Equazioni differenziali del I ordine

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f \in C(\Omega)$ una funzione assegnata.

Si vuole trovare una curva $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo di $\mathbb{R}$, che ha in ogni punto derivata prima assegnata dalla legge f, cioè

$$(ED) \qquad y'(x) = f(x, y(x)) \qquad \forall x \in I$$

In generale diciamo che $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione differenziale

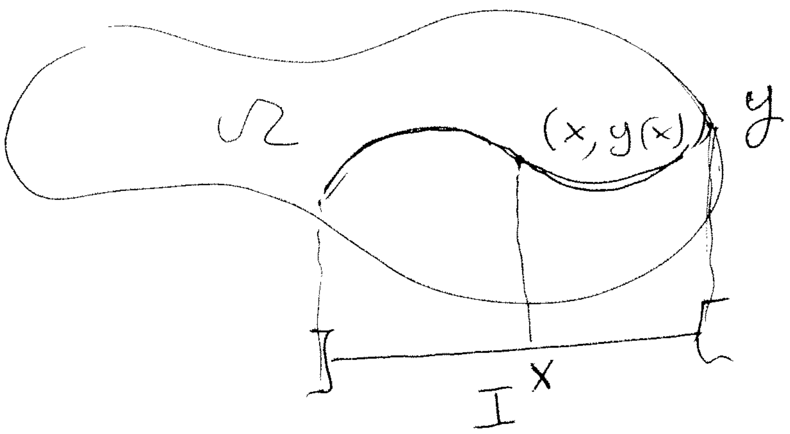
$$y' = f(x, y)$$

se i) $y \in C^1(I)$ con I intervallo di $\mathbb{R}$

ii) $y'(x) = f(x, y(x)) \qquad \forall x \in I$

iii) $(x, y(x)) \in \Omega \qquad \forall x \in I$

La condizione (iii) significa che il grafico della curva y deve appartenere ad Ω, cioè al dominio della f



Esempio

Sia $g \in C([a,b])$ e consideriamo l'eq. diff.

$$y' = g(x). \qquad (1)$$

Osserviamo che (1) è un caso particolare di (ED) perché la funzione assegnata a secondo membro dipende solo da x e non dalla curva y.

Una soluzione di (1) è data da

$$\tilde{y}(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad , \quad x_0 \in [a,b]$$

Infatti, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che

i) $\tilde{y} \in C^1([a,b])$.

ii) $\tilde{y}'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

In questo caso

$\Omega = [a,b] \times \mathbb{R}$ e dunque

$(x, \tilde{y}(x)) \in \Omega \quad \forall x \in [a,b]$ e vale iii)

Diremo che $\tilde{y}$ è un integrale particolare di (1).

In più per la formula fondamentale del calcolo integrale, ogni primitiva di (1) (e quindi ogni soluzione di (1))

si scrive come

(2) $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$$

dove $x_0 \in [a,b]$ è fissato

e y_0 è un qualunque numero reale.

Diremo pertanto che (1) ha infinite soluzioni e che (2) è l'integrale generale di (1)

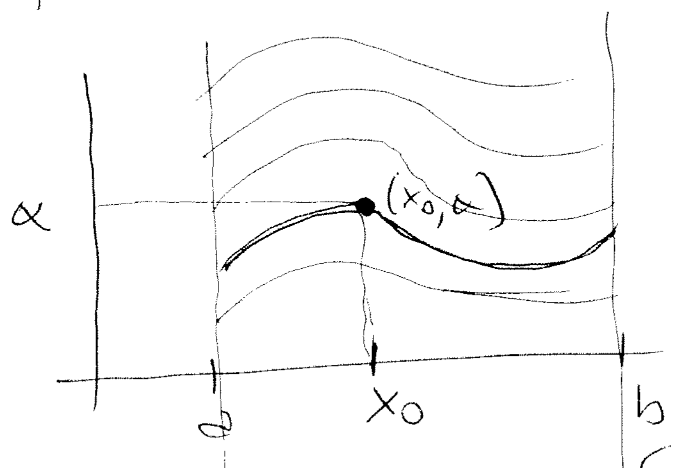
OSS. L'integrale generale di (1) si ottiene sommando una costante y_0 all'integrale particolare di (1).

