrow f^{-1}(U^c) = V^c \cap A$$

□

Teorema 4.2. *La somma, il prodotto e la composizione di funzioni continue sono funzioni continue.*

4.1. Insiemi connessi per archi.

Definizione 4.2. *Diciamo che un insieme* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *è connesso per archi se per ogni* $x_1, x_2 \in \Omega$ *esiste un'applicazione continua* $\gamma : [0, 1] \to R^n$ *tale che* $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$ *e* $\gamma(t) \in \Omega$ *per ogni* $t \in [0, 1]$.

Osservazione 4.2. *Gli insiemi connessi per archi di* $\mathbb{R}$ *sono gli intervalli.*

4.2. Teorema di Bolzano Weierstrass.

In questa sezione dimostriamo una proprietà notevole delle funzioni continue: le funzioni continue conservano la connessione per archi e la compattezza.

Teorema 4.3 (Teorema di Bolzano). *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *connesso per archi e sia* $f : A \to \mathbb{R}^m$ *continua. Allora* $f(A)$ *è connesso per archi.*

Dimostrazione. Siano $y_1, y_2 \in f(A)$. Allora esistono $x_1, x_2 \in A$ tali che $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Siccome A è connesso per archi esiste una funzione continua γ :

$[0,1] \to A$ tale che $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$. Sia ora $\Gamma = f \circ \gamma$. Si ha che $\Gamma : [0,1] \to f(A)$ è continua e $\Gamma(0) = f(\gamma(0)) = f(x_1) = y_1$, e $\Gamma(1) = f(\gamma(1)) = f(x_2) = y_2$. Dunque $f(A)$ è connesso per archi. □

Teorema 4.4 (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ continua. Allora $f(A)$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia (y_k) una successione di elementi di $f(A)$. Allora esiste (x_k) successione di elementi di A tale che $f(x_k) = y_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Siccome A è compatto, dalla successione (x_k) si può estrarre una sottosuccessione convergente (x_{h_k}), $x_{h_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x \in A$. Si ha che $(y_{h_k}) = (f(x_{h_k}))$ è una sottosuccessione di (y_k) e per la continuità della funzione f

$$y_{h_k} = f(x_{h_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x) \in f(A).$$

Dunque $f(A)$ è compatto. □

Corollario 4.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso per archi e compatto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Allora*

$$f(A) = [\min_A f, \max_A f].$$

4.3. **Esercizi sulla continuità.**

(1) Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}^2$ nei seguenti casi:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

R. $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

R. f non è continua in $(0,0)$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

R. $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} x\ln(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

R. $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y > x^2 \\ 0, & y \leq x^2 \end{cases}$

R. $f \notin C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{y-x^2}, & y > x^2 \\ 0, & y \leq x^2 \end{cases}$

R. $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \ln\left((x-1)^2+y^2\right), & (x,y) \neq (1,0) \\ 0, & (x,y) = (1,0) \end{cases}$

R. f non è continua in $(1,0)$.

5. Calcolo differenziale.

In questa sezione estendiamo il concetto di derivata a funzioni di più variabili reali.

5.1. **Derivate direzionali, derivate parziali e Gradiente.**

Definizione 5.1. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, e $u \in \mathbb{R}^n$. Diciamo che f è derivabile in $x \in \Omega$ nella direzione $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$, se esiste il limite del rapporto incrementale*

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu)-f(x)}{t} \in \mathbb{R}.$$

In tal caso chiameremo derivata direzionale di f rispetto u in x

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu)-f(x)}{t}$$

Le derivate direzionali nella direzione degli elementi della base canonica $\{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ di $\mathbb{R}^n$ hanno un ruolo privilegiato.

Definizione 5.2. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è derivabile parzialmente rispetto a x_j in $x \in \Omega$ se è derivabile nella direzione $u = e_j$ in $x \in \Omega$. In tal caso chiameremo derivata parziale di f rispetto a x_j in x*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}$$

Osservazione 5.1. *Osserviamo che*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{t}\end{aligned}$$

è un limite di un rapporto incrementale che coinvolge solo la variabile x_j, mentre le altre rimangono costanti. Pertanto per calcolare la derivata parziale rispetto a x_j, si considerano le altre variabili costanti e si usano le regole di derivazione per una funzione di una variabile reale.

Esempio 5.1. *Sia $f(x, y) = yx^2 + x$. Si ha*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2\end{aligned}$$

Definizione 5.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabile parzialmente in $x \in \Omega$ rispetto a x_j per ogni $j = 1, \dots, n$. Si chiama gradiente di f in x il vettore*

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

Mentre la derivabilità in un punto per funzioni di una variabile reale assicura la continuità, esistono funzioni di più variabili reali che hanno tutte le derivate direzionali ma non sono continue. Questa è una conseguenza del fatto che per stabilire l'esistenza delle derivate direzionali facciamo dei limiti di rapporti incrementali lungo delle rette, che sono particolari restrizioni.

Esempio 5.2. *Consideriamo la funzione*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & se\, y = x^2 \neq 0 \\ 0, & altrimenti. \end{cases}$$

La funzione f non è continua in $(0,0)$ perchè non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, mentre per ogni vettore $u \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu) - f(0)}{t} = 0.$$

5.2. **Funzioni differenziabili.** Una condizione più forte dell'esistenza delle derivate direzionali è la seguente.

Definizione 5.4. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabile parzialmente in $x \in \Omega$ rispetto a x_j per ogni $j = 1, \dots, n$. Diciamo che f è differenziabile in $x \in \Omega$ se*

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle \nabla f(x), h\rangle}{\|h\|} = 0. \tag{7}$$

Ricordiamo che $\|h\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n h_j^2}$ è la norma Euclidea di un vettore $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Se vale la condizione (7) chiameremo differenziale di f in x l'applicazione lineare

$$df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad df(x)(h) = \langle \nabla f(x), h\rangle, \ \forall\, h \in \mathbb{R}^n.$$

La condizione (7) è equivalente alle seguente: per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ tale $x + h \in \Omega$

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \omega(h)\|h\|, \quad \text{d}ove\ \omega(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \tag{8}$$

che esprime il fatto che possiamo approsimare la funzione f con un polinomio di I grado in h a meno di infinitesi di ordine superiore a $\|h\|$.

Osservazione 5.2 (Differenziabilità per funzioni di una variabile)**.** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f è una derivabile in un punto x allora $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, e dunque*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)\cdot h}{h} = 0,$$

cioè f è differenziabile in x e $df(x)(h) = f'(x) \cdot h$ per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Esistono però funzioni di più variabili reali che hanno tutte le derivate direzionali, sono continue ma non sono diffrenziabili.

Esempio 5.3. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

Per ogni $u = (u_1, u_2) \neq (0,0)$ *si ha*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 u_1^3}{t^3(u_1^2 + u_2^2)} = \frac{u_1^3}{(u_1^2 + u_2^2)}$$

e dunque $\nabla f(0,0) = (1,0)$, *ma non esiste il limite per* $(x,y) \to 0$ *di*

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3 - x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

come si vede facilmente col metodo delle restrizioni, e dunque f *non è differenziabile in* $(0,0)$.

