

# DISPENSE DI ANALISI MATEMATICA

ANNAMARIA MONTANARI

## INDICE

1. INTEGRALE DI RIEMANN	1
1.1. Proprietà elementari dell'integrale di Riemann	5
1.2. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive	6
1.3. Integrale generalizzato secondo Riemann	10
2. SERIE NUMERICHE	11
2.1. Serie a termini non negativi	13
2.2. Serie alternate	15
3. APPENDICE: ALFABETO GRECO	17
Indice analitico	18
Riferimenti bibliografici	19

## 1. INTEGRALE DI RIEMANN

**Definizione 1.1.** Una partizione dell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  è un insieme ordinato  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  costituito da  $n+1$  punti tali che  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .

**Definizione 1.2.** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata. Definiamo somma inferiore di  $f$  relativa alla partizione  $P$

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^n \left( \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) (x_k - x_{k-1})$$

Definiamo somma superiore di  $f$  relativa alla partizione  $P$

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^n \left( \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) (x_k - x_{k-1})$$

Se la funzione  $f$  è positiva in  $[a, b]$  il significato geometrico di  $s(f, P)$  e di  $S(f, P)$  è quello di somma delle aree dei rettangoli inscritti e circoscritti nel sottografico di  $f$ , rispettivamente.

Osserviamo che per ogni partizione  $P$  di  $[a, b]$  vale sempre

$$s(f, P) \leq S(f, P).$$

Inoltre è intuitivo riconoscere che aumentando i punti della partizione la somma inferiore aumenta e la somma superiore diminuisce. Pertanto, se  $P \subseteq R$  con  $R$  partizione di  $[a, b]$ , si ha

$$s(f, P) \leq s(f, R) \quad S(f, R) \leq S(f, P)$$

Più in generale allora vale il seguente risultato

**Lemma 1.1.** Per ogni  $P, Q$  partizioni di  $[a, b]$ , posto  $R = P \cup Q$ , si ha

$$\left( \inf_{[a,b]} f \right) (b - a) \leq s(f, P) \leq s(f, R) \leq S(f, R) \leq S(f, Q) \leq \left( \sup_{[a,b]} f \right) (b - a).$$

Pertanto gli insiemi  $\{s(f, P), P \text{ partizione di } [a, b]\}$  e  $\{S(f, P), P \text{ partizione di } [a, b]\}$  sono separati. Inoltre sono inferiormente e superiormente limitati.

**Definizione 1.3.** Definiamo integrale inferiore di  $f$  su  $[a, b]$  il numero reale

$$s(f) = \sup\{s(f, P), P \text{ partizione di } [a, b]\}$$

Definiamo integrale superiore di  $f$  su  $[a, b]$  il numero reale

$$S(f) = \inf\{S(f, P), P \text{ partizione di } [a, b]\}$$

In generale vale sempre

$$s(f) \leq S(f).$$

**Definizione 1.4.** Diciamo che la funzione limitata  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $[a, b]$  se  $s(f) = S(f)$  e in tal caso chiamiamo questo numero reale integrale di estremi  $a$  e  $b$  di  $f$  e scriviamo

$$\int_a^b f(x)dx = S(f) = s(f)$$

Indichiamo con  $\mathcal{R}([a, b])$  l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo  $[a, b]$ .

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann su un intervallo  $[a, b]$ .

**Teorema 1.1.**  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  se e solo se  $\forall \epsilon > 0$  esiste una partizione  $P$  tale che

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ . Per definizione  $S(f) = s(f)$ . Inoltre per la caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore si ha che per ogni  $\epsilon > 0$  esistono due partizioni  $P_1$  e  $P_2$  tali che

$$s(f) - \epsilon/2 < s(f, P_1), \quad S(f) + \epsilon/2 > S(f, P_2).$$

Sia ora  $P = P_1 \cup P_2$  si ha

$$0 \leq S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P_2) - s(f, P_1) < S(f) + \epsilon/2 - (s(f) - \epsilon/2) = \epsilon.$$