Consideriamo ora il Problema di Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = g(x) & x \in [a,b] \\ y(x_0) = \alpha \end{cases}$$

dove $x_0 \in [a,b]$ è un punto fissato e $\alpha \in \mathbb{R}$ è fissato.

Significato: Di tutte le curve che hanno in ogni punto tg assegnata dalla legge g, si considera quella per il punto (x_0, α).



Una SOLUZIONE di (PC) è una funzione $y \in C^1([a,b])$ soluzione di (1) tale che $y(x_0) = \alpha$.

Possiamo pertanto dire che l'unica soluzione di (PC) è

$$y(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

Esempi

1) L'integrale generale di

$$y'(x) = 1+x^2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

è

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} (1+t^2)\,dt$$

$$= y_0 + \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_{x_0}^{x}$$

$$= y_0 + \left(x + \frac{x^3}{3} - x_0 - \frac{x_0^3}{3} \right)$$

posso scegliere $x_0 = 0$

$$= y_0 + x + \frac{x^3}{3} \qquad \forall\, y_0 \in \mathbb{R}$$

L'unica SOLUZIONE DEL (PC)

$y' = 1+x^2$ in $\mathbb{R}$

$$(PC) \begin{cases} y' = 1+x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

è $y(x) = 1 + x + \dfrac{x^3}{3}$

2. Consideriamo il

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = e^x, & x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'unica SOLUZIONE di (PC) è

$$y(x) = y(0) + \int_0^x e^t \, dt$$

$$= 1 + e^x - e^0 = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Consideriamo il (PC)

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

L'unica SOLUZIONE è

$$y(x) = y(0) + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt$$

$$= 0 + \left[\operatorname{arctg} t \right]_0^x = \operatorname{arctg} x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

Equazioni differenziali lineari del I ordine a coefficienti continui

Sia $f(x, y) = a(x) \cdot y + b(x)$

con $a, b \in C(I, \mathbb{R})$

e I intervallo di $\mathbb{R}$.

Vogliamo descrivere l'integrale generale

di $y' = a(x) \cdot y + b(x)$

Iniziamo dal caso omogeneo $(b \equiv 0)$

(EO). $y' = a(x)\, y$

La linearità del secondo membro di (EO)

mi permette di dire che

Proposizione
Se u e v sono soluzioni di

(EO) $\Rightarrow$ $u + v$ è ancora sol di (EO)

e λu è ancora sol di (EO)

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Cioè

$X = \{ u \in C^1(I),\ u \text{ soluzione di (EO)} \}$

è uno spazio vettoriale

Dim

u è sol di (EO) $\Rightarrow$ $u'(x) = a(x)\, u(x)$

v è sol di (EO) $\Rightarrow$ $v'(x) = a(x)\, v(x)$

e sommando $(u+v)'(x) = a(x)\,(u+v)(x)$

e moltiplicando per $d \in \mathbb{R}$

$$(du)' = du' = d\, a(x)\, u(x)$$
$$= a(x)\,(du)(x)$$

#

Cerchiamo ora un integrale particolare di (EO)

Fissato $x_0 \in I$ considero la funzione

$$y_0(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \quad \text{per } x \in I.$$

Abbiamo che $y_0 \in C^1(I)$ e

$$y_0'(x) = y_0(x) \cdot \left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \right)' = y_0(x) \cdot a(x) \quad \forall x \in I$$

Dunque y_0 è un integrale particolare di (EO).

Vogliamo ora dimostrare che ogni soluzione di (EO) si scrive come (INTEGRALE GENERALE)

$$y(x) = c\, y_0(x) \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

In tal caso diremo che X è uno spazio vettoriale reale di dimensione 1

Proposizione

Se y è soluzione di (EO) e y_0 integrale particolare di (EO) allora $y(x) = c\, y_0(x)$ con $c \in \mathbb{R}$

Dim

Sia $g = \dfrac{y}{y_0} \Rightarrow g \in C^1(I)$

e $y(x) = g(x) \cdot y_0(x)$

$$y'(x) = g'(x) \cdot y_0(x) + g(x) \cdot y_0'(x)$$
$$= g'(x) \cdot y_0(x) + g(x) \cdot a(x)\, y_0(x)$$
$$= a(x) \cdot y(x)$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) \cdot y_0(x) = a(x) \cdot y(x) - g(x)\, a(x)\, y_0(x)$$
$$= a(x)\, y(x) - \frac{y(x)}{\cancel{y_0(x)}}\, a(x)\, \cancel{y_0(x)}$$
$$= 0$$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \quad \forall x \in I$ perché $y_0 \neq 0$

$\Rightarrow g(x) =$ costante su I.