Teorema 5.1. *Se* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *è differenziabile in* $x \in \Omega$ *allora* f *è continua.*

Dimostrazione. Dalla condizione (8) segue che

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = \lim_{h \to 0} \left(f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \omega(h) \|h\| \right) = f(x)$$

perchè per la disuguaglianza di Cauchy Schwarz

$$|\langle \nabla f(x), h \rangle| \leq \|\nabla f(x)\| \|h\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

$\square$

5.3. **Matrice Jacobiana e differenziale per funzioni vettoriali.**

Definizione 5.5. *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m, f = (f_1, \ldots, f_m)$, *e* f_k *derivabile parzialmente in* $x \in \Omega$ *rispetto a* x_j *per ogni* $j = 1, \ldots, n$, *e per ogni*

$k = 1, \ldots, m$. *Si chiama matrice Jacobiana di* f *in* x *la matrice* $m \times n$

$$\begin{aligned} J_f(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definizione 5.6. *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m, f = (f_1, \ldots, f_m)$, *e* f_k *derivabile parzialmente in* $x \in \Omega$ *rispetto a* x_j *per ogni* $j = 1, \ldots, n$, *e per ogni* $k = 1, \ldots, m$. *Diciamo che* f *è differenziabile in* $x \in \Omega$ *se*

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - J_f(x) \cdot h}{\|h\|} = 0. \tag{9}$$

dove $\cdot$ *è il prodotto matrice per vettore.*

Se vale la condizione (9) *chiameremo differenziale di* f *in* x *l'applicazione lineare*

$$df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad df(x)(h) = J_f(x) \cdot h, \forall\, h \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 5.2. *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. *Sia* $x \in \Omega$ *e* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *un'applicazione lineare tale che*

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - T(h)}{\|h\|} = 0. \tag{10}$$

Allora f *è differenziabile in* x *e* $T \equiv df(x)$.

Dimostrazione. Posto

$$\omega(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - T(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

risulta per ogni h tale che $x + h \in \Omega$

$$f(x+h) - f(x) = T(h) + \omega(h)\|h\|$$

e dunque per $h = te_j$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{tT(e_j)+\omega(te_j)|t|}{t} = T(e_j)\end{aligned}$$

Dunque f è parzialmente derivabile in x rispetto a x_j per ogni $j = 1, \dots, n$ ed inoltre $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = T(e_j)$. Ma allora per ogni $h \in \mathbb{R}^n, h = \sum_{j=1}^n h_j e_j$ si ha per linearità

$$T(h) = \sum_{j=1}^n T(e_j)h_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j = J_f(x)\cdot h$$

e dunque f è differenziabile in x e $df(x) \equiv T$. □

Teorema 5.3 (Composizione di funzioni differenziabili)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, O \subseteq \mathbb{R}^m$ insiemi aperti, $f : \Omega \to O$, e $g : O \to \mathbb{R}^p$, f differenziabile in $x \in \Omega$, g differenziabile in $f(x)$. Allora $g \circ f$ è differenziabile in x e $d(g\circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$. Inoltre,*

$$J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x))\cdot J_f(x).$$

Dimostrazione. Per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ tale che $x + h \in \Omega$ si ha per (9) e (8) che

(11) $$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \omega(h)\|h\|, \quad \omega(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Inoltre, per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ tale che $f(x) + v \in O$ si ha

(12) $$g(f(x)+v) - g(f(x)) = dg(f(x))(v) + \omega_1(v)\|v\|, \quad \omega(v) \xrightarrow[v\to 0]{} 0.$$

Scegliamo ora $v = df(x)(h) + \omega(h)\|h\|$ in (12) e per (11) otteniamo

$$\begin{aligned}g(f(x+h)) - g(f(x)) =& g(f(x) + df(x)(h) + \omega(h)\|h\|) - g(f(x))\\ =& dg(f(x))\Big(df(x)(h) + \omega(h)\|h\|\Big)\\ &+ \omega_1\Big(df(x)(h) + \omega(h)\|h\|\Big)\Big\|df(x)(h) + \omega(h)\|h\|\Big\|\end{aligned}$$

Posto

$$\begin{aligned}\omega_2(h) &= \frac{dg(f(x))(\omega(h)\|h\|) + \omega_1\Big(df(x)(h) + \omega(h)\|h\|\Big)\Big\|df(x)(h) + \omega(h)\|h\|\Big\|}{\|h\|}\\ &= dg(f(x))\omega(h) + \omega_1\Big(df(x)(h) + \omega(h)\|h\|\Big)\Big\|df(x)(h/\|h\|) + \omega(h)\Big\|\end{aligned}$$

risulta $\omega_2(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ e dunque $g \circ f$ è differenziabile in x e $d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$ è l'applicazione che per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ opera nel seguente modo:

$$d(g \circ f)(x)(h) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x) \cdot h.$$

Allora, per il Teorema 5.2, necessariamente

$$J_{(g \circ f)}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x).$$

□

Corollario 5.1. *Nelle ipotesi del Teorema 5.3 con $n = p = 1$ si ha*

$$(g \circ f)'(x) = \langle \nabla g(f(x)), f'(x) \rangle.$$

Definizione 5.7. *Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si chiama segmento di estremi x e y l'insieme*

$$[x, y] = \{x + t(y - x),\ t \in [0, 1]\}$$

Definizione 5.8. *Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se per ogni $x, y \in A$ il segmento di estremi x e y è contenuto in A.*

Teorema 5.4 (Teorema del valor medio)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenziabile in ogni punto di Ω. Allora per ogni $x, y \in \Omega$ tali che $[x, y] \subseteq \Omega$ esiste un $z \in [x, y]$ tale che*

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(z), y - x \rangle$$

Dimostrazione. Sia $F(t) = f(x + t(y - x))$, per ogni $t \in [0, 1]$. Si ha che $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $]0, 1[$ e continua in $[0, 1]$ e $F(0) = f(x), F(1) = f(y)$. Per il teorema del valor medio di Lagrange per funzioni di una variabile reale (si veda ad esempio [5]) esiste un $\tau \in]0, 1[$ tale che

$$f(y) - f(x) = F(1) - F(0) = F'(\tau)$$

e per il Corollario 5.1

$$F'(\tau) = \langle \nabla f(x + \tau(y - x)), y - x \rangle$$

basta dunque scegliere $z = x + \tau(y - x)$ per ottenere l'asserto. □

5.4. Funzioni di classe C^1.

Definizione 5.9. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Indichiamo con $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ la classe delle funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabili parzialmente rispetto a x_j per ogni $j = 1, \dots, n$ e per ogni $x \in \Omega$ e tali che le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sono funzioni continue in Ω per ogni $j = 1, \dots, n$.*

Teorema 5.5. *Se $f \in C^1(\Omega, R)$ allora f è differenziabile in ogni punto di Ω.*

Dimostrazione. Lo dimostriamo nel caso $n = 2$. Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $h = h_1e_1 + h_2e_2 \in \mathbb{R}^2$ tale $x + h \in \Omega$, per il Teorema del valor medio per funzioni di una variabile reale esistono $\tau_1, \tau_2 \in]0, 1[$ tali che

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x + h_1e_1 + h_2e_2) - f(x + h_2e_2) + f(x + h_2e_2) - f(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + \tau_1 h_1 e_1 + h_2 e_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x + \tau_2 h_2 e_2)h_2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)h_2 + \omega(h)\|h\| \end{aligned}$$

dove, per la continuità delle derivate parziali,

$$\begin{aligned} \omega(h) = &\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x + \tau_1 h_1 e_1 + h_2 e_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right) h_1/\|h\| \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x + \tau_2 h_2 e_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right) h_2/\|h\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0. \end{aligned}$$

Dunque f è differenziabile in x. La dimostrazione si estende facilmente al caso $n > 2$. $\square$

Esempio 5.4. *La funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{se}\, x \neq 0 \\ 0, & \text{se}\, x = 0 \end{cases}$$

è differenziabile in ogni punto ma non è di classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Infatti

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{se}\, x \neq 0 \\ 0, & \text{se}\, x = 0 \end{cases}$$

non è continua in 0.