Viceversa, se  $\forall \epsilon > 0$  esiste una partizione  $P$  tale che

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

allora

$$0 \leq S(f) - s(f) \leq S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

e da questo segue che  $S(f) = s(f)$ . Infatti, se  $S(f) > s(f)$  potremmo scegliere  $\epsilon = \frac{S(f) - s(f)}{2}$  ottenendo un assurdo nella disuguaglianza precedente.  $\square$

**Corollario 1.1.** Sia  $P_n = \{x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), k = 0, 1, \dots, n\}$  la partizione di  $[a, b]$  costituita da  $n+1$  punti di ugual distanza  $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ . Allora  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S(f, P_n) - s(f, P_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left( \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) = 0$$

Vediamo ora alcune condizioni sufficienti perchè una funzione limitata sia integrabile secondo Riemann sull'intervallo  $[a, b]$ .

**Proposizione 1.1.** Se  $f$  è monotona e limitata su  $[a, b]$  allora  $f \in \mathcal{R}([a, b])$

*Dimostrazione.* Supponiamo  $f$  monotona crescente, allora

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left( \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)) = 0 \end{aligned}$$

Analogamente, se  $f$  monotona decrescente, allora

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left( \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) - f(x_k)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} (f(x_0) - f(x_n)) = 0 \end{aligned}$$

□

**Proposizione 1.2.** Se  $f \in C([a, b])$  allora  $f \in \mathcal{R}([a, b])$

*Dimostrazione.* Per il Teorema di Cantor (che qui non dimostriamo) vale la seguente condizione di uniforme continuità per  $f \in C([a, b])$ :  $\forall \epsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che  $\forall x, y \in [a, b]$ , tali che  $|x - y| < \delta$  si ha

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Ma allora scelgo  $n$  tale che  $\frac{b-a}{n} < \delta$  ed ottengo

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \left| \sum_{k=1}^n \left( \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) \right| &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left| \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right| \\ &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \epsilon = (b-a)\epsilon \end{aligned}$$

□

**Definizione 1.5.** Diciamo che  $f$  è continua a tratti su  $[a, b]$  se ha al più un numero finito di discontinuità di prima specie.

**Proposizione 1.3.** Se  $f$  è limitata e continua a tratti su  $[a, b]$  allora  $f \in \mathcal{R}([a, b])$

**1.1. Proprietà elementari dell'integrale di Riemann.** Elenchiamo ora alcune proprietà elementari dell'integrale di Riemann che si dimostrano utilizzando la definizione.

**Proposizione 1.4** (ADDITIVITÀ RISPETTO ALL'INTERVALLO). Sia  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Allora per ogni  $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Proposizione 1.5** (LINEARITÀ). Siano  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ . Allora  $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$  e per ogni  $c \in \mathbb{R}$ ,  $cf \in \mathcal{R}([a, b])$ . Inoltre

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \quad \int_a^b (cf)(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

Se  $a < b$ , conveniamo di porre

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx,$$

da cui segue

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

**Proposizione 1.6** (TEOREMI DEL CONFRONTO). Siano  $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ . Se  $f \geq 0$  allora

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Se  $f \leq g$  allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Se  $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$ , poichè  $-|f| \leq f \leq |f|$  si ha sempre

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

**1.2. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive.** Il risultato che segue sarà utile nella prova del teorema fondamentale del calcolo integrale

**Teorema 1.2** (TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE). *Sia  $f \in C([a, b])$ . Allora esiste  $c \in [a, b]$  tale che*

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Il termine a destra dell'uguaglianza si chiama *media integrale* di  $f$  ed è l'analogo nel continuo della media aritmetica.

*Dimostrazione.*  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  pertanto sia  $\lambda = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ . Per il Teorema di Weierstass  $m = \min_{[a,b]} f \leq f(x) \leq \max_{[a,b]} f = M$  e per il precedente Teorema del confronto  $m = \min_{[a,b]} f \leq \lambda \leq \max_{[a,b]} f = M$ . Per il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue possiamo concludere che esiste un  $c \in [a, b]$  tale che  $f(c) = \lambda \in [m, M]$ .  $\square$

Il seguente teorema ci fornisce un metodo diretto per il calcolo esplicito di integrali di funzioni continue.

