Equazioni Differenziali a variabili separabili

$$(1) \qquad y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

$f \in C(I)$, $g \in C(J)$, $g(y) \neq 0$ $\forall y \in J$

I e J intervalli di $\mathbb{R}$

Integrando (1) dopo aver moltiplicato per $g(y)$ a destra e a sinistra si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} g(y(t))\, y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \qquad x_0 \in I$$

$\|$ posto $y(t) = s$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} g(s)\, ds$$

Pertanto la SOLUZIONE di (1) è definita implicitamente da

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} g(s)\, ds = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

Esempio

$$y' = 1 + y^2$$

In questo caso $f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g(y) = \frac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

e la soluzione è definita implicitamente da

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{1+s^2}\, ds = \int_{x_0}^{x} dt = x - x_0$$

$$\parallel$$

$$\left[\operatorname{arctg} s\right]_{s=y(x_0)}^{s=y(x)} = \operatorname{arctg} y(x) - \operatorname{arctg} y(x_0)$$

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica SOLUZIONE definita implicitamente da

$$\operatorname{arctg} y(x) = x$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \operatorname{tg} x \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

è l'unica soluzione

Pennello di Peano

Consideriamo il (PC)

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La funzione $y \equiv 0$ è soluzione di (PC) ma non è l'unica, anzi ne esistono ∞.

Sia infatti $\alpha > 0$ e

$$y_\alpha(x) = \begin{cases} 0 \ , & x < \alpha \\ \left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2 , & x \geq \alpha \end{cases}$$

Si ha che $y_\alpha \in C^1(\mathbb{R})$ e

$$y_\alpha'(x) = \begin{cases} 0 \ , & x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{2} \ , & x \geq \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_\alpha'(x) = \sqrt{y_\alpha(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

e $y_\alpha(0) = 0$

Sia ora $f \in C(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

e consideriamo il (PC)

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \alpha \end{cases}$$

con $(x_0, \alpha) \in \Omega$.

Il pennello di Peano ci dice che in generale la SOLUZIONE di (PC) non è unica.

<u>PROP</u> $u \in C^1(I)$, con $x_0 \in I$, è soluzione di (PC) se e solo se $u \in C(I)$ è soluzione di

$$(EV) \quad u(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt$$

(che si chiama equazione integrale di Volterra)

Dim

Se $u \in C^1(I)$ è soluzione di (PC)

integro a destra e sinistra di

$$u'(x) = f(x, u(x))$$ ed ottengo

$$\int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt$$

$\parallel \to$ per il Teo fondamentale del calcolo integral

$$[u(t)]_{t=x_0}^{t=x} = u(x) - u(x_0) = u(x) - \alpha$$

$$\Rightarrow u(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt$$

Viceversa, se $u \in C(I)$ è soluzione di (EV)

$\Rightarrow t \to f(t, u(t))$ è continua

$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt$ è derivabile

per il Teor. fondamentale del calcolo integrale e

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt\right)' = f(x, u(x)) \in C(I)$$

$\Rightarrow u \in C^1(I)$ e $u'(x) = f(x, u(x))$

e $u(x_0) = \alpha$ $\Rightarrow$ u è soluz. di (PC).

Metodo delle approssimazioni successive

è un procedimento iterativo che converge ad una soluzione di (PC).

Definiamo l'operatore

$$T : C(I) \longrightarrow C(I)$$

$$Tu(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))\, ds$$

Trovare una soluzione di (EV) significa trovare un punto fisso di T, cioè una funzione $u \in C(I)$ t.c. $Tu = u$ su I, cioè $Tu(x) = u(x) \quad \forall x \in I$.

Troveremo questo punto fisso come limite di una successione di funzioni

Definisco

$u_0 \equiv \alpha$, cioè $u_0(x) = \alpha \quad \forall x \in I$

$u_1 = Tu_0$, cioè $u_1(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} f(t, u_0(t))\, dt$

$\forall x \in I$

...

$u_m = Tu_{m-1}$

Si verifica che

1. $u_n \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} u \in C(I)$ (u_n converge uniformemente a u)

cioè

$$\sup_{x \in I} |u_n(x) - u(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

2. $$u_n = T(u_{n-1}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} Tu$$
$$\downarrow n \to +\infty$$
$$u$$

e per l'unicità del limite

$$Tu = u.$$

Pertanto, posto $u = \lim_{n \to +\infty} u_n$

u è soluzione di (EV)

e dunque u è sol di (PC).

Esempio

Consideriamo il

$$(PC)\ \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sappiamo che l'unica soluzione di (PC) è $y(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

perchè l'eq. diff. è lineare omogenea.

Applichiamo il metodo delle ap. succ.

Definiamo

$$u_0 = 1$$

$$u_1(x) = T u_0(x) = 1 + \int_0^x u_0 \, dt = 1 + x$$

$$u_2(x) = T u_1(x) = 1 + \int_0^x u_1(s)\, ds$$

$$= 1 + \int_0^x (1+s)\, ds = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$u_3(x) = 1 + \int_0^x u_2(t)\, dt = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

...

$$u_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} e^x$$

Teorema di Peano-Picard

Diciamo che $f \in C(\Omega)$ è localmente Lipschitziana in y uniformemente in x se $\forall\, \overline{I \times J} \subset \Omega$

$\exists\, L > 0$ t.c.