5.5. **Funzioni di classe C^k.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Indichiamo con $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$. Si chiama *matrice Hessiana* di f la matrice $n \times n$

$$\mathcal{H}_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Indichiamo con

$$C^2(\Omega, \mathbb{R}) = \{f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \in C(\Omega, \mathbb{R}) \; \forall \; k, j = 1, \dots, n\}.$$

In maniera analoga definiamo per ogni $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$

$$C^m(\Omega, \mathbb{R}) = \{f \in C^{m-1}(\Omega, \mathbb{R}) : \frac{\partial f}{\partial x_k} \in C^{m-1}(\Omega, \mathbb{R}) \; \forall \; k = 1, \dots, n\}.$$

Teorema 5.6 (Formula di Taylor per funzioni di classe C^2 con resto secondo Lagrange)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Per ogni $x, y \in \Omega$ tali che $[x, y] \subseteq \Omega$ esiste $z \in [x, y]$ tale che*

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{H}_f(z)(y - x), y - x\rangle$$

Dimostrazione. Sia $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $F(t) = f(x+t(y-x))$. Si ha $F(0) = f(x), F(1) = f(y)$, e $f \in C^2(]0, 1[) \cap C([0, 1])$. Per la formula di Taylor per funzioni di una variabile reale (si veda ad esmpio [5]) esiste un $\tau \in]0, 1[$ tale che

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\tau)$$

e per il Corollario 5.1

$$F'(\tau) = \langle \nabla f(x + \tau(y - x)), y - x\rangle, \quad F''(\tau) = \langle \mathcal{H}_f(x + \tau(y - x))(y - x), y - x\rangle.$$

Corollario 5.2 (Formula di Taylor per funzioni di classe C^2 con resto secondo Peano)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Per ogni $x \in \Omega$*

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{H}_f(x)(y - x), y - x\rangle + o(\|y - x\|^2)$$

per $y \to x$.

□

5.6. **Massimi e minimi relativi liberi.**

Definizione 5.10. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Diciamo che $x_0 \in \Omega$ è un punto di minimo relativo per f se esiste un $\delta > 0$ tale*

$$f(x_0) \le f(x) \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta) \cap \Omega.$$

Diciamo che $x_0 \in \Omega$ è un punto di minimo relativo stretto (o forte) per f se esiste un $\delta > 0$ tale

$$f(x_0) < f(x) \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta) \cap (\Omega \setminus \{x_0\}).$$

Diciamo che $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo relativo per f se esiste un $\delta > 0$ tale

$$f(x_0) \ge f(x) \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta) \cap \Omega.$$

Diciamo che $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo relativo stretto (o forte) per f se esiste un $\delta > 0$ tale

$$f(x_0) > f(x) \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta) \cap (\Omega \setminus \{x_0\}).$$

Si chiamano estremanti relativi i punti di massimo o minimo relativo.

Teorema 5.7. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \Omega$ un punto estremante relativo per f e supponiamo che per un vettore non nullo $u \in \mathbb{R}^n$ esista $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0)$. Allora*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = 0.$$

Dimostrazione. Sia x_0 un max relativo per f e sia $\delta > 0$ tale che $D(x_0, \delta) \subset \Omega$ e $f(x) \le f(x_0)$ per ogni $x \in D(x_0, \delta)$. Posto $I =]-\delta/\|u\|, \delta/\|u\|[$ definiamo $F : I \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(x_0 + tu)$. Si ha che $F(t) \le F(0) = f(x_0)$ per ogni $t \in I$ e F è derivabile in 0. Per il Teorema di Fermat per funzioni di una variabile reale (si veda ad esempio [5]) $F'(0) = 0$ e poichè

$$F'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0),$$

si ha $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = 0$. $\square$

Definizione 5.11. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \Omega$ si dice punto critico per f se esiste $\nabla f(x_0)$ e $\nabla f(x_0) = 0$.*

Corollario 5.3. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in \Omega$ è un punto estremante relativo per f allora x_0 è un punto critico.*

In generale non vale il viceversa del Corollario 5.3, come mostra il seguente esempio.

Esempio 5.5. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$. Il punto $(0,0)$ è un punto critico per f perchè $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$ si annulla nell'origine, però per ogni $\delta > 0$ nel $D(0,\delta)$ esistono sia punti in cui la f è positiva, sia punti in cui la f è negativa. Pertanto $(0,0)$ non è un punto estremante relativo.*

5.7. **Esercizi sul calcolo differenziale.**

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $u \neq 0$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Stabilire se esiste e calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ nei seguenti casi:
   (a) $f(x,y) = x + y$

   R. $\exists\, \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = u_1 + u_2$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   R. $\nexists\, \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$

   (c) $f(x,y) = x \exp(xy)$

   R. $\exists\, \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = u_1$

   (d) $f(x,y) = (x+y)^3$

   R. $\exists\, \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = 0$

   (e) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

   R. $\nexists\, \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$

(2) Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $(0,0)$ ed eventualmente calcolare $df(0,0)$ nei seguenti casi:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

R. f non è differenziabile in $(0,0)$.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

R. f non è differenziabile in $(0,0)$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

R. f è differenziabile in $(0,0)$ e $df(0,0) = 0$.

(3) Provare la differenziabilità e calcolare il differenziale delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nei punti indicati

(a) $f(x,y) = (x\cos y, x\sin y), \quad (0,0)$

R. $df(0,0)(h_1,h_2) = (h_1,0)$, per ogni $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $f(x,y) = (x\cosh y, x\sinh y), \quad (0,0)$ [2]

R. $df(0,0)(h_1,h_2) = (h_1,0)$, per ogni $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$.

(c) $f(x,y) = (\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}), \quad (0,0)$

R. $df(0,0)(h_1,h_2) = (h_1,h_2)$, per ogni $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$.

(4) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Stabilire per quali $k \in \mathbb{N}$ risulta $f \in C^k(\mathbb{R}^2)$ nei seguenti casi:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

R. $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ e $f \notin C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

[2] Ricordiamo che $\cosh y = \frac{e^y+e^{-y}}{2}$, $\sinh y = \frac{e^y-e^{-y}}{2}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

R. $f \notin C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

(c) $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$

R. $f \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

R. $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $f \notin C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

(e) $f(x,y) = x \sin \sqrt{x^2+y^2}$.

R. $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $f \notin C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

6. Varietà di $\mathbb{R}^n$.

In questa sezione $M \subset \mathbb{R}^n, M \neq \varnothing$.

Definizione 6.1. *Diciamo che M è una $p-$varietà di classe C^k, $k \geq 1$, $1 \leq p \leq n-1$, se per ogni $x_0 \in M$ esiste un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $x_0 \in \Omega$ ed una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-p}$, $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^{n-p})$ tali che:*

(i) $M \cap \Omega = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$

(ii) $J_f(x_0)$ *ha rango massimo* $n-p$.

In tal caso diremo che f è un'equazione locale di M in x_0. Diremo inoltre che p è la dimensione della varietà e $n-p$ è la codimensione.

In termini intuitivi: un punto di $\mathbb{R}^n$ vincolato a muoversi su una $p-$varietà ha p gradi di libertà, perchè è soggetto a $n-p$ vincoli.