**Teorema 1.3** (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE). *Sia  $f \in C([a, b])$ . Allora la funzione integrale*

$$(1) \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

*è derivabile in ogni punto di  $[a, b]$  e  $F'(x) = f(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$*

*Dimostrazione.* Facciamo il rapporto incrementale per la funzione integrale  $F$  nel punto  $x$  e usiamo l'addittività dell'integrale rispetto all'intervallo e il teorema della media integrale

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(x_h) \end{aligned}$$

per un opportuno  $x_h \in [x, x+h]$ . Si ha  $\lim_{h \rightarrow 0} x_h = x$  e siccome  $f$  è continua  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_h) = f(x)$ . Ma allora passando al limite per  $h \rightarrow 0$  nella precedente uguaglianza si ottiene che esiste

$$F'(x) = f(x)$$

per ogni  $x \in [a, b]$ . □

**Definizione 1.6.** Una funzione  $G$  si dice una primitiva di  $f$  se  $G$  è derivabile in  $[a, b]$  e se  $G'(x) = f(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

**Osservazione 1.1.** La funzione integrale definita in (1) è una primitiva di  $f \in C([a, b])$ . Inoltre, se  $G$  è un'altra primitiva di  $f$  allora esiste una costante  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $G(x) = F(x) + c$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Infatti deve essere  $G'(x) - F'(x) \equiv 0$  e pertanto la funzione  $F - G$  deve essere costante su  $[a, b]$

Abbiamo allora la seguente formula

**Teorema 1.4** (FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE). Sia  $f \in C([a, b])$  e sia  $G$  una primitiva di  $f$  in  $[a, b]$ . Allora

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b := G(b) - G(a)$$

*Dimostrazione.* Sia  $F$  la funzione integrale definita in (1). Si ha

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Sia ora  $G$  un'altra primitiva di  $f$ . Per l'osservazione 1.1 esiste una costante  $c \in \mathbb{R}$  tale che  $F(x) = G(x) + c$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Allora

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - G(a).$$

□

Dalla formula fondamentale del calcolo integrale segue che, se conosco  $G$  una primitiva di  $f$  allora posso calcolare l'integrale di  $f$  semplicemente valutando  $G$  agli estremi dell'intervallo.

Vediamo ora alcuni metodi che sono utili nel calcolo di integrali di funzioni di cui non si conosce una primitiva.

**Teorema 1.5** (INTEGRAZIONE PER PARTI). *Siano  $f, g \in C^1([a, b])$ . Allora*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

*Dimostrazione.* Dalla formula di derivazione di un prodotto

$$(fg)' = f'g + g'f$$

e dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che

$$[fg]_a^b = \int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b g'(x)f(x)dx.$$

□

**Esempio 1.1.** *Il teorema di integrazione per parti è utile per calcolare integrali del seguente tipo:*

$$\int_a^b p(x) \cos x dx, \quad \int_a^b p(x) \sin x dx, \quad \int_a^b p(x) \exp x dx,$$

dove  $p(x)$  è un polinomio in  $x$ , perchè permette di abbassare il grado del polinomio  $p$ . È inoltre utile nel calcolo di integrali notevoli del tipo

$$\int_a^b \cos^2 x dx, \quad \int_a^b \sin^2 x dx.$$

*Ad esempio*

$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b \cos^2 x dx = \int_a^b \cos x (\sin x)' dx \\
 &= [\cos x \sin x]_a^b - \int_a^b (\cos x)' \sin x dx \\
 &= [\cos x \sin x]_a^b + \int_a^b \sin^2 x dx \\
 &= [\cos x \sin x]_a^b + \int_a^b (1 - \cos^2 x) dx \\
 &= [\cos x \sin x + x]_a^b - A
 \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$2A = [\cos x \sin x + x]_a^b$$

e pertanto

$$A = \frac{1}{2} [\cos x \sin x + x]_a^b$$

**Teorema 1.6** (DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILE). *Sia  $f \in C([a, b])$  e sia  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  una funzione iniettiva, suriettiva, di classe  $C^1$  e tale che  $\phi' \neq 0$ .*