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq L\,|y-z|$$

$\forall x \in I$ e $\forall y,z \in J$

<u>OSS</u> Se $\exists\, \frac{\partial f}{\partial y}$ ed è limitata in Ω

$\Rightarrow$ per il Teorema del valor medio di Lagrange $\exists\, y^* \in [y,z]$ t.c.

$$|f(x,y) - f(x,z)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*)\,(y-z)\right|$$

$$\leq L\,|y-z|$$

$$\text{con } L = \sup_{I \times J} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

e dunque f è localmente Lip in y unif in x.

Teorema di Peano Picard

(Di esistenza ed unicità locale di una sol di PC)

Sia $f \in C(\Omega)$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

f LOCALMENTE Lipschitziana in y uniformemente in x

(oppure $\frac{\partial f}{\partial y}$ limitata in Ω)

$\Rightarrow \exists\, u \in C^1([x_0-\delta, x_0+\delta])$

soluzione di (PC)

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = \alpha \end{cases}$$

$(x_0, \alpha) \in \Omega$

e inoltre se $v \in C^1(J)$ è un'altra soluzione di (PC) si ha

$$u(x) = v(x) \quad \forall x \in I \cap J$$

Dim dell' unicità

Siano $u = Tu$ in $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$v = Tv$ in I

$$\Rightarrow |u(x) - v(x)| = |Tu(x) - Tv(x)|$$

$$= \left| \cancel{\alpha} + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt - \cancel{\alpha} - \int_{x_0}^{x} f(t, v(t))\,dt \right|$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} \big(f(t,u(t)) - f(t,v(t)) \big)\,dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} | f(t,u(t)) - f(t,v(t)) |\,dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L\, |u(t) - v(t)|\,dt \right| \quad (*)$$

$$\leq L\,|x - x_0| \sup_{t \in I} |u(t) - v(t)|$$

posto $\|u - v\| = \sup_{t \in I} |u(t) - v(t)|$

abbiamo che $\forall x \in I$

$$|u(x) - v(x)| \leq L\,|x - x_0|\, \|u - v\|$$

e sostituendo questa stima in $(*)$

$$|u(x)-v(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} L \cdot L\, |t-x_0|\, dt \right| \cdot \|u-v\|$$

$$\leq L^2 \left[\frac{|t-x_0|^2}{2} \right]_{t=x_0}^{t=x} \cdot \|u-v\|$$

$$= L^2 \frac{|x-x_0|^2}{2} \|u-v\|$$

e sostituendolo in ⊛ questa nuova stima

$$|u(x)-v(x)| \leq L^3 \frac{|x-x_0|^3}{3!} \|u-v\|$$

Iterando questo procedimento

n volte ottengo

$$|u(x)-v(x)| \leq L^n \frac{|x-x_0|^n}{n!} \|u-v\|$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

Dunque

$$\|u-v\| \leq \frac{L^n \delta^n}{n!} \|u-v\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Siccome $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{L^n \delta^n}{n!} = 0$

posso scegliere $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{L^{\tilde{n}} \delta^{\tilde{n}}}{\tilde{n}!} < 1$

$$\Rightarrow \|u-v\| \underbrace{\left(1-\frac{L^{\tilde{m}}\delta^{\tilde{m}}}{\tilde{m}!}\right)}_{>0} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|u-v\| \leq 0$$

$$\Rightarrow \|u-v\| = 0 \quad \Rightarrow u \equiv v \text{ su } I.$$

Sistemi di Eq. diff. ordinarie del I ordine

Sia ora $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto

$f = (f_1, \dots, f_n)$

Consideriamo il (PC)

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{cases}$$

con $(x_0, \alpha) \in \Omega$

Una sol di (PC) è una funzione vettoriale $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$

$u = (u_1, \dots, u_n)$

Per i sistemi vale un analogo del Teorema di Peano Picard di esistenza ed unicità Locale.

<u>Equazioni</u> <u>diff.</u> <u>ordinarie</u> di <u>ordine n.</u> Sono eq. del tipo

$$(EO) \quad y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

dove $F \in C(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto

(EO) si può ricondurre ad un sistema di n eq diff. ordinarie del I ordine.

Basta infatti chiamare

$$y_1 = y'$$
$$y_2 = y_1'$$
$$\dots$$
$$y_{n-1} = y_{n-2}'$$

e si avrà che $y \in C^n(I)$ è soluzione di (EO) se e solo se la funzione vettoriale

$$u = (y, y_1, \dots, y_{n-1}) \in C^1(I, \mathbb{R})$$

è soluzione del sistema

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \dots \\ y_{n-2}' = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

Il (PC) associato a (EO) si leggerà

pertanto

$$(PC) \begin{cases} y^{(n)} = F(x, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = \alpha_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n \end{cases}$$

dove $(x_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Omega$,

e ancora vale il Teorema di esistenza

ed unicità locale per (PC).