Esempio 6.1. *La circonferenza unitaria $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ è una $1-$varietà di $\mathbb{R}^2$. In questo caso $\Omega = \mathbb{R}^2$ e $f(x,y) = x^2+y^2-1$. Si ha*

(i) $M \cap \Omega = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$

(ii) $J_f(x,y) = \nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ *ha rango massimo* 1 *in ogni punto di* M *in quanto* $(0,0) \notin M$.

Esempio 6.2. *La semicirconferenza* $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$ *non è una* $1-$ *varietà di* $\mathbb{R}^2$. *Il problema si presenta nei punti* $(1,0)$ *e* $(-1,0)$. *In* $P = (1,0)$ *ad esempio, comunque si scelga un disco* $D(P,\delta)$ *di centro* P *e raggio* $\delta > 0$, *posto* $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ *risulta*

(i) $M \cap \Omega = \{(x,y) \in D(P,\delta) : y \geq 0, f(x,y) = 0\} \neq \{(x,y) \in D(P,\delta) : f(x,y) = 0\}$

Proposizione 6.1. *Sia* $\mathcal{U}$ *un aperto di* $\mathbb{R}^p$ *e sia* $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-p}$ *una funzione di classe* C^k. *Il grafico della funzione* φ

$$\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) : x \in \mathcal{U}\} \tag{13}$$

è una $p-$*varietà di classe* C^k.

Dimostrazione. Posto $\Omega = \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{n-p}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n-p}$, $f(x,y) = y - \varphi(x)$ si ha

(i) $\Gamma_\varphi \cap \Omega = \{(x,y) \in \Omega : y = \varphi(x)\} = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\}$

(ii) $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -J_\varphi(x) & I_{n-p} \end{pmatrix}$ dove I_{n-p} è la matice identità in R^{n-p} (matrice $(n-p)\times(n-p)$ con tutti uno sulla diagonale e zeri altrove). Pertanto $J_f(x,y)$ ha rango massimo $n-p$ in ogni punto.

□

Utilizzando un profondo risultato, noto in letteratura come Teorema di Dini, è possibile dimostrare che ogni varietà è localmente il grafico di una funzione.

Diamo ora la definizione di vettore tangente ad una varietà.

Definizione 6.2. *Un vettore* $h \in \mathbb{R}^n$ *è tangente ad una varietà* M *in un punto* $x_0 \in M$ *se è tangente ad curva per* x_0 *su* M, *cioè se esiste* $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$ *derivabile in* 0 *tale che* $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = h$.

Indichiamo con

$$M_{x_0} = \{h \in \mathbb{R}^n : h \text{ tangente a } M \text{ in } x_0\}$$

Teorema 6.1. *Sia M una p-varietà di classe C^k e sia $x_0 \in M$ e f un'equazione locale di M in x_0. Allora* [3]

$$M_{x_0} = Ker\, df(x_0) \tag{14}$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo l'inclusione $\subseteq$ in (14). Sia $h \in M_{x_0}$, allora esiste $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$ derivabile in 0 e tale che $\gamma(0) = x_0$, e $\gamma'(0) = h$. Posto $F = f \circ \gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^{n-p}$ risulta $F(t) = f(\gamma(t)) \equiv 0$, per ogni $t \in]-\delta, \delta[$. Poichè F è derivabile in 0 si ha per il teorema del differenziale della composizione

$$0 = F'(0) = J_f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = J_f(x_0) \cdot h.$$

dunque $h \in \mathrm{K}er\, df(x_0)$.

La dimostrazione dell'inclusione $\supseteq$ richiede la costruzione (via il Teorema di Dini) di una curva in M per x_0 che ha $h \in \mathrm{K}er\, df(x_0)$ come vettore tangente in x_0. Per questa parte della dimostrazione suggeriamo la referenza [6]. $\square$

Da (14) segue che M_{x_0} è uno spazio vettoriale di dimensione p. In seguito chiameremo M_{x_0} lo *spazio tangente* a M in x_0. Chiamiamo *varietà tangente* a M in x_0

$$x_0 + M_{x_0} = \{x_0 + h : \ h \in M_{x_0}\}$$

il traslato di M_{x_0} per il punto x_0.

Osservazione 6.1. *Se $M = \Gamma_\varphi$ come nella Proposizione 6.1 e $(x_0, y_0) = (x_0, \varphi(x_0)) \in M$, allora*

$$\begin{aligned} M_{(x_0,y_0)} &= \{h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} : -J_\varphi(x) \cdot h_1 + I_{n-p} \cdot h_2 = 0\} \\ &= \{h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} : h_2 = J_\varphi(x) \cdot h_1\} \end{aligned}$$

[3] Ricordiamo che

$$\mathrm{K}er\, df(x_0) = \{h \in \mathbb{R}^n : df(x_0)h = 0\} = \{h \in \mathbb{R}^n : J_f(x_0) \cdot h = 0\}$$

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) + M_{(x_0,y_0)} &= \{(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} : (h_1, h_2) \in M_{(x_0,y_0)}\}\\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} : y - y_0 = J_\varphi(x) \cdot (x - x_0)\}\\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} : y = \varphi(x_0) + J_\varphi(x) \cdot (x - x_0)\}.\end{aligned}$$

Possiamo allora interpretare geometricamente la condizione di differenziabilità (9) *nel seguente modo: la funzione φ è differenziabile in x_0 se e solo se esiste lo spazio tangente al grafico della φ nel punto $(x_0, \varphi(x_0))$ ed esso approssima il grafico di φ $(x_0, \varphi(x_0))$, a meno di infinitesimi di ordine superiore a $\|x - x_0\|$ per $x \to x_0$.*

Definizione 6.3. *Sia M una p varietà di classe C^1 e sia $x_0 \in M$. Chiamiamo spazio ortogonale a M in x_0*

$$M_{x_0}^\perp = \{v \in R^n : \langle v, h\rangle = 0, \forall\ h \in M_{x_0}\}$$

$M_{x_0}^\perp$ è uno spazio vettoriale di dimensione $n - p$.

Teorema 6.2. *Se $f = (f_1, \dots, f_{n-p})$ è un'equazione locale della p varietà M in x_0 allora* [4]

$$M_{x_0}^\perp = Span\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_{n-p}(x_0)\}$$

Dimostrazione. Poichè $M_{x_0} = \mathrm{K}er\, df(x_0)$ si ha

$$M_{x_0}^\perp = \{v \in R^n : \langle v, h\rangle = 0\,\forall\, h\, \text{tale che}\, \langle \nabla f_j(x_0), h\rangle = 0, \forall\, j = 1, \dots, n - p\}$$

e dunque $\nabla f_j(x_0) \in M_{x_0}^\perp$ per ogni $j = 1, \dots, n - p$. Per la condizione (ii) della Definizione 6.1 i vettori $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_{n-p}(x_0)\}$ sono linearmente indipendenti e dunque sono una base di $M_{x_0}^\perp$. □

[4]Ricordiamo che

$$\mathrm{S}pan\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_{n-p}(x_0)\} = \left\{\sum_{j=1}^{n-p} c_j \nabla f_j(x_0), c_j \in \mathbb{R}, \forall\, j = 1, \dots, n - p\right\}$$

è lo spazio vettoriale generato da $\{\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_{n-p}(x_0)\}$

6.1. **Massimi e minimi relativi vincolati.** In questa sezione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $M \subset \Omega$ una p varietà di classe C^1 e $g : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definizione 6.4. *Diciamo che un punto $x_0 \in M$ è un punto di massimo relativo vincolato di g a M se esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$g(x) \leq g(x_0) \quad \text{per ogni}\, x \in M \cap D(x_0, \delta).$$