*Allora*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

*Dimostrazione.* Sia  $F$  una primitiva di  $f$ . Allora  $F' = f$ , e per la formula di derivazione della composizione,  $F \circ \phi$  è una primitiva di  $(f \circ \phi) \phi'$  perchè  $(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t)) \phi'(t) = f(\phi(t)) \phi'(t)$ . Pertanto per la formula fondamentale del calcolo integrale

$$\int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \phi'(t) dt = [F(\phi(t))]_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

□

**Esempio 1.2.** *Il teorema del cambiamento di variabile è utile nel calcolo di integrali del tipo*

$$\int_a^b \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2} dx,$$

con  $\lambda \neq 0$ . Infatti posto  $\lambda x = t$ ,  $x = \phi(t) = \frac{t}{\lambda}$ ,  $\phi'(t) = \frac{1}{\lambda}$

$$\int_a^b \frac{1}{1 + \lambda^2 x^2} dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{1}{\lambda} [\arctan t]_{\lambda a}^{\lambda b}.$$

**1.3. Integrale generalizzato secondo Riemann.** In questa sezione consideriamo funzioni definite su un intervallo illimitato del tipo  $[a, +\infty[$  oppure funzioni non limitate definite su un intervallo limitato del tipo  $[a, b]$ .

**Definizione 1.7.** Sia  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Diciamo che  $f$  è integrabile in senso generalizzato secondo Riemann sull'intervallo  $[a, +\infty[$  se  $f \in \mathcal{R}([a, M])$  per ogni  $M > a$  e se esiste, finito o infinito, il limite seguente

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx.$$

In tal caso poniamo

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx.$$

**Esempio 1.3.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} [\ln |x|]_1^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \ln M = +\infty$$

Sia ora  $p > 1$  reale

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^p} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^M \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M^{1-p} - 1}{1-p} = \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

Se invece  $p < 1$  reale

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{x^p} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^M \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M^{1-p} - 1}{1-p} = +\infty \end{aligned}$$

perchè  $1 - p > 0$ .

**Definizione 1.8.** Sia  $f : [0, b]$  non limitata in 0. Diciamo che  $f$  è integrabile in senso generalizzato secondo Riemann sull'intervallo  $[0, b]$  se  $f \in \mathcal{R}([\varepsilon, b])$  per ogni  $0 < \varepsilon < b$  e se esiste, finito o infinito, il limite seguente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^b f(x) dx.$$

In tal caso poniamo

$$\int_0^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^b f(x) dx.$$

**Esempio 1.4.**

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln |x|]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\ln \varepsilon = +\infty$$

Sia ora  $p > 1$  reale

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varepsilon^{1-p}}{1-p} = +\infty \end{aligned}$$

Se invece  $p < 1$  reale

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varepsilon^{1-p}}{1-p} = \frac{1}{1-p} \end{aligned}$$

perchè  $1 - p > 0$ .

## 2. SERIE NUMERICHE

**Definizione 2.1.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri reali. Definiamo la successione delle somme parziali  $n$ -esime

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Se esiste, finito o infinito, il limite della successione  $S_n$ , poniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Diciamo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è convergente se  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s \in \mathbb{R}$  e in tal caso diciamo che  $s$  è la somma della serie.

Diciamo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è divergente se  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$  (oppure  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ ). In tal caso scriveremo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$  (rispettivamente  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$ ).