Esempi

1. L'unica sol del (PC)

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} \,, & x \in \mathbb{R}^+ \\ y(e) = 1 \end{cases}$$

è $$y(x) = 1 \cdot e^{\int_e^x \frac{1}{t}\,dt}$$

$$= e^{(\lg x - \lg e)} = e^{\lg x - 1}$$

$$= \frac{x}{e}$$

2.

(PC) $$\begin{cases} y' = xy \,, & x \in \mathbb{R} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$y(x) = e^{\int_1^x t\,dt} = e^{\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x} = e^{\frac{x^2-1}{2}}$$

è l'unica sol di (PC).

Corollario

L'Integrale generale di (EO) è

$$y(x) = c\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \quad , \ x \in I$$

dove x_0 è un punto fissato $x_0 \in I$ e $c \in \mathbb{R}$.

Corollario

L'unica sol. DEL (PC)

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = a(x)\, y \\ y(x_0) = \alpha \end{cases}$$

$a \in C(I)$, I intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$

è

$$y(x) = \alpha\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} = \alpha \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \right)$$

$$\forall x \in I$$

Consideriamo ora la non omogenea

(ENO) $y' = a(x) \cdot y + b(x)$

con $a, b \in C(I)$, I intervallo di $\mathbb{R}$

Proposizione

Se u e $v \in C^1(I)$ sono soluzioni di (ENO) $\Rightarrow$ $u - v$ è sol di (EO)

Dim

$$u' = a u + b$$

$$v' = a v + b$$

$$(u-v)' = a(u-v)$$

$$\Rightarrow u - v \text{ è sol. di (EO)}$$

#

Corollario

L'integrale generale di (ENO) è dato da

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x) \quad , x \in I$$

dove $\bar{y}$ è una soluzione particolare di (ENO) e y_0 è l'integrale generale dell'omogenea associata (EO)

Dunque per trovare una sol. generale di (ENO) devo solo trovare una sol. particolare e poi sommare

$$y_0(x) = C\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}.$$

Per trovare $\bar{y}(x)$ uso il metodo della variazione delle costanti, cioè cerco una soluzione particolare di (ENO) nella forma

$$\bar{y}(x) = g(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt},$$

e impongo che $\bar{y}$ sia sol. di (ENO).

$$\bar{y}' = g'\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} + g\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \cdot a(x)$$

$$\parallel$$

$$a\bar{y} + b = a g\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} + b(x)$$

$$\Rightarrow g'\, e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} = b(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = b(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}$$

$$\Rightarrow g(x) = \int_{x_0}^{x} \left(b(s)\, e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt} \right) ds + C$$

con $C \in \mathbb{R}$.

L'integrale generale di (ENO) e'

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\left(c + \int_{x_0}^{x}\left(b(s)\,e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}\,ds\right)\right)$$

$x \in I$.

L'unica sol del (PC)

$$(PC)\quad \begin{cases} y' = a(x)\cdot y + b(x) & x \in I \\ y(x_0) = \alpha \end{cases}$$

$x_0 \in I$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ assegnati e'

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\left(\alpha + \int_{x_0}^{x}\left(b(s)\,e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}\right)ds\right)$$

Esempi

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + x & , x \in \mathbb{R}^+ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\,dt = \lg x$$

$$e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} = e^{\lg x} = x \quad , \quad e^{-\int_{1}^{s} a(t)\,dt} = e^{-\lg s} = \frac{1}{s}$$

$$\int_{x_0}^{x} b(s)\,e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}\,ds = \int_{1}^{x} \cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}\,ds = x-1$$

$$\Rightarrow g(x) = x\left(1 + x - 1\right)$$

$$= x \cdot x = x^2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+$$

è l'unica sol.