Diciamo che un punto $x_0 \in M$ è un punto di minimo relativo vincolato di g a M se esiste un $\delta > 0$ tale che

$$g(x) \geq g(x_0) \quad \text{per ogni}\, x \in M \cap D(x_0, \delta).$$

6.2. **Punti critici vincolati e Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.**

Definizione 6.5. *Sia Diciamo che $x_0 \in M$ è un punto critico vincolato di g a M se g differenziabile in x_0 e*

$$dg(x_0)(h) = 0 \quad \text{per ogni}\, h \in M_{x_0}.$$

Proposizione 6.2. *Sia $x_0 \in M$ e sia $f = (f_1, \ldots, f_{n-p})$ un'equazione locale di M in x_0. Se g è differenziabile in x_0 sono equivalenti*

(i) *x_0 è un punto critico vincolato di g su M*

(ii) $\nabla g(x_0) \in M_{x_0}^{\perp}$

(iii) *Esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p} \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\nabla g(x_0) = \sum_{j=1}^{n-p} \lambda_j \nabla f_j(x_0)$$

(iv) $\nabla g(x_0) \in \mathit{Span}\{\nabla f_1(x_0), \ldots, \nabla f_{n-p}(x_0)\}$

Dimostrazione. La condizione (i) si scrive come $\langle \nabla g(x_0), h\rangle = 0$ per ogni $h \in M_{x_0}$ e dunque vale (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Le condizioni (ii), (iii) e (iv) sono equivalenti per la Proposizione 6.2. $\square$

Teorema 6.3. *Se g è differenziabile in $x_0 \in M$ e x_0 è un punto di massimo (minimo) relativo vincolato di g su M allora x_0 è un punto critico vincolato di g su M.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 6.2 è sufficiente dimostrare che $\nabla g(x_0) \in M_{x_0}^{\perp}$. Sia dunque $h \in M_{x_0}$, allora esiste $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$ derivabile in 0 e tale che $\gamma(0) = x_0$, $\gamma'(0) = h$. Sia ora $G = g \circ \gamma$. Si ha che $G :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ ha un massimo (minimo) relativo libero in 0 e pertanto per il Teorema di Fermat

$$0 = G'(0) = \langle \nabla g(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle = \langle \nabla g(x_0), h \rangle.$$

Pertanto $\langle \nabla g(x_0), h \rangle = 0$ per ogni $h \in M_{x_0}$, e dunque $\nabla g(x_0) \in M_{x_0}^{\perp}$. □

Corollario 6.1 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange)**.** *Se g è differenziabile in $x_0 \in M$ e x_0 è un punto di massimo (minimo) relativo vincolato di g su M allora esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p} \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\nabla g(x_0) = \sum_{j=1}^{n-p} \lambda_j \nabla f_j(x_0) \tag{15}$$

Dimostrazione. Per il Teorema 6.3 x_0 è un punto critico vincolato di g su M. Per la Proposizione 6.2 esistono $n-p$ costanti reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p} \in \mathbb{R}$ tali che vale (15). □

Osserviamo esplicitamente che il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange fornisce una condizione necessaria perchè un punto della p-varietà M sia un massimo o minimo relativo vincolato per g su M. Pertanto possiamo concludere che solo i punti che verificano (15) sono candidati punti di massimo o minimo relativo vincolato di g su M.

6.3. **Esercizi sulle varietà e sul Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.**

(1) Stabilire quali dei seguenti insiemi sono 2 varietà di $\mathbb{R}^3$ di classe C^1:
   (a) SFERA

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

(b) Ellissoide

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\}$$

(c) Iperboloide Iperbolico

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

(d) Iperboloide Ellittico

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$$

(e) Paraboloide Ellittico

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 - z = 0\}$$

(f) Paraboloide Iperbolico

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 - y^2 - z = 0\}$$

(g) Cilindro

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 = 1\}$$

(h) Cono

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 = z^2\}$$

R. Le quadriche (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g) sono 2-varietà di $\mathbb{R}^3$.

Il cono (h) non è una 2-varietà di $\mathbb{R}^3$, ma

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 = z^2\} \setminus \{(0,0,0)\}$$

è una 2-varietà di $\mathbb{R}^3$.

Per visualizzare le quadriche dell'esercizio (1) si veda la pagina web
`http://www.dm.unibo.it/~montanar/HTML/quadriche.htm`

(2) Determinare $f(A)$ nei seguenti casi:

(a) $f(x,y) = x + y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 1\}$

R. $f(A) = \left[-\frac{3}{4^{4/3}}, 2\right]$

(b) $f(x,y,z) = zx + y^2, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \leq 1\}$

R. $f(A) = [-1, 5/4]$

(c) $f(x,y,z) = z + x^2 + y^2, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

R. $f(A) = [-1, 5/4]$

(d) $f(x,y,z) = yx, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$

R. $f(A) = [-1/2, 1/2]$

(e) $f(x,y,z) = x + y^2, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

R. $f(A) = [-1, 5/4]$

Suggeriamo la referenza [2] per gli esercizi svolti su questo argomento.

7. Teoria della misura di Peano-Jordan

Definizione 7.1. *Diciamo che $I \subset \mathbb{R}^n$ è un intervallo compatto se esistono n intervalli compatti di R, $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ tali che*

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

In tal caso definiamo

$$\operatorname{mis}(I) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \in \mathbb{R}.$$

Definizione 7.2. *Diciamo che $P \subset \mathbb{R}^n$ è un plurintervallo compatto se è unione di un numero finito m di intervalli compatti di $\mathbb{R}^n$:*

$$P = \bigcup_{k=1}^{m} I_k, \tag{16}$$

I_k intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$ per ogni $k = 1, \ldots, m$.

Osservazione 7.1. *Se P è un plurintervallo compatto allora esistono un numero finito m' di intervalli compatti con interni a due a due disgiunti tali che*

$$P = \bigcup_{k=1}^{m'} J_k, \quad \mathit{int}\, J_k \cap \mathit{int}\, J_{k'} = \emptyset, \ \forall k \neq k'. \tag{17}$$

Dimostrazione. Basta prolungare i lati del plurintervallo. □

Definizione 7.3. *Sia P un plurintervallo compatto di $\mathbb{R}^n$. Definiamo*

$$\operatorname{mis}(P) = \sum_{k=1}^{m'} \operatorname{mis}(J_k)$$

con J_k come in (17).

Osserviamo esplicitamente che la definizione precedente non dipende dalla particolare scomposizione del plurintervallo.

In quanto segue indicheremo sempre con $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato.

Definizione 7.4. *Chiamiamo misura interna di $A \neq \emptyset$ con $int\, A \neq \emptyset$*

$$\operatorname{mis}_*(A) = \sup\{\operatorname{mis} P,\ P \, \textit{plurintervallo compatto}\,, P \subset int\, A\}$$

Se $A = \emptyset$ oppure $int\, A = \emptyset$ poniamo $\operatorname{mis}_*(A) = 0$.

Chiamiamo misura esterna di $A \neq \emptyset$

$$\operatorname{mis}^*(A) = \inf\{\operatorname{mis} Q,\ Q \, \textit{plurintervallo compatto}\,, \bar{A} \subset Q\}$$

Se $A = \emptyset$ poniamo $\operatorname{mis}^*(A) = 0$.