Diciamo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è irregolare se non esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

**Esempio 2.1.** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  è irregolare perchè  $S_{2n} = 0, S_{2n+1} = -1$  e pertanto non esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

**Teorema 2.1** (Condizione necessaria per la convergenza di una serie). *Se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è convergente, allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$ . Siccome per definizione  $S_n = S_{n-1} + a_n$  abbiamo che

$$a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} s - s = 0$$

□

**Osservazione 2.1.** *La condizione necessaria del Teorema precedente non è sufficiente, come mostra l'esempio 2.3*

L'unica serie di cui si riesce a calcolare facilmente la somma è la serie geometrica, ed è molto importante perchè interviene in molti settori, ad esempio in statistica, in probabilità, in matematica finanziaria, ecc.

**Esempio 2.2** (SERIE GEOMETRICA). *La serie geometrica di ragione  $x \in \mathbb{R}$  è*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

*Se  $x = 1$  abbiamo che  $S_n = n + 1 \rightarrow +\infty$  e pertanto  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = +\infty$ .*

*Se  $x \neq 1$ , moltiplichiamo  $S_n$  per  $(1 - x)$  e otteniamo*

$$(1 - x)S_n = (1 - x)(1 + x + \dots + x^n) = 1 + x + \dots + x^n - (x + \dots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}.$$

Pertanto

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

e passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  otteniamo i seguenti casi,

se  $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}.$$

se  $x > 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = +\infty.$$

se  $x \leq -1$  la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  è irregolare

**2.1. Serie a termini non negativi.** In questa sezione consideriamo serie a termini non negativi, precisamente  $a_n \geq 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 2.2.** *Una serie a termini non negativi è divergente o convergente.*

*Dimostrazione.* La successione delle somme parziali  $S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$  è monotona crescente e pertanto ha limite, finito o infinito.  $\square$

Per stabilire se una serie a termini non negativi è convergente o divergente è utile il seguente teorema del confronto

**Teorema 2.3.** **TEOREMA DEL CONFRONTO PER LE SERIE**

*Sia  $0 \leq a_n \leq b_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$  allora  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ .*

*Se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$  allora  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ .*

*Dimostrazione.* Segue dal teorema del confronto per le successioni delle somme parziali  $\square$

**Esempio 2.3** (Serie Armonica). *La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  è divergente perchè la successione delle somme parziali diverge, infatti*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \rightarrow_{n \rightarrow \infty} +\infty \end{aligned}$$

**Esempio 2.4** (Serie Armonica generalizzata). *La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  è convergente per  $p > 1$ , perchè la successione delle somme parziali converge, infatti*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^p} \int_{k-1}^k dx = 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{k^p} dx \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx < +\infty \end{aligned}$$

Confrontando una serie numerica a termini non negativi con la serie geometrica è possibile dimostrare i seguenti criteri

**Teorema 2.4** (Criterio del rapporto). *Sia  $a_n \geq 0$ . Se esiste*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

*se  $\ell < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è convergente*

*se  $\ell > 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è divergente*

*se  $\ell = 1$ , il criterio è inefficace*

**Teorema 2.5** (Criterio della radice). *Sia  $a_n \geq 0$ . Se esiste*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

*se  $\ell < 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è convergente*

*se  $\ell > 1$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è divergente*

*se  $\ell = 1$ , il criterio è inefficace*

Confrontando una serie numerica a termini non negativi con la serie armonica e con la serie armonica generalizzata è possibile dimostrare il seguente criterio

**Teorema 2.6** (Criterio degli infinitesimi). *Sia  $a_n \geq 0$ . Se esiste*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

*se  $p > 1$ , e  $\ell < +\infty$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è convergente*

*se  $p \leq 1$ , e  $\ell \neq 0$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è divergente*

**2.2. Serie alternate.** Per le serie a segno alterno i criteri della precedente sezione sono inefficaci. Vale invece il seguente

**Teorema 2.7** (Criterio di Leibnitz). *Se  $a_n \geq 0$  è una successione monotona decrescente, tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , allora*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n < +\infty.$$

*Dimostrazione.* Sia  $S_n$  la successione delle somme parziali. Per la monotonia di  $a_n$  si ha