Diremo che l'insieme A è misurabile secondo Peano Jordan se $\operatorname{mis}^*(A) = \operatorname{mis}_*(A)$ *ed in tal caso chiamiamo misura di A*

$$\operatorname{mis}(A) = \operatorname{mis}^*(A) = \operatorname{mis}_*(A).$$

Osservazione 7.2. *Se I è un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$ si ha*

$$\operatorname{mis}_*(I) = \operatorname{mis}^*(I) = \operatorname{mis}(I)$$

Proposizione 7.1. *Per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato si ha*

(i) $\operatorname{mis}_*(A) = \operatorname{mis}_*(int\, A)$

(ii) $\operatorname{mis}^*(A) = \operatorname{mis}^*(\bar{A})$

(iii) $\operatorname{mis}_*(A) \leq \operatorname{mis}^*(A)$

(iv) $\operatorname{mis}^*(A) = \operatorname{mis}_*(A) + \operatorname{mis}^*(Fr\, A)$

Dimostrazione. Le proprietà $(i), (ii), (iii)$ seguono immediatamente dalle definizioni di misura interna ed esterna. La proprietà (iv) è una conseguenza del fatto che per ogni plurintervallo $P \subset \mathrm{i}nt\, A$ e $Q \supset \bar{A}$ l'insieme $Q \setminus \mathrm{i}nt\, P$ è un plurintervallo che contiene $\mathrm{F}r\, A$. $\square$

Corollario 7.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato. L'insieme A è misurabile se e solo se* $\text{mis}^*(Fr\, A) = 0$.

Il seguente risultato, che non dimostreremo, può essere utile per stabilire se un insieme è misurabile.

Proposizione 7.2. *Siano $I \subset \mathbb{R}^n$ intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$ e $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora* $\text{mis}^*(\{x \in I : f(x) = 0\}) = 0$.

Pertanto gli insiemi

$$\{x \in I : f(x) \leq 0\}$$

$$\{x \in I : f(x) < 0\}$$

$$\{x \in I : f(x) \geq 0\}$$

$$\{x \in I : f(x) > 0\}$$

sono insiemi misurabili.

Esempio 7.1. *L'insieme $A = [0,1] \times [0,1] \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ non è misurabile perchè $intA = \emptyset$ e dunque* $\text{mis}_*(A) = 0$, *mentre* $\bar{A} = [0,1] \times [0,1]$ *e* $\text{mis}^*(A) = \text{mis}([0,1] \times [0,1]) = 1$.

In seguito indicheremo con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ limitati e misurabili secondo Peano-Jordan.

Vediamo ora alcune proprietà elementari degli insiemi misurabili.

Proposizione 7.3. *Siano $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre*

(1) *Se $intA \cap intB = \emptyset$ allora* $\text{mis}(A \cup B) = \text{mis}(A) + \text{mis}(B)$
(2) *Se $B \subset A$ allora* $\text{mis}(A \setminus B) = \text{mis}(A) - \text{mis}(B)$
(3) $\text{mis}(A \cup B) = \text{mis}(A) + \text{mis}(B) - \text{mis}(A \cap B)$

Dimostrazione. (1) Segue dalla definizione

(2) Poichè $A = (A \setminus B) \cup B$ e $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$, si ha $\operatorname{mis}(A) = \operatorname{mis}(A \setminus B) + \operatorname{mis} B$.

(3) Poichè $A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$ e $(A \setminus (A \cap B)) \cap B = \emptyset$, si ha $\operatorname{mis}(A \cup B) = \operatorname{mis}(A \setminus (A \cap B)) + \operatorname{mis} B = \operatorname{mis} A - \operatorname{mis}(A \cap B) + \operatorname{mis}(B)$.

□

Corollario 7.2 (Addittività della misura)**.** *Siano $A_1, \dots, A_m$ un numero finito di insiemi di $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tali che $intA_j \cap intA_k = \emptyset$ per ogni $j \neq k$. Allora*

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{mis}\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{mis}(A_j)$$

8. Integrale multiplo.

In questa sezione $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \mathbb{R}$.

Denotiamo con

$$S(f) = \{x \in A : f \, non \, e' \, continua \, in \, x\}$$

l'insieme dei punti di discontinuità della funzione f.

Definizione 8.1. *Diciamo che la funzione f è continua q.d. (quasi dappertutto) in A se*

$$\operatorname{mis}^*(S(f)) = 0.$$

Definizione 8.2. *Una partizione σ di $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ è una famiglia finita di insiemi $\{A_1, \dots, A_m\}$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ tali che*

(1) $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$
(2) *$intA_j \cap intA_k = \emptyset$ per ogni $j \neq k$.*

Definizione 8.3. *Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e f continua q.d. e limitata. Per ogni partizione $\sigma = \{A_1, \dots, A_m\}$ di A denotiamo con*

$$S(f, \sigma) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sup_{A_j} f\right) \operatorname{mis}(A_j)$$

la somma superiore di f relativa a σ ed indichiamo con

$$\int_A f = \int_A f(x)dx = \inf_\sigma S(f,\sigma).$$

Osserviamo che, poichè f è limitata,

$$\int_A f \leq \left(\sup_A f\right) \sum_{j=1}^m \mathrm{mis}\,(A_j) = \left(\sup_A f\right) \mathrm{mis}\,(A) \in \mathbb{R}.$$

Posto inoltre

$$s(f,\sigma) = \sum_{j=1}^m \left(\inf_{A_j} f\right) \mathrm{mis}\,(A_j)$$

la somma inferiore di f relativa a σ, utilizzando la continuità q.d. di f si verifica che

$$\int_A f = \sup_\sigma s(f,\sigma).$$

Vediamo ora alcune proprietà elementari dell'integrale multiplo.

Proposizione 8.1. *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ continue q.d. e limitate su $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora*

(1) $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$
(2) *Per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha* $\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f$
(3) *Se $f \leq g$ allora* $\int_A f \leq \int_A g$.
(4) *Se $B \subset A$, $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ allora* $\int_A f = \int_B f + \int_{A\setminus B} f$.

La Proposizione 8.1 segue dalla definizione di integrale multiplo. Per le dimostrazioni dettagliate suggeriamo la referenza [7].

Teorema 8.1. *Siano $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $A = A_1 \cup A_2$ e $f : A \to \mathbb{R}$ continua q.d. e limitata. Allora*

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f - \int_{A_1 \cap A_2} f.$$

Dimostrazione. Siano $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ le seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_2 \setminus (A_1 \cap A_2) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per la Proposizione 8.1 si ha

$$\begin{aligned} \int_A f = \int_A (f_1 + f_2) = \int_A f_1 + \int_A f_2 = \int_{A_1} f + \int_{A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)} f \\ = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f - \int_{A_1 \cap A_2} f. \end{aligned}$$

□

Corollario 8.1. *Siano $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $A = \bigcup_{k=1}^p A_k$, $intA_k \cap intA_h = \emptyset$ per $k \neq h$ e $f : A \to \mathbb{R}$ continua q.d. e limitata. Allora*

$$\int_A f = \sum_{k=1}^p \int_{A_k} f.$$

Corollario 8.2. *Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ limitate e continue q.d. Se $f = g$ q.d. allora*

$$\int_A f = \int_A g$$

Dimostrazione. Posto $B = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ si ha $\text{mis}^*(B) = 0$ e dunque

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_{A \setminus B} f + \int_B f \\ &= \int_{A \setminus B} g + \int_B f = \int_A g. \end{aligned}$$

□

8.1. **Teorema di riduzione.** In questa sezione mostreremo come ridurre il calcolo di integrali multipli al calcolo di integrali semplici ripetuti. Cominciamo dal caso di una funzione su un intervallo compatto di $\mathbb{R}^2$.

Lemma 8.1. *Siano $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, e $f : I \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti:*

- *f è continua q.d. e limitata su I*
- *Per ogni $x \in [a_1, b_1]$ l'applicazione $y \longmapsto f(x,y)$ è continua q.d. e limitata su $[a_2, b_2]$ e la funzione $F : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$*
$$F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy$$
è continua q.d. e limitata su $[a_1, b_1]$.
- *Per ogni $y \in [a_2, b_2]$ l'applicazione $x \longmapsto f(x,y)$ è continua q.d. e limitata su $[a_1, b_1]$ e la funzione $G : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$*
$$G(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx$$
è continua q.d. e limitata su $[a_2, b_2]$.

Se una delle precedenti condizioni equivalenti è verificata allora

$$\int_I f = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx \right) dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy \right) dx \tag{18}$$

Per la dimostrazione del Lemma 8.1 suggeriamo la referenza [7]. Questo risultato si estende facilmente al caso di $\mathbb{R}^n$. Precisamente vale il seguente corollario.

Corollario 8.3. *Siano $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $p + q = n$ e sia $I = I_1 \times I_2$, con I_1, I_2 intervalli compatti di $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$ rispettivamente. Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti:*

- *f è continua q.d. e limitata su I*
- *Per ogni $x \in I_1$ l'applicazione $y \longmapsto f(x,y)$ è continua q.d. e limitata su I_2 e la funzione $F : I_1 \to \mathbb{R}$*
$$F(x) = \int_{I_2} f(x,y)dy$$
è continua q.d. e limitata su I_1.
- *Per ogni $y \in I_2$ l'applicazione $x \longmapsto f(x,y)$ è continua q.d. e limitata su I_1 e la funzione $G : I_2 \to \mathbb{R}$*
$$G(y) = \int_{I_1} f(x,y)dx$$
è continua q.d. e limitata su I_2.

Se una delle precedenti condizioni equivalenti è verificata allora

$$\int_I f = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x,y)dx \right) dy = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,y)dy \right) dx \tag{19}$$

Vediamo ora il caso di una qualsiasi insieme $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$. Siano $\Pi_1(A), \Pi_2(A)$ le proiezioni di A sull'asse delle x e sull'asse delle y rispettivamente. Per ogni $x \in \Pi_1(A)$ indichiamo con

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\}$$

e dunque

$$\Pi_1(A) = \{x \in \mathbb{R} : A_x \neq \emptyset\}$$

. Analogalmente, per ogni $y \in \Pi_2(A)$ indichiamo con

$$A_y = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\}$$

e dunque

$$\Pi_2(A) = \{y \in \mathbb{R} : A_y \neq \emptyset\}$$

. Vale il seguente

Teorema 8.2 (Teorema di riduzione in $\mathbb{R}^2$)**.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$. Sono equivalenti:*

- *f è continua q.d. e limitata su A*
- *Per ogni $x \in \Pi_1(A)$ l'applicazione $y \longmapsto f(x,y)$ è continua q.d. e limitata su A_x e la funzione $F : \Pi_1(A) \to \mathbb{R}$*
$$F(x) = \int_{A_x} f(x,y)dy$$
è continua q.d. e limitata su $\Pi_1(A)$.
- *Per ogni $y \in \Pi_2(A)$ l'applicazione $x \longmapsto f(x,y)$ è continua q.d. e limitata su A_y e la funzione $G : \Pi_2(A) \to \mathbb{R}$*
$$G(y) = \int_{A_y} f(x,y)dx$$
è continua q.d. e limitata su $\Pi_2(A)$.

Se una delle precedenti condizioni equivalenti è verificata allora

$$\int_A f = \int_{\Pi_2(A)} \left(\int_{A_y} f(x,y)dx \right) dy = \int_{\Pi_1(A)} \left(\int_{A_x} f(x,y)dy \right) dx \tag{20}$$

Dimostrazione. Posto $I = \Pi_1(A) \times \Pi_2(A)$ e $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ la funzione così definita

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A; \\ 0, & (x,y) \notin A \end{cases}$$

risulta $\tilde{f}$ continua q.d. e limitata su I. Inoltre per $\tilde{f}$ vale il Lemma 8.1 su I e dunque

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_A \tilde{f} + \int_{I \setminus A} \tilde{f} = \int_I \tilde{f} \\ &= \int_{\Pi_1(A)} \left(\int_{\Pi_2(A)} \tilde{f}(x,y)dy \right) dx \\ &= \int_{\Pi_1(A)} \left(\int_{\Pi_2(A) \setminus A_x} \tilde{f}(x,y)dy + \int_{A_x} \tilde{f}(x,y)dy \right) dx \\ &= \int_{\Pi_1(A)} \left(\int_{A_x} f(x,y)dy \right) dx. \end{aligned}$$

In maniera analoga si dimostra che

$$\int_A f = \int_{\Pi_2(A)} \left(\int_{A_y} f(x,y)dx \right) dy.$$

□

Il teorema di riduzione si estende facilmente a più variabili reali e pertanto permette di ricondurre il calcolo di un integrale multiplo in $\mathbb{R}^n$ al calcolo di n integrali semplici ripetuti.

Teorema 8.3 (Teorema di riduzione in $\mathbb{R}^n$)**.** *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $p + q = n, pq \in \mathbb{N}$. *Poniamo*

$$A_y = \{x \in \mathbb{R}^p : (x,y) \in A\}$$

e

$$\Pi_2(A) = \{y \in \mathbb{R}^q : A_y \neq \emptyset\}.$$

Analogalmente, poniamo

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^q : (x,y) \in A\}$$

e

$$\Pi_1(A) = \{x \in \mathbb{R}^p : A_x \neq \emptyset\}.$$

Sono equivalenti:

- f *è continua q.d. e limitata su* A
- *Per ogni* $x \in \Pi_1(A)$ *l'applicazione* $y \longmapsto f(x,y)$ *è continua q.d. e limitata su* A_x *e la funzione* $F : \Pi_1(A) \to \mathbb{R}$

  $$F(x) = \int_{A_x} f(x,y)dy$$

  è continua q.d. e limitata su $\Pi_1(A)$.
- *Per ogni* $y \in \Pi_2(A)$ *l'applicazione* $x \longmapsto f(x,y)$ *è continua q.d. e limitata su* A_y *e la funzione* $G : \Pi_2(A) \to \mathbb{R}$

  $$G(y) = \int_{A_y} f(x,y)dx$$

  è continua q.d. e limitata su $\Pi_2(A)$.

Se una delle precedenti condizioni equivalenti è verificata allora

$$\int_A f = \int_{\Pi_2(A)} \left(\int_{A_y} f(x,y)dx \right) dy = \int_{\Pi_1(A)} \left(\int_{A_x} f(x,y)dy \right) dx \tag{21}$$

8.2. **Teorema del cambiamento di variabile.**

Definizione 8.4. *Siano* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *aperti. Un cambiamento di variabile è una funzione* $\varphi : B \to A$ *di classe* C^1, *iniettiva e suriettiva e tale che* $\det J_\varphi(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in B$.

Esempio 8.1. *La mappa lineare* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = M \cdot x$, *dove* $\cdot$ *è il prodotto matrice per vettore, è un cambiamento di variabile se e solo se* $\det M \neq 0$.