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq S_{2n-1}, \quad S_{2n} = S_{2n-2} + a_{2n} - a_{2n-1} \leq S_{2n-2}$$

e siccome  $a_n \geq 0$

$$S_1 \leq \cdots S_{2n-1} \leq S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2n-2} \cdots \leq S_2$$

Pertanto  $S_{2n}$  è una successione monotona decrescente inferiormente limitata, e quindi esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = s$ ,  $S_{2n+1}$  è una successione monotona crescente superiormente limitata, e quindi esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \sigma$ . Inoltre deve essere  $s = \sigma$  perchè

$$\sigma - s = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$$

Pertanto esiste finito il  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  e dunque la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  è convergente.  $\square$

**Esempio 2.5.** *Per ogni  $p > 0$  la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

*è convergente perchè la successione  $a_n = \frac{1}{n^p}$  è monotona decrescente e tende a zero per  $n \rightarrow \infty$ .*

**Teorema 2.8** (Convergenza assoluta). *Se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$  allora*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

*Dimostrazione.* Siccome  $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , per il criterio del confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| < +\infty$$

Sia allora  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = \alpha$  e indichiamo con  $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ . Si ha

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^n |a_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha - \beta.$$

□

**Osservazione 2.2.** *La serie dell'esempio 2.5 con  $p = 1$  è convergente, ma non è assolutamente convergente. Pertanto non vale il viceversa del Teorema 2.8.*

## 3. APPENDICE: ALFABETO GRECO

$\alpha$  alpha

$\beta$  beta

$\gamma$  gamma,  $\Gamma$  Gamma

$\delta$  delta,  $\Delta$  Delta

$\epsilon$   $\varepsilon$  epsilon

$\zeta$  zeta

$\eta$  eta

$\theta$   $\vartheta$  theta,  $\Theta$  Theta

$\iota$  iota

$\kappa$  kappa

$\lambda$  lambda,  $\Lambda$  Lambda

$\mu$  mu

$\nu$  nu

$\xi$  xi,  $\Xi$  Xi

$o$  o

$\pi$  pi,  $\Pi$  Pi

$\rho$   $\varrho$  rho

$\sigma$   $\varsigma$  sigma,  $\Sigma$  Sigma

$\tau$  tau

$v$  upsilon,  $\Upsilon$  Upsilon

$\phi$   $\varphi$  phi,  $\Phi$  Phi

$\chi$  chi

$\psi$  psi,  $\Psi$  Psi

$\omega$  omega,  $\Omega$  Omega

## INDICE ANALITICO

partizione 1  
somma inferiore 1  
somma superiore 2  
integrale inferiore 2  
integrale superiore 2  
funzione integrabile 3  
Teorema della media integrale 6  
Teorema fondamentale del calcolo integrale 6  
Teorema fondamentale del calcolo integrale 6  
funzione integrale 6  
funzione primitiva 7  
Formula fondamentale del calcolo integrale 7  
Teorema di integrazione per parti 8  
Teorema del cambiamento di variabile 9  
funzione integrabile in senso generalizzato  
    secondo Riemann 10  
funzione integrabile in senso generalizzato  
    secondo Riemann 11  
Serie numeriche 11  
successione delle somme parziali 11  
serie convergente 12  
serie divergente 12  
serie irregolare 12  
Condizione necessaria per la convergenza di  
    una serie 12  
serie geometrica 12  
Serie a termini non negativi 13  
teorema del confronto per le serie 13  
criterio del rapporto per le serie 14  
criterio della radice per le serie 14  
criterio degli infinitesimi per le serie 15  
criterio di Leibnitz per le serie 15  
convergenza assoluta per le serie 15

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] E. LANCONELLI. Lezioni di analisi matematica 1. Bologna. Pitagora Editrice, 1994.
- [2] P. MARCELLINI, C. SBORDONE. Elementi di analisi matematica uno. Napoli. Liguori Editore, 2002.
- [3] P. MARCELLINI, C. SBORDONE. Esercitazioni di matematica, Vol 1, parte prima e seconda. Napoli. Liguori Editore, 1995.