Esempio 8.2 (Coordinate polari)**.** *Sia* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < r^2, \} \setminus \{(x,0), x \geq 0\}$*. L'applicazione* $\varphi :]0,r[\times]0,2\pi[\to A$

$$\varphi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

è un cambiamento di variabile in quanto è C^1*, iniettiva e suriettiva,*

$$J_\varphi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

e $\det J_\varphi(\rho,\theta) = \rho \neq 0$*.*

Esempio 8.3 (Coordinate sferiche)**.** *Sia* $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < r^2\} \setminus \{(x,0,z), x \geq 0\}$ *il disco di centro l'origine e raggio* r *meno un semipiano. L'applicazione* $\varphi :]0,r[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[\to A$

$$\varphi(\rho,\theta,\phi) = (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)$$

è un cambiamento di variabile in quanto

$$J_\varphi(\rho,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix}$$

e $\det J_\varphi(\rho,\theta,\phi) = -\rho^2\sin\phi \neq 0$*.*

Enunciamo ora il teorema del cambiamento di variabile nell'integrale multiplo senza dimostrarlo.

Teorema 8.4 (Teorema del cambiamento di variabile)**.** *Siano* $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *continua q.d. e limitata. Siano* $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\varphi : B \to A$ *un cambiamento di variabile. Allora* $f \circ \varphi |\det J_\varphi|$ *è continua q.d. e si ha*

$$\int_A f = \int_B f \circ \varphi |\det J_\varphi|$$
$$\int_A f(x)dx = \int_B f(\varphi(y)) \cdot |\det J_\varphi(y)| dy$$

Il termine $|\det J_\varphi|$ si chiama coefficiente di distorsione. Esso tiene conto del fatto che un cambiamento di variabile può dilatare l'insieme di partenza, cambiandone quindi la misura.

8.3. **Esercizi sull'integrale multiplo.**

(1) Calcolare $\int_A f$ nei seguenti casi:

(a) $f(x,y) = x + y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

R. $\int_A f = 5/6$

(b) $f(x,y) = xy, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 1\}$

R. $\int_A f = 0$

(c) $f(x,y) = x + y, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 1 - x^2\}$

R. $\int_A f = \sqrt{2}/3$

(d) $f(x,y) = e^x, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 1\}$

R. $\int_A f = e - 2$

(e) $f(x,y) = 1, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\}$

R. $\int_A f = \pi r^2$

(f) $f(x,y,z) = 1 \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$

R. $\int_A f = \frac{4}{3}\pi r^3$

(g) $f(x,y,z) = z^2, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \ge 0\}$

R. $\int_A f = \frac{2}{15}\pi$

(h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 1\}$

R. $\int_A f = \pi/2$

(i) $f(x,y,z) = 1, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le 1\}$

R. $\int_A f = \pi/2$

(j) $f(x,y,z) = 1, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1\}$

R. $\int_A f = \frac{2}{3}\pi$

(k) $f(x) = e^{-x^2}, \quad A = \mathbb{R}$

R. $\int_A f = \sqrt{\pi}$

Suggeriamo la referenza [3] per gli esercizi svolti su questo argomento.

Esempi di esercizi proposti agli appelli scritti sono disponibili alla pagina web `http://www.dm.unibo.it/~montanar/HTML/scritti04-05.pdf`

9. Appendice: Alfabeto greco

α alpha

β beta

γ gamma, Γ Gamma

δ delta, Δ Delta

ϵ ε epsilon

ζ zeta

η eta

θ ϑ theta, Θ Theta

ι iota

κ kappa

λ lambda, Λ Lambda

μ mu

ν nu

ξ xi, Ξ Xi

o o

π pi, Π Pi

ρ ϱ rho

σ ς sigma, Σ Sigma

τ tau

υ upsilon, Υ Upsilon

ϕ φ phi, Φ Phi

χ chi

ψ psi, Ψ Psi

ω omega, Ω Omega

Indice analitico

addittività della misura, 44
cambiamento di variabile, 50
chiusura di un insieme, 6
cilindro, 40
codimensione di una varietà, 34
completezza sequenziale di $\mathbb{R}^n$, 17
cono, 40
coordinate polari, 51
coordinate sferiche, 51
derivata direzionale, 22
derivata parziale, 23
differenziale della composizione, 27
differenziale per funzioni vettoriali, 26
differenziale, 24
dimensione di una varietà, 34
disco aperto, 5
distanza Euclidea, 5
disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, 4
disuguaglianza triangolare, 4
disuguaglianza triangolare, 5
ellissoide, 40
equazione locale di una varietà, 34
formula di Taylor per funzioni di classe C^2
con resto secondo Lagrange, 30
formula di Taylor per funzioni di classe C^2
con resto secondo Peano, 30
frontiera, 7
funzione continua q.d., 44
funzione continua, 19
funzione di restrizione, 10
funzione differenziabile, 24
funzioni di classe C^1, 29
funzioni di classe C^k, 30
gradiente, 23
grafico di una funzione, 35
insieme aperto, 6
insieme chiuso, 6
insieme compatto, 18
insieme connesso per archi, 20
insieme convesso, 28
insieme derivato, 8
insieme limitato, 18
integrale multiplo di Riemann, 45
intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$, 41
iperboloide ellittico, 40
iperboloide iperbolico, 40
limite $-\infty$, 10
limite $+\infty$, 9
limite della composizione, 13
limite di una funzione, 8
limiti per funzioni vettoriali, 13
massimi e minimi relativi liberi, 31
massimi e minimi relativi vincolati, 38
matrice Hessiana, 30
matrice Jacobiana, 26
metodo delle restrizioni, 10
misura di Peano Jordan, 42
misura esterna, 42
misura interna, 42
norma Euclidea, 4
paraboloide ellittico, 40
paraboloide iperbolico, 40
partizione di un insieme misurabile, 44
plurintervallo compatto, 41
prodotto interno Euclideo, 3
prodotto interno, 3

punti estremanti relativi, 31
punto aderente, 6
punto critico vincolato, 38
punto critico, 32
punto di accumulazione, 7
punto interno, 6
sfera, 39
somma inferiore, 45
somma superiore, 45
spazio ortogonale, 37
spazio tangente, 36
successioni convergenti, 16
successioni di Cauchy, 16
teorema dei moltiplicatori di Lagrange, 39
teorema del cambiamento di variabile nell'integrale, 51
teorema del confronto, 11
teorema del confronto, 12
teorema del valor medio, 28
teorema della permanenza del segno, 12
teorema di Bolzano, 20
teorema di Dini, 35
teorema di riduzione per insiemi misurabili, 48
teorema di riduzione su intervalli, 46
teorema di Weierstrass, 21
unicità del limite di una successione, 16
unicità del limite, 9
varietà, 34
varietà tangente, 36
vettore tangente ad una varietà, 35

Riferimenti bibliografici

[1] A. Favini, E. Lanconelli, E. Obrecht, C. Parenti. Esercizi di analisi matematica: secondo corso, $\mathbb{R}^n$, continuità. Bologna. Cooperativa Libraria Universitaria, 1973.

[2] A. Favini, E. Lanconelli, E. Obrecht, C. Parenti. Esercizi di analisi matematica: secondo corso, differenziabilità massimi e minimi integrali curvilinei e 1-forme differenziali. Bologna. Cooperativa Libraria Universitaria, 1973.

[3] A. Favini, E. Lanconelli, E. Obrecht, C. Parenti. Esercizi di analisi matematica: secondo corso, integrazione. Bologna. Cooperativa Libraria Universitaria, 1973.

[4] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone. Analisi matematica due. Napoli. Liguori Editore, 1996.

[5] E. Lanconelli. Lezioni di analisi matematica 1. Bologna. Pitagora Editrice, 1994.

[6] E. Lanconelli. Lezioni di analisi matematica 2. Bologna. Pitagora Editrice, 1995.

[7] E. Lanconelli, E. Obrecht. Teoria di analisi 2: Integrale multiplo. Bologna. Pitagora Editrice, 1980.